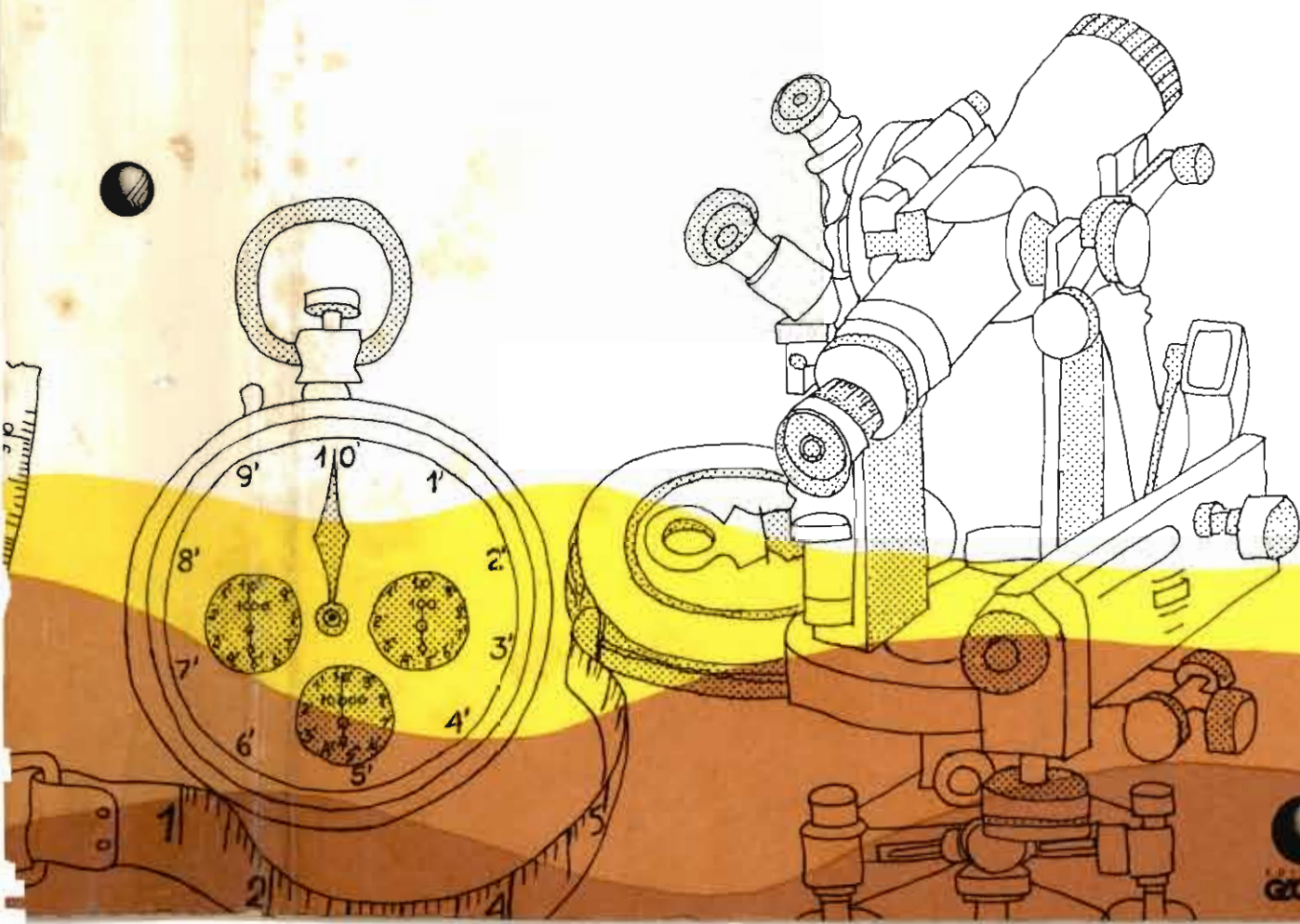


CURSO DE
TOPOGRAFIA

CURSO DE TOPOGRAFIA

LÉLIS ESPARTEL

LÉLIS ESPARTEL



CURSO DE TOPOGRAFIA

LÉLIS ESPARTEL
Engenheiro Civil
Professor Emérito da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

CURSO DE TOPOGRAFIA

9.ª Edição



Copyright © 1960 by Lélis Espartel

**Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

E73c Espartel, Lélis, 1898-
9.ed. Curso de topografia / Lélis Espartel. — 9. ed. —
Rio de Janeiro : Globo, 1987.

ISBN 85-250-0222-4

1. Topografia 2. Topografia - Problemas, exercícios etc. I. Título.

87-0513

CDD-526.9
-526.9076

Índices para catálogo sistemático:

1. Exercícios : Topografia 526.9076
2. Topografia 526.9

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta edição pode ser utilizada ou reproduzida — em qualquer meio ou forma, seja mecânico ou eletrônico, fotocópia, gravação etc. — nem apropriada ou estocada em sistema de banco de dados, sem a expressa autorização da editora.

Editora Globo S.A.
Rua Itapiru, 1209, CEP 20251, Rio de Janeiro.
Tel.: (021)273-5522, telex: (021)23365, RJ.
Rua do Curtume, 665, CEP 05065, São Paulo.
Tel.: (011)262-3100, telex: (011)54071, SP.

Prefácio

Animados pelo entusiasmo contagiante que tivemos a felicidade de despertar desde 1920 em gerações de estudantes de todos os graus, que passaram pela tradicional Escola de Engenharia e nova Faculdade de Arquitetura, ensinando principalmente Topografia, com o pensamento voltado para os saudosos mestres, Eng.^{os} Acylino Carvalho e João Lüderitz, vimos com a presente publicação, possibilitada graças à ajuda de Deus, que nos deu forças para coordenar notas mimeografadas esparsas no correr dos anos, e pelo entusiasmo dos dedicados Diretores da Editora Globo, saldar uma dívida que a nós mesmos nos impusemos.

Tal dívida prende-se à prestação de contas da nossa vida no setor do ensino, iniciada com a redação de uma Caderneta de Campo, já em 3.^a edição Globo, com mais de 10 000 exemplares vendidos espalhados por todos os rincões da Pátria e, até mesmo no além-mar, na gloriosa terra lusitana onde tivemos a honra de vê-la em mãos de estudantes e, mesmo, de engenheiros portugueses, na capital e no interior da Mãe-Pátria.

Precede este curso de Topografia uma Introdução, com definições e conceitos fundamentais da Geodésia e Astronomia, ciências às quais se acha intimamente ligada para a resolução de muitos problemas.

O conhecimento da forma efetiva da Terra e as sucessivas aproximações ao elipsóide e esfera local, permitem determinar a extensão máxima dos levantamentos, que, planimetricamente, podem ser resolvidos sem levar em conta a influência da curvatura da Terra e refração atmosférica.

O programa organizado para o desenvolvimento desse curso é o que preleccionamos há várias décadas na Escola de Engenharia de Porto Alegre, aprovado todos os anos pelo Conselho Técnico-Administrativo e Congregação da referida Escola Superior, razão por que resolvemos conservá-lo no desenvolvimento do curso. Está o mesmo subdividido em seis capítulos: Parte Geral: Planimetria e Agrimensura, Altimetria, Taqueometria e Fotogrametria Terrestre e Parte Aplicada, compreendendo: Levantamentos de estradas, subterrâneos, hidrográficos, cadastrais, de precisão e aerofotogramétricos.

Acompanhando o progresso da técnica na construção dos instrumentos topográficos, acrescentamos detalhes sobre recente instrumental

moderno não incluídos ainda na Caderneta de Campo, nem nas Notas Complementares, poligrafadas em multilite, há vários anos, pelo C.E.U.E. (Centro dos Estudantes Universitários de Engenharia).

Com a inclusão de grande número de exercícios práticos, que acompanham, pari-passu, o desenvolvimento da parte teórica, pensamos ter contribuído, embora modestamente, com mais um livro nacional de Topografia, que é o primeiro degrau a ser vencido pelos estudantes, como disciplina de aplicação prática, nos cursos de Engenharia, Arquitetura, Agronomia, etc. e oxalá o mesmo possa aproveitar a:

*Engenheiros e estudantes de Engenharia;
Arquitetos e estudantes de Arquitetura;
Agrônomos e estudantes de Agronomia;
Topógrafos e agrimensores;
Exploradores e locadores de estradas (com a colaboração da Caderneta de Campo);
Desenhistas e calculistas de trabalhos topográficos, rodo, hidro e ferroviários.*

Muito longe de imaginar termos escrito uma obra perfeita; agradeceremos aos distintos colegas de magistério e profissionais pelas falhas que nos apontarem e que procuraremos corrigir em nova edição, se esta lograr o êxito que os meus bondosos alunos e colegas prognosticam.

Desejamos, ao concluir, prestar reverente e devotada homenagem à memória do inolvidável amigo, que traçou rumo seguro em nossa vida convidando-nos em 1920 para Professor de Desenho e Tecnologias no curso noturno de aperfeiçoamento de operários do Instituto Técnico Profissional, o Eng.º João Simplicio Alves de Carvalho, que foi um dos primeiros grandes Diretores da Escola de Engenharia do passado, Escola que foi durante muitos anos a Universidade Técnica do Rio Grande do Sul, tal a sua grandiosidade e a qualidade do ensino ministrado.

Aos prezados leitores e estudiosos da matéria as nossas sinceras excusas por não ter podido apresentar obra de maior amplitude científica.

LÉLIS ESPARTEL

Sumário

PRIMEIRA PARTE — TOPOMETRIA

Capítulo I — PARTE GERAL

§ 1 — Generalidades. Conceitos fundamentais	3
1 — Objeto da Topografia. Definição	3
2 — Distinção entre a Topografia e a Geodésia	4
3 — Sumário histórico da evolução da Topografia	4
4 — Importância da Topografia para o engenheiro	5
5 — Divisões da Topografia: Topometria e Topologia; Planimetria e Altimetria; Taqueometria; Fotogrametria e Aerofotogrametria ..	6
6 — Agrimensura	8
§ 2 — Erros devidos à forma e dimensões da Terra. Coordenadas	9
7 — Influência da forma e dimensões da Terra nos levantamentos topográficos	9
8 — Coordenadas astronômicas e terrestres	15
9 — Erros planimétrico e altimétrico. Correções da curvatura da Terra e refração atmosférica	22
§ 3 — Unidades de medida	29
10 — Definições. Criação da unidade linear Internacional. Metro dos arquivos de França. Protótipo do metro	29
11 — Unidades de medida linear e itinerária. Sistema métrico decimal no Brasil	30
12 — Medidas de superfície. Pequenas e grandes superfícies, relação entre medidas antigas e atuais	32
13 — Medidas angulares. Conversão de graus em grados e vice-versa. Radiano	33
§ 4 — Planos de projeção: Escalas. Convenções topográficas	37
14 — Planos e projeções	37
15 — Desenho da planta. Escalas usadas em Topografia	37
16 — Principais escalas e seu emprego	39
17 — Precisão gráfica	40
18 — Medidas sobre a carta: Escalas gráficas. Curvímetros	41
19 — Necessidade de "sinais convencionais"; Convenções usuais	44

Capítulo II – PLANIMETRIA

A) LEVANTAMENTO EXPEDITO, A TRENA E A BÚSSOLA

§ 5 – Medida dos alinhamentos	47
20 – Generalidades	47
21 – Processos expeditos	48
a) a passo;	
b) pela velocidade de marcha;	
c) pelo odômetro;	
d) pelo binóculo, com estadia;	
e) pelo trânsito de mão, com estadia;	
f) pela bússola-eclímetro com estadia;	
g) prancheta de explorador.	
22 – Processos diretos de medida com diastímetros	58
a) piquetes e estacas;	
b) balizas;	
c) trenas, correntes e fitas de aço;	
d) jogos de fichas.	
§ 6 – Medida dos ângulos horizontais com bússolas, pantômetros e esquadro	63
23 – Introdução	63
24 – Medida das direções. Bússolas	63
25 – Pólos magnéticos da Terra	64
26 – Inclinação da agulha	64
27 – Declinação magnética	64
28 – Atração local	65
29 – Azimute magnético (Az)	66
30 – Rumo magnético (R)	67
31 – Conversão de Az em R e vice-versa	67
32 – Orientação magnética	68
33 – Tipos de bússola	69
34 – Bússolas de alidade excêntrica. Erro	70
35 – Bússolas de alidade central	71
a) bússola prismática azimutal;	
b) bússola de rumos Gurley;	
c) bússola Bezar.	
36 – Pantômetro, com e sem luneta	73
37 – Esquadro de agrimensor	74
38 – Grafômetro	75
39 – Verificações de uma bússola	76
40 – Bússolas declinadas	77
41 – Inversão dos pontos leste e oeste nas bússolas de rumos	78
42 – Levantamento a bússola	79
43 – Vantagens e inconvenientes de uma bússola	80
§ 7 – Traçado dos alinhamentos no terreno. Erros nas medidas. Correções	81
44 – Problema geral	81
45 – Determinação de uma direção. Piquetagem, balizamento e medida	81
46 – Balizamento de uma direção, com e sem obstáculo. Outros problemas	82
47 – Medição a trena em terreno plano e inclinado. Verificações	86
48 – Erros nas medidas lineares, obtidas diretamente. Correções	88

a) falta de alinhamento da trena;	
b) falta de horizontalidade da trena;	
c) curvatura da trena (catenária).	
49 - Levantamento a trena de uma poligonal, e dos detalhes	94
§ 8 - Determinação dos ângulos internos e declinação magnética com as bússolas. Problemas de campo	97
50 - Fórmula geral dos azimutes e dos ângulos internos de uma poligonal	97
51 - Determinação aproximada da declinação por observações do Sol	98
52 - Problemas resolvidos com as bússolas (1. ^a parte)	99
a) traçar uma perpendicular a um alinhamento;	
b) traçar uma paralela a um alinhamento;	
c) prolongar um alinhamento, além de um obstáculo;	
d) medir a distância entre 2 pontos, indiretamente;	
e) determinar a distância entre 2 pontos, com medidas tomadas de uma base auxiliar;	
f) medida dos ângulos horizontais com a bússola.	
§ 9 - Cálculo das poligonais. Erros e compensação. Desenho da planta	103
53 - Poligonais fechadas e abertas	103
54 - Compensação gráfica de uma poligonal fechada	105
55 - Desenho da planta. Escalas	107
56 - Projeções dos lados e coordenadas dos vértices de uma poligonal	108
57 - Fórmula de Gauss para a avaliação das áreas	112
58 - Levantamento dos detalhes	116
B) LEVANTAMENTO REGULAR, A TEODOLITO E TRENA	
§ 10 - Teodolitos em geral	117
59 - Trânsito de precisão GURLEY	118
60 - Trânsito taqueométrico KEUFFEL & ESSER	122
61 - Teodolito repetidor KERN, com bússola central	123
62 - Teodolito ZEISS, IV	128
63 - Teodolito repetidor WILD, T1	133
64 - Teodolito taqueométrico FENNEL, FT1	134
65 - Teodolito repetidor VASCONCELLOS, TV-M1	136
§ 11 - Detalhes das peças componentes de um teodolito. Eixos	139
66 - Níveis de bolha de ar	139
67 - Lunetas	143
68 - Limbos ou círculos graduados	162
69 - Verniers ou nônios	163
70 - Microscópios para leitura dos limbos	165
71 - Acessórios	169
72 - Eixos de um teodolito	170
§ 12 - Manejo e verificações de um teodolito. Correções e retificações	170
73 - Estacionamento, calagem e colimação ao teodolito	170
74 - Verificações e retificações de um teodolito; condições dos eixos	174
1. ^a) horizontalidade do prato do limbo;	
2. ^a) perpendicularismo do eixo óptico sobre o eixo de rotação da luneta;	
3. ^a) horizontalidade do eixo de rotação da luneta (secundário);	
4. ^a) paralelismo e horizontalidade dos eixos do nível de bolha e óptico da luneta.	

75 — Verificações e ajustes do teodolito repetidor WILD T1	177
76 — Retificação do teodolito VASCONCELLOS, com bússola, TV-M1	179
77 — Influência dos erros residuais das retificações na medida dos ângulos	180
78 — Excentricidade da alidade. Correções dos erros nos teodolitos antigos e modernos. Erro flutuante	184
§ 13 — Medida dos ângulos horizontais isolados e múltiplos, a teodolito	188
79 — Medida de ângulos isolados	188
a) Medida simples;	
b) Medida compensada.	
80 — Medida de ângulos numa poligonização	189
a) Processo dos ângulos internos e azimutes;	
b) Processo de deflexões e rumos;	
c) Método do ângulo duplo;	
d) Método de repetição;	
e) Método de reiteração.	
81 — Mediças angulares múltiplas	195
a) Método das séries ou dos giros do horizonte;	
b) Método dos ângulos com a referência;	
c) Método dos ângulos (Schreiber).	
82 — Erro devido à centragem imperfeita do teodolito	198
83 — Redução ao centro de estação, quando inacessível	202
§ 14 — Métodos de levantamento planimétrico	203
84 — Tipos de levantamentos	203
a) Levantamentos em grandes escalas;	
b) Levantamentos urbanos;	
c) Levantamentos cadastrais;	
d) Levantamentos em escalas médias;	
e) Levantamentos em pequenas escalas;	
f) Levantamentos de reconhecimento.	
85 — Levantamento planimétrico comum, a teodolito	206
1) Reconhecimento do terreno.	
2) Levantamento do polígono:	
a) método de itinerário;	
b) método de triangulação, por irradiação;	
c) método de triangulação, por interseção;	
d) método das coordenadas.	
3) Levantamento dos detalhes.	
4) Levantamento de uma estrada — Generalidades:	
a) Exploração comum;	
b) Exploração locada.	
86 — Triangulação topográfica	213
a) Marcação dos vértices e sinalização;	
b) Escolha e medida da base;	
c) Medida dos ângulos.	
§ 15 — Cálculo analítico das coordenadas e da área	219
87 — Cálculo das coordenadas	219
a) Ordenadas e abcissas;	
b) Origem e fim de um alinhamento;	
c) Projeções dos alinhamentos;	
d) Fórmulas gerais de transformação;	

e)	Verificação do levantamento. Erro de fechamento;	
f)	Tolerâncias;	
g)	Condições de fechamento;	
h)	Fórmulas para o erro relativo de fechamento.	
88 --	Compensação analítica da poligonal	225
a)	Correção das projeções;	
b)	Correção dos lados;	
c)	Exemplo prático. (Planilha até projeções).	
89 --	Cálculo de área	229
a)	Vértice mais oriental;	
b)	Abscissa simples e dupla de um lado	
c)	Cálculo da área. Regra geral;	
d)	Posição do meridiano de referência;	
e)	Construção da planta pelas coordenadas dos vértices;	
f)	Continuação de exercício prático (Coordenadas e área);	
g)	Memento de fórmulas e regras.	
§ 16 --	Outros processos de avaliação de áreas. Áreas extrapoligonais	238
90 --	Métodos de equivalências gráficas	240
a)	Considerações gerais;	
b)	Método de Garceau (Triângulo);	
c)	Método de Collignon (Trapézio):	
1)	Princípio geral	
2)	Casos práticos	
3)	Exercício.	
91 --	Métodos mecânicos. Planímetros	247
a)	Processos da quadricula e da balança de precisão;	
b)	Planímetro polar de Amsler e Coradi;	
c)	Teoria (resumida).	
92 --	Métodos para avaliação das áreas extrapoligonais	252
a)	Generalidades;	
b)	Método dos trapézios (fórmula de Bezout);	
c)	Método de Simpson;	
d)	Método de Poncelet.	
§ 17 --	Problemas de campo. A teodolito. Triangulações. Problemas de Pothénot e de Hansen	256
93 --	Problemas	256
1)	Traçar a teodolito, um alinhamento sobre uma coxilha, ligando pontos nas encostas;	
2)	Determinar o comprimento de um alinhamento, cujos extremos são inacessíveis;	
3)	Determinar o ângulo formado por 2 alinhamentos, com vértice inacessível;	
4)	Achar o comprimento de uma linha inacessível de grande extensão, recorrendo a uma base poligonal;	
5)	Problema de Pothénot ou dos 3 pontos:	
a)	Resolução gráfica;	
b)	Resolução mecânica;	
c)	Resolução analítica;	
d)	Resolução por coordenadas.	
6)	Problema de Hansen ou do par de pontos fixos inacessíveis:	
a)	Solução, com ângulo auxiliar;	
b)	Solução, da figura harmônica.	

§ 18 — Determinação da Meridiana e das Coordenadas Geográficas	268
94 — Aparelhagem	268
a) Generalidades;	
b) Teodolito universal WILD T2.	
95 — Medida do tempo. Definições	273
96 — Determinação da meridiana ou do azimute verdadeiro	275
a) Método de duas observações:	
1) Alturas correspondentes de uma estrela;	
2) Alturas correspondentes do Sol;	
3) Correção da declinação (δ_{\odot}) do Sol;	
4) Tabela de correção diária: I;	
5) Tabela de correção (fator K): II;	
6) Exemplo prático;	
7) Tipo de caderneta (alturas iguais).	
b) Estrelas circumpolares. Máxima elongação;	
c) Método de uma observação:	
1) Observação de uma estrela numa posição qualquer;	
2) Observação do Sol, idem, idem;	
3) Exemplo prático.	
97 — Determinação da latitude	291
98 — Determinação da longitude	293
§ 19 — Instrumental e processos do desenho da planta	295
99 — Instrumental de cálculo e desenho	295
a) Mesa de desenho e tectnógrafo;	
b) Coordenatógrafo;	
c) Pantógrafo de precisão;	
d) Régua de cálculo;	
e) Máquina de calcular.	
100 — Processos de desenho de uma planta	308
a) Formatos de papel. Recomendação da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT);	
b) Traçado do quadriculado. M todo comum e em diagonal;	
c) Marcação dos vértices no quadriculado;	
d) Marcação de vértices auxiliares;	
e) Marcação dos detalhes;	
f) Acabamento do desenho: Cópia, redução e ampliação.	

Capítulo III — AGRIMENSURA

§ 20 — Divisão e demarcação de terras (Parte topográfica)	321
101 — Generalidades	321
a) Objeto e importância de agrimensura;	
b) Divisão amigável e judicial;	
Processos de demarcação e divisão:	
1) Processo numérico;	
2) Processo analítico;	
3) Processo gráfico.	
102 — Determinação geral do problema	323
a) Divisão das áreas triangulares.	

Linhas divisórias:

- 1) a 4) Casos comuns de divisórias;
 - 5) Divisória por um ponto dado, de coordenadas conhecidas;
 - 6) Divisória fazendo ângulo dado com um lado do triângulo;
 - 7) Divisória deve ter um comprimento mínimo;
 - 8) Divisórias partindo de 2 vértices, separando áreas equivalentes;
- b) Divisão em terrenos quadrilaterais:
- 1) Divisão paralela a um dos lados;
 - 2) Divisão em qualquer posição;
 - 3) Divisão paralela às bases de um trapézio.
- 103 - Divisão de áreas poligonais, pelo processo analítico 335
- 1) Divisórias partindo de dois vértices de um polígono dado.
- 104 - Divisão de uma área poligonal pelo processo gráfico 339
- 1) O ponto comum é um dos vértices do polígono;
- 2) O ponto comum está situado em um dos lados do polígono.
- 105 - Avaliação da área por determinantes e aplicação a um pentágono 340
- § 21 - Divisão e Demarcação de Terras (Digressão jurídica) 344
- 106 - 1) a 9) Ações de divisão e demarcação 344
- 107 - 10) a 15) Ações complementares 349

Capítulo IV - ALTIMETRIA

A) GENERALIDADES

- § 22 - Definições e referências 353
- 108 - 1) Altitudes e cotas. Nível verdadeiro e aparente 353
- 2) Métodos gerais de nivelamento;
- 3) Nivelamento geométrico. Erro cometido;
- 4) Aparelhos de nivelamento. Miras;
- 5) Níveis em geral. Classificação;
- 6) Nível de pinulas.

B) NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

- § 23 - Instrumental. Níveis e miras 356
- 109 - Nivelamento expedito com 356
- a) Nível de mão;
- b) Jogo de réguas;
- c) Clinómetro;
- d) Clinómetro de luneta, ou eclímetro;
- e) Clisímetro;
- f) Nível colimador de GOULIER.
- 110 - Nivelamento comum 362
- a) Órgãos principais e eixos de nível.
- b) Classificação geral dos níveis de luneta. Retificações:
- 1) Nível tipo ÉGAULT (2.^a categoria);
 - 2) Nível tipo LENOIR (3.^a categoria);
 - 3) Nível tipo GURLEY (4.^a categoria);
 - 4) Nível tipo universal (1.^a categoria);
 - 5) Nível de precisão, com bolha bipartida;
 - 6) Nível de luneta reversível.
- c) Tipos de miras. Sapatas.

§ 24 — Prática do nivelamento, no campo e no escritório	378
111 — 1) Operações de campo. Referências de nível	378
2) Nivelamento simples.	
3) Nivelamento composto.	
4) Verificação do nivelamento, erros e sua distribuição.	
5) Exemplo prático.	
112 — 1) Nivelamento estadimétrico	384
2) Nivelamento radiante.	
3) Nivelamento de seções transversais.	
113 — 1) Perfil longitudinal	387
2) Gracide e seu traçado.	
3) Plano cotado.	
4) Desenho de um perfil.	

C) NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO

§ 25 — Instrumental (continuação)	391
114 — Clinômetro ZEISS (LODIS)	391
115 — Clinômetro FENNEL	394
116 — Alidade com prancheta. — Fennel	394
117 — Nível — taqueômetro Zeiss	396
§ 26 — Técnica do nivelamento trigonométrico. Problemas	397
118 — Fórmulas gerais	397
Correção de Zênite instrumental	397
119 — Nivelamento a clinômetro ou clisímetro (caderneta, perfil, tabelas)	403
120 — Nivelamento trigonométrico a teodolito. Problemas	406
a) Determinar a altura de um ponto no alto de um morro (4 soluções);	
b) Determinar a altura de um ponto elevado por triangulação (5. ^a solução).	
121 — Problema prático	411
Determinação da altura de uma chaminé	411

D) NIVELAMENTO BAROMÉTRICO

§ 27 — Instrumental	413
122 — Definições. Barômetro de mercúrio	413
123 — Termobarômetro (Hipsômetro)	415
124 — Aneróides (Barômetros metálicos)	416
a) Aneróide compensado Casella (tipo Bohne);	
b) Aneróide altímetro, Sistema Paulin;	
c) Aneróide altímetro, Goldschmied.	
§ 28 — Cálculo de altitudes com o nivelamento barométrico	419
125 — Correções das leituras de um aneróide	419
a) Correção da temperatura;	
b) Correções de graduação e de estado;	
c) Cuidados a tomar na leitura de um aneróide.	
126 — Fórmulas barométricas	421
a) Fórmula de Laplace. Exemplo;	
b) Fórmula de Jordan. Tabelas. Exemplo;	

CURSO DE TOPOGRAFIA

xv

c)	Pressão atmosférica (barométrica). Correções. Exemplo;	
d)	Redução das pressões ao nível do mar. Tabela de Laplace. Exemplo.	
e)	Fórmulas simplificadas:	
1)	de Babinet;	
2)	do Eng. Street;	
3)	de Ramond;	
4)	de Saint Robert.	
f)	Fórmula de L. Cruls. Exemplo;	
g)	Fórmula de Jordan. Exemplo;	
h)	Grau barométrico. Tabelas de Jordan.	
127	— Exemplo sobre nivelamento de diversos pontos, com o emprego do grau barométrico (Jordan)	430
a)	Erro provável médio de um nivelamento barométrico.	

SEGUNDA PARTE — TOPOLOGIA

§ 29	— Generalidades. Modelado topográfico. Formas de terreno	433
128	— a) Definições	433
	b) Origem e forma da Terra;	
	c) Modelado estrutural. Erosão. Modelado topográfico;	
	d) Definições geográficas do terreno.	
129	— Formas gerais do modelado topográfico	437
	a) Formas simples ou fundamentais;	
	b) Distinção entre um terço e um vale;	
	c) Linhas importantes do terreno;	
	d) Declividades do terreno;	
	e) Formas compostas. Elevações e depressões;	
	f) Nomenclatura das formas de terreno. Vales e dorsos.	
§ 30	— Representação do relevo orográfico	445
150	— Desenho plani e altimétrico de uma planta	445
	a) Planos cotados e seu emprego;	
	b) Curvas de nível e linhas de maior declive;	
	c) Tipos de curvas de nível e seu traçado:	
	1) Por interpolação numérica;	
	2) Por interpolação gráfica com diagrama de paralelas;	
	3) Por interpolação gráfica com diagrama reticulado;	
	d) Representação do relevo pelas declíneas; convenção das tintas e da luz;	
	e) Representação do relevo pelos planos relevo;	
	f) Construção e emprego das escalas de declividades.	

TERCEIRA PARTE — TAQUEOMETRIA

§ 31	— Taqueómetros estadimétricos	461
131	— a) Generalidades	461
	b) Princípio geral da estadimetria;	
	c) Distâncias horizontais. Constantes, estadimétrica e instrumental (Reichenbach);	

d) Distâncias em terreno inclinado;	
e) Diferenças de nível. Cotas;	
f) Gráficos: nomograma e diagrama estadimétrico;	
g) Determinação direta das constantes;	
h) Luneta analítica de J. Porro;	
i) Modo de operar no campo;	
j) Arco Beaman e seu emprego.	
132 — Erros nas medidas estadimétricas	474
a) Introdução;	
b) Lunetas de ângulo diastimométrico constante;	
c) Lunetas de ângulo diastimométrico variável;	
d) Principais causas de erro:	
1) Inexatidão das constantes;	
2) Leituras na estadia;	
3) Falta de verticalidade da estadia;	
4) Paralaxe dos fios;	
5) Circunstâncias atmosféricas;	
6) Variações no comprimento da estadia;	
e) Fórmula completa (exata) da redução ao horizonte;	
f) Redução das distâncias inclinadas ao horizonte:	
1) Com estadia horizontal;	
2) Com estadia inclinada;	
3) Vantagens e inconvenientes das estadias não verticais.	
133 — Diastimômetro de Sanguet	486
a) Princípio teórico;	
b) Descrição e uso;	
c) Verificação e retificação;	
d) Inconvenientes e vantagens.	
134 — Exemplo prático	487
Calcular as distâncias e cotas de pontos levantados com um taqueômetro estadimétrico.	
§ 32 — Taqueômetros auto-redutores	490
135 — Taqueômetro Sanguet	490
a) Determinação das distâncias pelos níveis de rampa;	
b) Descrição do aparelho;	
c) Relações diastimométricas;	
d) Diferenças de nível. Cotas.	
e) Retificações do taqueômetro Sanguet.	
136 — Taqueômetro Balu-Kern	499
137 — Taqueômetros universais (de contato)	499
Taqueômetro Kern de contato (12 cm).	
138 — Taqueômetros modernos	503
a) Taqueômetro Bosshardt-Zeiss "Redta".	
b) Prisma estadimétrico e Duplicador taquimétrico WILD.	
c) Taqueômetro D.K.R.-KERN.	
139 — Exemplo prático (com taqueômetro auto-redutor)	506
a) Página de caderneta;	
b) Distâncias horizontais;	
c) Diferenças de nível. Cotas.	

QUARTA PARTE — FOTOGRAMETRIA TERRESTRE

§ 33 — Introdução à Fotogrametria. Instrumental	515
140 — Definição. Aplicações	515
141 — Histórico. Generalidades	516
142 — Fototeodolitos antigos e modernos. Fotogrametros	527
a) Fototeodolito original LAUSSEDAT;	
b) Idem ZEISS (moderno);	
c) Idem SCHELL (antigo);	
d) Idem PAGANINI (antigo);	
e) Idem WILD (moderno);	
f) Fotogrametros em geral;	
g) Retificações de um fototeodolito.	
143 — Identificação de pontos em 2 fotografias pelo Método de Laussedat com o auxílio dos pontos Kern de G. Hauck	536
a) Teorema fundamental;	
b) Pontos Kern e seu emprego na identificação de pontos;	
c) Origem de gradação das escalas auxiliares e sua colocação;	
d) Aplicação teórico-prática.	
§ 34 — Estereofotogrametria	545
144 — Generalidades. Definição. Teoria	545
a) Generalidades;	
b) Definição;	
c) Coordenadas no caso de base normal.	
1) Cálculo das cotas;	
d) Coordenadas, no caso de base oblíqua;	
e) Caso de obliquidade, na prática.	
145 — Visão estereoscópica. Estereocomparador Pulfrich e estereoautó- grafo Orel	550
a) Microscópio estereoscópico;	
b) Estereocomparador PULFRICH;	
c) Uso do estereocomparador;	
d) Consideração final;	
e) Estereoautógrafo VON OREL-ZEISS.	
§ 35 — Aplicações práticas	557
146 — Da estereofotogrametria	557
a) Operações de campo;	
1) Distâncias (a trena);	
2) Distâncias e cotas taqueométricas;	
3) Nivelamento geométrico;	
4) Fototeodolito Laussedat;	
b) Operações de escritório:	
1) Cálculo de distâncias e cotas;	
2) Coordenadas fotogramétricas dos pontos.	
147 — Emprego dos pontos Kern (no exercício anterior)	565
a) Determinação dos pontos KERN;	
b) Utilização dos pontos KERN.	

148 — Emprego da Fotogrametria comum (Método de Laussedat)	566
a) Marcação dos pontos em planta;	
b) Cotas dos pontos.	

QUINTA PARTE — EXERCÍCIOS PRÁTICOS

§ 36 — Cálculos Topográficos	571
------------------------------------	-----

149 — Relações das fórmulas de trigonometria	571
1) Funções circulares;	
2) Medida dos ângulos;	
3) Radiano;	
4) Sinais nos quatro quadrantes;	
5) Funções dos ângulos simples;	
6) Valores limites e especiais;	
7) Correlação das funções;	
8) Ângulos duplo e metade;	
9) Potências do seno e co-seno;	
10) Funções de dois ângulos;	
11) Relações entre os ângulos do triângulo;	
12) Cálculo dos triângulos retângulos;	
13) Cálculo dos triângulos obliquângulos.	
150 — Exercícios práticos	576
I) Erros planimétrico e altimétrico:	
a) Erro planimétrico (ep);	
b) Erro altimétrico (ea);	
c) Tabela de curvatura e refração terrestre (de 1 a 40 km);	
d) Para valores menores do que 1 km.	
II) Conversão de medidas angulares:	
a) Conversão de grados em graus e vice-versa;	
b) Exercício sobre <i>radiano</i> .	
III) Sistema métrico decimal. Sistema antigo:	
a) Transformação do sistema agrário antigo, em sistema decimal;	
b) Transformação de sistema decimal em sistema antigo agrário.	
IV) Medida de alinhamentos:	
a) Processos diretos de medida em terreno inclinado, e reduções ao horizonte.	
V) Levantamento a bússola:	
a) Cálculo de azimutes, ângulos internos e rumos.	
VI) Problema de poligonação.	
a) Traçado de um alinhamento além de um obstáculo, com o auxílio de uma poligonal.	
VII) Problemas dos dois e três pontos:	
a) Cálculo da distância e orientação de um alinhamento inacessível (solução logarítmica);	
b) Cálculo das coordenadas de um ponto, obtido por intersecção (solução logarítmica);	
c) Problema de Pothénot: resolução analítica, por intersecção inversa.	

- VIII) Problemas sobre triangulação:
Cálculo das coordenadas de um ponto inacessível com medidas tomadas dos extremos de uma base (invisíveis entre si) e de um 3.º vértice auxiliar (solução logarítmica).
- IX) Problemas sobre cálculo de áreas:
a) Cálculo, por logaritmos, da área de uma poligonal, cujos vértices foram visados dos extremos de uma base;
b) Cálculo, por logaritmos, da área de uma poligonal, cujos vértices foram amarrados taqueometricamente de um ponto interior. Verificação trigonométrica;
c) Idem, idem, idem, de uma poligonal *muito irregular*;
d) Idem, idem, idem, de um ponto exterior à poligonal.
- X) Cálculo de áreas extrapoligonais:
a) Cálculo da área de uma propriedade rural, que tem uma das divisas limitadas por um arroio.
- XI) Planilha e detalhes explicativos sobre o cálculo pelo método analítico:
a) Cálculo das coordenadas dos vértices e área de uma poligonal fechada;
b) Detalhes práticos para a organização de uma planilha pelo método analítico;
c) Planta detalhada das coordenadas e área da poligonal calculada (a).
- XII) Divisão de terras. Método analítico:
a) Divisão de um terreno de forma poligonal em três quinhões. Soluções gráfica, trigonométrica e analítica (coordenadas).
- XIII) Divisão de terras. Soluções diversas. Quadriláteros e trapézios:
a) Cálculo trigonométrico da área (1.ª parte) de um quadrilátero, com a medida de três lados e dois ângulos;
b) Divisão do mesmo em 2 quinhões (2.ª parte) por uma paralela a um dos lados;
c) Cálculo das áreas e divisória pela fórmula de Gauss;
d) Cálculo dos elementos de um trapézio em função das medidas tomadas na base maior (área conhecida);
e) Divisão da área de um trapézio em dois quinhões, por uma paralela às bases;
f) Verificação do paralelismo das bases de um trapézio, em função das coordenadas dos vértices.
g) Dividir a área de um trapézio, em dois outros proporcionais aos n.º m e n por uma divisória paralela às bases.
- XIV) Nivelamento geométrico. Cotas compensadas:
a) Cálculo das cotas dos vértices de uma poligonal (Niv. longitudinal composto).
- XV) Nivelamento trigonométrico. Erros:
a) Cálculo da distância e cota de um ponto, afastado, nivelado a teodolito de três vértices de uma poligonal;
b) Erros no nivelamento trigonométrico.
- XVI) Nivelamento barométrico com aneróides:
a) Cálculo das altitudes de diversos pontos ao longo de uma estrada íngreme, com o auxílio da Tabela de JORDAN e fórmula de Laplace.

- XVII) Cálculo de distâncias e cotas com um taqueômetro estadimétrico:
 - a) Distâncias e cotas de três pontos de detalhe.
- XVIII) Cálculo de distâncias e cotas com um taqueômetro auto-redutor:
 - a) Distâncias e cotas de três pontos de detalhe.
- XIX) Determinação do azimute verdadeiro (mediana):
 - a) Cálculo da meridiana e declinação magnética por observações do Sol.
- XX) Diversos:
 - Cálculo da distância entre dois pontos afastados da superfície terrestre, em função de suas coordenadas astronômicas.

CURSO DE TOPOGRAFIA

Primeira Parte – TOPOMETRIA

CAPÍTULO I

PARTE GERAL

GENERALIDADES

§ 1 – Conceitos fundamentais

1 – Objeto da Topografia. Definição

A *Topografia* tem por finalidade determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre.

Nestas condições, pode-se, sempre, figurar em um plano a imagem da região considerada, o que equivale a projetar sobre um plano, que se supõe horizontal, não só os limites da superfície a representar como todas as particularidades notáveis, naturais ou artificiais, do terreno.

Assim, a Topografia é uma ciência aplicada, baseada na Geometria e na Trigonometria, de âmbito restrito, pois é um capítulo da Geodésia, que tem por objeto o estudo da forma e dimensões da Terra.

A *Topografia* se incumbem da representação, por uma *projeção ortogonal cotada*, de todos os detalhes da configuração do solo, mesmo que se trate de detalhes artificiais: canais, estradas, cidades e vilas, construções isoladas, etc.

Esta projeção se faz sobre uma *superfície de nível*, isto é, sobre uma superfície definida pela propriedade de ser, em cada um de seus pontos, normal à direção da gravidade: as projetantes dos diversos pontos a representar são pois as verticais desses pontos.

A esta projeção ou imagem figurada de terreno dá-se o nome de planta ou *plano topográfico*.

Ao conjunto dos métodos empregados para colher os dados necessários para o traçado da planta dá-se o nome de *Topometria*, que se subdivide em *planimetria* e *altimetria* ou *nivelamento*.

A *planimetria* é a representação em projeção horizontal dos detalhes existentes na superfície; a *altimetria* determina as cotas ou distâncias verticais de um certo número de pontos referidos ao plano horizontal de projeção.

A altimetria permite fixar, por meio de cotas ou quaisquer sinais convencionais, o relevo do terreno, isto é, a expressão exata de sua forma.

2 — Distinção entre a Topografia e a Geodésia

A *Geodésia*, com o auxílio da *Geografia Matemática*, se ocupa dos processos de medida e especificação para o levantamento e representação cartográfica de uma grande extensão da superfície terrestre de um Estado ou de um país, projetada numa *superfície de referência*, geométrica e analiticamente definida por parâmetros, variáveis em número, de acordo com a consideração sobre a forma da Terra.

No desenvolvimento do estudo da Geodésia, se considera a superfície em referência como o elipsóide de revolução com parâmetros a e b , numericamente determinados.

A *Geodésia*, que determina com precisão as malhas triangulares justapostas à superfície do elipsóide de revolução terrestre determinando as coordenadas de seus vértices, é uma ciência que abrange o todo, ao passo que a *Topografia* se ocupa do detalhe de cada malha ou quadrícula e, admitindo-a plana, adota processos da Geometria e Trigonometria planas, com ligação às coordenadas de referência determinadas, como dissemos, geodésicamente.

Não resta dúvida que elas se completam para a harmonia do conjunto, do qual resultam as cartas geográficas ou topográficas.

3 — Sumário histórico da evolução da Topografia

A *Topografia*, cujo significado etimológico da palavra é “descrição do lugar”, estuda os instrumentos, métodos de operação no terreno, cálculos e desenhos necessários ao *levantamento* e representação gráfica mais ou menos detalhada de uma parte da superfície terrestre.

Os egípcios, os gregos, os árabes e os romanos nos legaram instrumentos e processos que, embora primitivos, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades rurais, com finalidades cadastrais; na *História da Topografia*, de Laussedat, são mencionadas plantas e cartas militares e geográficas bem interessantes, organizadas nos primórdios da Topografia, ou, melhor, da chamada Geometria aplicada.

Mas somente nos últimos séculos, a Topografia teve uma orientação orgânica, passando do empirismo às bases de uma autêntica ciência, graças ao desenvolvimento notável que tiveram especialmente a Matemática e a Física.

A Carta de França, publicada no início do século XIX pela Academia Francesa e compilada pelo cartógrafo italiano Cassini, é o primeiro trabalho executado com técnica e estilo próprios.

Os aperfeiçoamentos da mecânica de precisão introduzidos nos instrumentos topográficos, devidos principalmente aos geniais estudos do engenheiro suíço Henrique Wild, do geodesta italiano Ignazio Porro, de Carl Zeiss, Pulfrich, Orel, da importante Casa Zeiss, e tantos outros, contribuíram eficientemente para o progresso crescente da aplicação dos métodos desenvolvidos pela Topografia, principalmente no extraordinário aperfeiçoamento da fotogrametria terrestre e aérea, esta última dominando hoje em dia a maioria dos grandes levantamentos topográficos, pela exatidão, presteza e custo mais reduzido dos trabalhos.

Os progressos realizados na parte óptica dos instrumentos, devidos a Kepler (1600), Porro, Zeiss, Wild e outros; na medida direta das distâncias, devidas a Porro, Bessel, Jäderin; na leitura de ângulos, devidas a Vernier e P. Nonius, Bauerfeind, Zeiss, Wild; nos levantamentos topográficos devidos a Pothénot, Snellius, Hansen; na avaliação mecânica das áreas, devidas aos aparelhos Amssler, Coradi, Galileo e outros, deram à Topografia o valor que realmente tem como ciência e como técnica no levantamento topométrico preciso do terreno e na representação gráfica equivalente, servindo como apoio de qualquer trabalho de Engenharia e Agrimensura.

A Geografia e a Geodésia estão intimamente ligadas à Topografia, utilizando as primeiras observações astronômicas dos pontos de suas cartas, enquanto que os levantamentos geodésicos exigem processos rigorosos nas medidas, só possíveis com o emprego de grande precisão, como um *alta azimutal* de precisão, no passado, ou um Wild T3, um Zeiss II ou outros no presente, menores, mais leves, mais precisos e mais cômodos de aplicação.

4 – Importância da Topografia para o engenheiro

Ao se projetar qualquer obra de Engenharia, Arquitetura ou Agronomia, se impõe o prévio levantamento topográfico do lugar onde a mesma deverá ser implantada; daí a importância da Topografia, que se incumbe do *levantamento* ou *medição*, que deverá ser precisa e adaptada ao terreno.

Fazer um levantamento é proceder a todas as operações necessárias para alcançar os objetivos da Topografia, isto é, a medição de ângulos e distâncias e a execução dos cálculos e desenhos indispensáveis para representar, fielmente, no papel, os elementos colhidos no terreno.

Todo o levantamento topográfico comporta duas operações:

a) uma puramente geométrica, que consiste na determinação de pontos, de maneira a realizar a ossatura do levantamento: é o que se chama o levantamento do "canevas";

b) outra de caráter nitidamente artístico, que consiste em representar por convenções todos os detalhes do terreno; tais como divisas, ma-

tos, rios, estradas, povoações, etc., assim como sua conformação altimétrica por curvas de nível ou similares. Para esta segunda operação, há necessidade da execução de um *desenho de imitação*, que exige bons croquis de campo e qualidades pessoais dos operadores, ao considerar o conjunto dos detalhes do terreno.

Ora, a superfície do terreno não é uma superfície qualquer, pois obedece a leis que a experiência e a teoria se incumbem de demonstrar; daí se conclui que o topógrafo, que tem muita responsabilidade em qualquer levantamento, por mais simples que seja, deve operar, fazendo todas as verificações possíveis e necessárias e desenhando com justeza, para evitar qualquer erro de apreciação.

Laboram em erro aqueles que julgam a Topografia uma simples aplicação da Geometria, pois cada vez mais se alarga seu campo de ação e cresce a exigência em precisão e perfeição dos trabalhos que lhe estão afetos no campo da prática profissional, principalmente da Engenharia.

5 — Divisões da Topografia

Definido o campo que limita as operações topográficas de campo em extensão, pode-se subdividir a Topografia em quatro partes principais: a *topometria*, abrangendo a *planimetria* e a *altimetria*, a *topologia*, a *taqueometria* e a *fotogrametria*.

Os processos de medida são estudados sob o título genérico de *topometria* e se baseiam na *Geometria aplicada*.

Os elementos geométricos são obtidos utilizando-se aparelhos de medida, lineares e angulares.

A *topometria* divide-se em *planimetria* e *altimetria*. Na *planimetria* as medidas, tanto lineares como angulares, são efetuadas em planos horizontais, obtendo-se ângulos azimutais e distâncias horizontais; na *altimetria* as medidas são efetuadas na vertical ou num plano vertical, obtendo-se as distâncias verticais ou diferenças de nível e ângulos zenitais.

O *levantamento topográfico* é *planimétrico* quando as projeções dos contornos e pontos medidos são representados sobre um plano básico horizontal de referência, e *altimétrico*, quando são medidas as alturas desses pontos com relação a um plano de referência de nível. Para levantamento planimétrico são empregados principalmente os *teodolitos*, que são *goniômetros* com círculos horizontais e verticais graduados.

O *levantamento* pode ser ainda *rápido* ou *expedito*, comum ou *topográfico* propriamente dito, e de *precisão*, cada qual exigindo instrumental e métodos adequados de operação no terreno.

O *desenho topográfico* constitui a representação em escala reduzida, por meio de sinais convencionais, ditos *convenções topográficas*, da forma do terreno levantado.

Segundo a escala, grau de precisão, detalhes e amplitude, tal desenho denomina-se esboço, planta ou mapa topográfico, carta geodésica, geográfica ou corográfica.

As plantas topográficas devem ser sempre acompanhadas das cadernetas de campo, planilhas dos cálculos e memórias descritivas, destinadas a quaisquer verificações e detalhes complementares, bem como a indicação de todos os trabalhos realizados durante a medição ou levantamento.

A *topologia*, complemento indispensável da topometria, tem por objeto o estudo das formas exteriores da superfície terrestre e das leis a que deve obedecer seu modelado. Sua aplicação principal é na representação cartográfica do terreno pelas *curvas de nível*, que são as interseções obtidas por planos equidistantes paralelos com o terreno a representar.

Na interpretação das referidas curvas, obtidas diretamente ou por interpolação, podem-se verificar as correções na implantação de pontos, quando erradamente assinalados na planta. Assim a altimetria pode ser representada corretamente, servindo-se dos postulados da Topologia.

A *taqueometria* tem por finalidade o levantamento de pontos do terreno, pela resolução de triângulos retângulos aptos a representá-los, tanto plani como altimetricamente, ou, em outras palavras, dando origem a plantas cotadas ou com curvas de nível, ditas *plani-altimétricas*.

Sua aplicação principal é em zonas fortemente acidentadas, em morros e montanhas, onde oferece reais vantagens sobre os métodos topométricos, pois o levantamento dos pontos é feito com rapidez, maior exatidão e economia.

As posições destes pontos são determinadas por coordenadas retangulares x , y e z , com as quais os mesmos permanecem individualizados no espaço.

Os aparelhos empregados para esses levantamentos plani-altimétricos são os *taqueômetros* (*tachis*, rápido, e *metron*, medida), que podem ser, principalmente, *normais* ou *estadimétricos* e *redutores* ou *auto-redutores*.

Ignazio Porro, em 1823, foi o precursor desse importante processo de medida das distâncias horizontais e verticais, e ao qual denominou de "celerimensura" com as fórmulas *celerimétricas* de avaliação das coordenadas X , Y e Z .

A *fotogrametria*, levantamento *fototopográfico*, parte importante da Topografia, relegada no passado a um plano secundário, e considerada como apêndice desta, é hoje justamente classificada em primeiro plano,

tornando-se o método principal para determinar o relevo do terreno, principalmente de grandes extensões.

Nos grandes levantamentos, e até mesmo nos menores, não se empregam tanto os *taqueômetros* e as réguas ou *miras* graduadas, chamadas *estádias*, mas sim as câmaras fotográficas, isto é, os *fotógrâmetros* ou *fototeodolitos* e o *restituidor* fotogramétrico.

A Topografia continua, entretanto, a ser auxiliar indispensável da fotogrametria, pois que serve, por um lado, para estabelecer a ossatura geométrica do relevo, e por outro, para auxiliar em medidas complementares no terreno de detalhes encobertos ou tornados invisíveis pela vegetação.

As enormes dificuldades apresentadas nos relevos topográficos de montanhas elevadas são vencidas pela Fotogrametria, tanto assim que está sendo empregada em larga escala por todos os serviços cartográficos do mundo.

A fotogrametria pode ser *terrestre* ou *aérea*, chamada *Aerofotogrametria*. Esta última, com aparelhagem moderníssima e cada vez mais aperfeiçoada, tem o seu raio de ação ampliado dia a dia, e não há mais obra pública ou privada de importância que não a utilize para base de seus problemas e projetos.

Em nosso curso, que não é especializado, mas que procura atender aos reclamos da técnica que progride sem cessar em todos os campos da atividade humana, procuraremos esclarecer os princípios fundamentais e básicos da Fotogrametria, na *Parte aplicada* deste Curso.

Em cursos de extensão universitária e num futuro *Instituto de Fotogrametria* que se criará, ainda, em nosso vasto País, bem como na literatura técnica sobre o assunto, que é bem vasta, encontrarão os interessados a fonte para tão útil aperfeiçoamento técnico e científico em Fotogrametria.

6 — Agrimensura

A medida das superfícies agrárias foi a primeira tarefa de que se incumbiu a Topografia desde a antiguidade, razão por que a mesma era chamada *agrimensura*.

Hoje, entretanto, este vocábulo indica a parte da Topografia que trata da medida e da representação planimétrica de superfícies, bem como sua divisão em parcelas, de acordo com condições preestabelecidas.

Sabemos que a planimetria de uma fração ou extensão de terreno representa, em uma dada escala, não a superfície efetiva, isto é, a que leva em conta todas as ondulações do terreno, mas sua projeção sobre o plano de referência horizontal. Ora, não é de crer que sob o ponto

de vista agrário seja a superfície efetiva a que interessa. De fato, as culturas de árvores como as plantações, crescendo no sentido vertical, são de certo modo proporcionais ao desenvolvimento horizontal do terreno. Além disso, a superfície efetiva do terreno, quer por vontade do homem, quer por efeito dos fenômenos endógenos e exógenos terrestres, pode mudar continuamente de forma, enquanto a projeção horizontal não muda.

Assim, os métodos de projeção, adotados na *Agrimensura* ou na *Divisão e Partilha* de terras são os mesmos adotados nas outras partes da Topografia.

§ 2 — Erros devidos à forma e dimensões da Terra. Coordenadas

7 — Influência da forma e dimensões da Terra nos levantamentos topográficos

A superfície física do nosso planeta é muito irregular, constituída de grandes elevações e depressões; estas alterações são no entanto bem pequenas comparadas com as dimensões da Terra; de fato, a maior elevação em *Glaisker* sobre o *Everest*, com $\sim 8\,838$ metros acima do nível do mar, é pouco maior do que o milésimo do raio terrestre. A profundidade máxima do oceano é de $\sim 9\,425$ m.

Quando se fala de forma da Terra, entende-se uma superfície regular que segue medianamente o andamento do relevo que aflora o nível do mar e passa debaixo das montanhas; a escolha desta superfície se faz de acordo com o critério que apontamos.

Em cada ponto da Terra existe uma direção característica, fisicamente bem definida, e assinalada com qualquer instrumento simples a direção da *vertical*.

Se se prende um fio, tendo num extremo um pequeno peso (fio a prumo), a direção dada pelo mesmo é a da vertical do lugar.

Isto acontece porque sobre a massa age uma força determinada pela ação concomitante da atração exercida pela massa da Terra e da força centrífuga devida à rotação da mesma em torno do próprio eixo.

A vertical tem uma importância fundamental em Topografia, porque a essa vertical se faz constante referência nas medidas e nos métodos de representação.

Por forma da Terra se entende aquela superfície que, partindo de um ponto do nível médio do mar, se mantém constantemente normal a um sistema de linhas verticais conduzidas pelos pontos da superfície física terrestre.

Esta superfície se chama *geóide* e é de difícil determinação teórica, devido às ondulações geoidicas; entretanto, seu conhecimento seria

extremamente importante, porque constitui a superfície de referência das medidas topográficas.

Para esclarecer este conceito é interessante dizer como vem representado o terreno em Topografia. Suponhamos (Fig. 1) traçado o geóide:

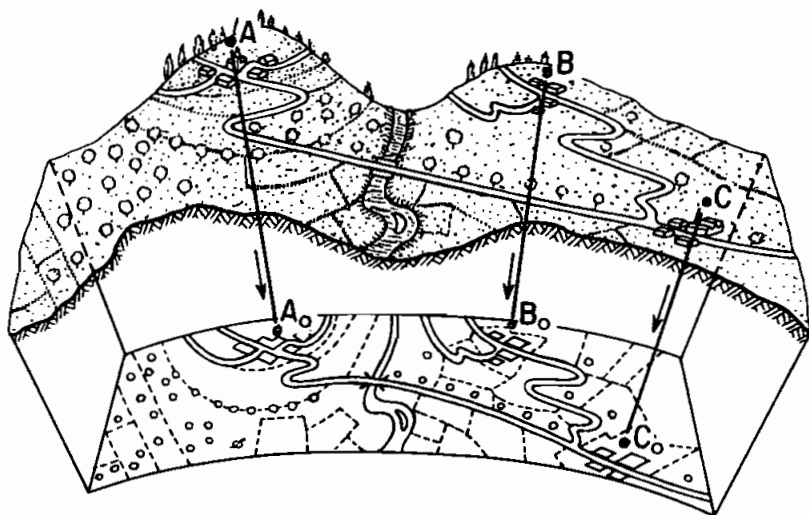


FIG. 1

cada ponto da superfície física, A , B e C , é projetado verticalmente sobre o geóide, em A_0 , B_0 e C_0 ; o conjunto de todos os pontos constitui a representação *planimétrica* do terreno.

Para conhecer a posição efetiva dos pontos A , B , C , etc. basta pois determinar e representar convenientemente, com números ou com curvas de nível, os comprimentos dos segmentos A_0A , B_0B , C_0C , etc., ou seja as altitudes dos próprios pontos.

Pelas dificuldades em determinar a verdadeira forma do geóide, recorre-se a superfícies aproximadas e mais simples.

Mas, felizmente, as muitas determinações feitas em diversos lugares do globo mostraram que o geóide se confunde muito sensivelmente com um elipsóide de revolução, tendo o eixo menor coincidente com a linha dos pólos.

As superfícies de equilíbrio relativas aos níveis médios dos mares em vários pontos do globo, embora não coincidindo exatamente, apresentam divergências tão pequenas que podem ser desprezadas, como foi verificado por ocasião dos cortes dos Istmos de Suez, de Corinto e de Panamá.

A diferença entre o geóide e o elipsóide em um dado ponto, ou em outras palavras, o afastamento angular entre as duas superfícies, é determinada em função do *desvio da vertical*, entre as normais às superfícies do geóide e do elipsóide (Fig. 2).

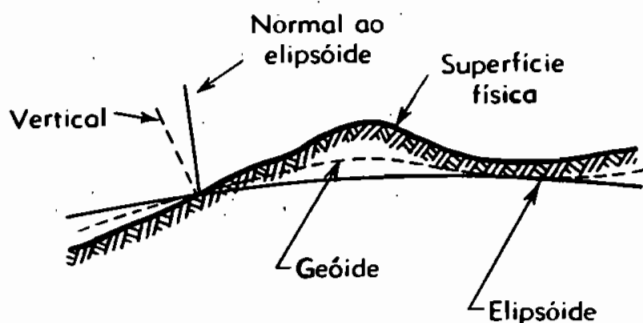


FIG. 2

O desvio será máximo nos pontos onde as duas superfícies se interceptam. Tal desvio se torna sensível quando a normal à superfície do geóide for determinada por observações astronômicas ou gravimétricas, com pêndulos ou balanças de torção de Eötvös.

Os planos contendo o eixo do elipsóide determinam sobre sua superfície seções elípticas, chamadas *meridianos*.

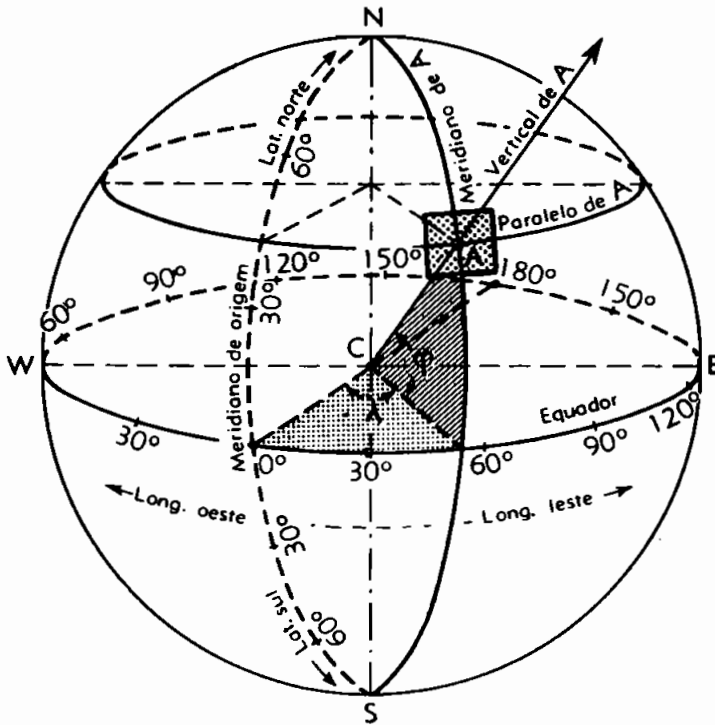
Os planos perpendiculares ao eixo determinam seções circulares, ditas *paralelos*, que variam desde o máximo no equador, a zero nos pólos.

Fixado como 1.º meridiano ou *meridiano de origem*, o que passa por um determinado ponto (*Observatório de Greenwich*, na Inglaterra, para as medidas internacionais, e *Observatório Nacional do Rio de Janeiro*, para as determinações brasileiras) e supondo dividido em graus o círculo do equador, ou um qualquer dos paralelos, a partir do 1.º meridiano (180° , à direita, positivos e 180° , à esquerda, negativos), o ângulo diedro formado pelo plano do meridiano de origem e o meridiano passando por um ponto *A* (Fig. 3) constitui a *longitude* (λ) de *A*:

O ângulo que a vertical no ponto *A* forma com o plano do equador é a *latitude* (φ) do ponto. Esta é contada de 0° a 90° positivamente do equador ao Pólo Norte, e negativamente do equador ao Pólo Sul.

A latitude e a longitude se chamam coordenadas geográficas.

Bessel efetuou, em 1841, uma clássica determinação das dimensões do elipsóide terrestre, apoiando-a na medida de dez arcos de meridiano com um comprimento total superior à sexta parte do desenvolvimento



Elipsóide terrestre

FIG. 3

do meridiano, e deduziu as seguintes constantes da elipse meridiana, que damos no quadro abaixo, juntamente com os valores obtidos por CLARKE em 1858, HELMERT em 1907 e HAYFORD em 1909:

OPERADOR	Semi-eixo maior (a)	Semi-eixo menor (b)	Achatamento: $\alpha = \frac{a - b}{a}$	Excentricidade: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ($e^2 = \sim 2\alpha$)
BESSEL (1841)	6 377 397,16m	6 356 078,96m	1/299,15	0,081 696
CLARKE (1858)	6 378 249,17m	6 356 514,99m	1/292,46	0,082 499 1
HELMERT (1907)	6 378 200,00m	6 356 818,17m	1/292,30	0,081 812 0
HAYFORD (1909)*	6 378 388m	6 356 912m	1/297	0,081 999 4

*Massa terrestre: 5 974. 10^{21} kg; densidade média 5,516 kg/dm³.

A seção de Geodésia da União Geodésica e Geofísica Internacional, na assembléia geral realizada em Madrid, em 1924, resolveu recomendar o emprego do *elipsóide internacional* da Terra, cujos parâmetros são o *raio equatorial* e o *achatamento* determinados por HAYFORD em 1909 e contidos no quadro anterior.

O elipsóide assim definido deve ser empregado, de preferência a qualquer outro, nas triangulações a refazer e, principalmente, nas que estiverem apenas iniciadas e nas de execução futura.

Convém notar que o achatamento de Hayford já tinha sido adotado pelos astrônomos, desde 1911, por decisão da Conferência Internacional das Efemérides Astronômicas, reunida em Paris, nesse ano.

Além dos valores já dados, referentes às determinações de Hayford, daremos a seguir mais os seguintes:

Quarta parte do meridiano	10 002 288 m ³
Comprimento médio do arco de um grau (1°) do meridiano	111 136 m ⁶
Circunferência equatorial	40 076 593 m ⁵
Superfície, em quilômetros quadrados	510 100 934 km ²
Volume em quilômetros cúbicos	1 083 319 780 × 10 ³ km ³
Raio da esfera, de mesma superfície	6 371 227 m ⁷
Raio da esfera, que tem o mesmo meridiano do que a Terra	6 367 654 m
Raio médio $\left(\frac{2a+b}{3}\right)$	6 371 229 m ³

Se considerarmos uma elipse meridiana da Terra (Fig. 4) $ABA'B'$ e a normal PM em um ponto P , limitado pelo eixo y , teremos (*pelas fórmulas deduzidas em Geodésia*), chamando de e a excentricidade, N a *grande normal* = PM , ρ o raio de curvatura em P e $\varphi = \widehat{AIP}$ a *latitude* do ponto P : $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ (1); $W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$ (2);

$$N = \frac{a}{w} \quad (3); \quad \rho = N^3 \times \frac{1 - e^2}{a^2} \quad (4)$$

Os comprimentos ρ e N são os valores dos raios de curvatura principais do elipsóide no ponto P . Chama-se esfera de curvatura média neste ponto a esfera tangente em P ao elipsóide, cujo raio R é dado por:

$$R = \sqrt{\rho N} \quad (5)$$

Para a latitude de 30 graus, isto é, para a latitude média de Porto Alegre, estas fórmulas darão (com as constantes de Hayford)

$$\begin{aligned}\varphi &= 30^\circ - \text{sul (Porto Alegre)} \\ P &= 6\,349\,620 \text{ m} = \sim 6\,350 \text{ km} \\ N &= 6\,384\,760 \text{ m} = \sim 6\,385 \text{ km} \\ R &= 6\,367\,166 \text{ m} = \sim 6\,367 \text{ km}\end{aligned}$$

Para a latitude de 15°, isto é, para a latitude média de Brasília, capital federal do Brasil, no Planalto Central de Goiás:

$$\begin{aligned}\varphi &= 15^\circ - \text{sul (Brasília)} \\ P &= 6\,339\,838 \text{ m} = \sim 6\,340 \text{ km} \\ N &= 6\,379\,853 \text{ m} = \sim 6\,380 \text{ km} \\ R &= 6\,359\,824 \text{ m} = \sim 6\,360 \text{ km}\end{aligned}$$

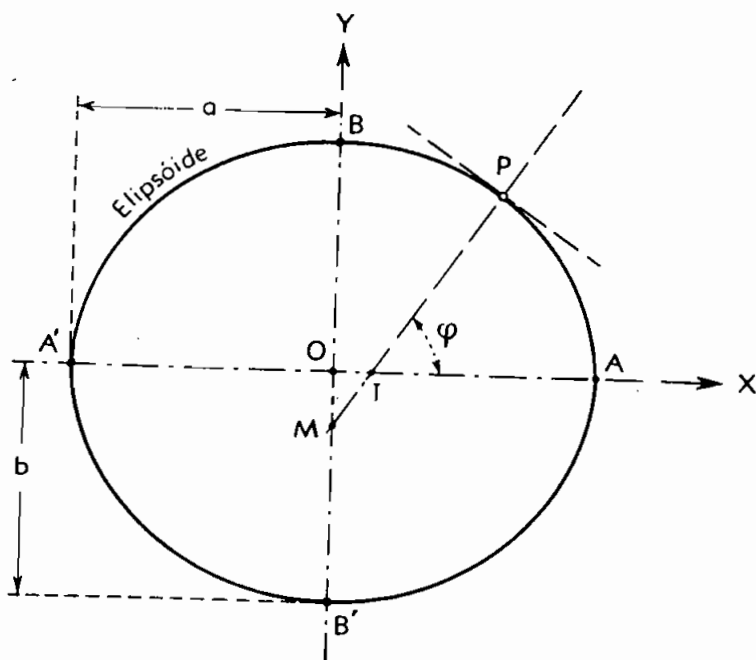


FIG. 4

Se fizermos passar pelo ponto P (Fig. 4) a esfera de curvatura média, cujo raio R , contando segundo a normal ao elipsóide, é tam-

bém igual à média geométrica do raio de curvatura P e da grande normal N , obteremos:

$$R = \frac{\rho + N}{2} = \frac{6340 + 6380}{2} = 6360 \text{ km}$$

Para os cálculos topográficos podemos usar o valor médio aproximado

$$R = 6\,370 \text{ km}$$

A Geodésia, que leva em conta a esfericidade da Terra, cobre o país de uma rede de triângulos de aproximadamente 40 km de lado, cujos vértices constituem os *pontos geodésicos de 1.^a ordem*; no interior dessa rede, se estabelece uma rede de pontos geodésicos de 2.^a ordem, com triângulos de aproximadamente 15 km de lado e dentro dessa, outra rede de 3.^a ordem, com triângulos de 5 a 6 km, de lado, já considerada triangulação topográfica e que pode ser resolvida sem as correções devidas à esfericidade terrestre.

Os pontos geodésicos de todas as ordens são hoje determinados no terreno com uma precisão relativa, variável de 10 a 30 cm.

8 — Coordenadas astronômicas e terrestres

a) *Esfera celeste*. A esfera celeste é uma esfera imaginária onde aparecem projetados os astros, tem um raio imensamente grande e seu centro confunde-se com o lugar da observação.

O eixo da Terra prolongado indefinidamente é chamado de *eixo da esfera celeste*; intercepta a esfera em dois pontos chamados *Pólo Norte (PN)* e *Pólo Sul (PS)* celestes (Fig. 5).

Todos os grandes círculos da esfera celeste que passam por aquele eixo são chamados *círculos horários*.

O círculo em que o plano do equador intercepta a esfera celeste é chamado *equador celeste*. O ponto do equador em que o Sol, em seu movimento sobre a esfera celeste, cruza em 21 de março, passando do Hemisfério Sul para o Norte, é chamado *ponto áries* ou *vernal* (γ).

O ponto z onde a vertical do lugar (do observador) intercepta o meridiano celeste é *zênite*.

O ponto z' , diametralmente oposto ao zênite, é o *nadir*.

Os pontos N , S , E e W da esfera celeste são os *pontos cardeais*, onde as linhas *norte-sul* e *leste-oeste* a interceptam.

Os menores círculos da esfera celeste, cujos planos são paralelos ao do equador, são os *paralelos celestes*.

O *círculo vertical* ou de *altura* de um astro M é o círculo máximo da esfera celeste que passa por esse astro e que contém a vertical do lugar; na figura, ZMm é o círculo vertical; assim, todos os círculos

máximos da esfera celeste, que contenham a vertical zz' são círculos verticais.

Chama-se de *primeiro vertical* ao círculo vertical da esfera celeste que passa pelos pontos E e W , ou que contém a linha este-oeste; na figura, $ZEZ'W$ é o primeiro vertical.

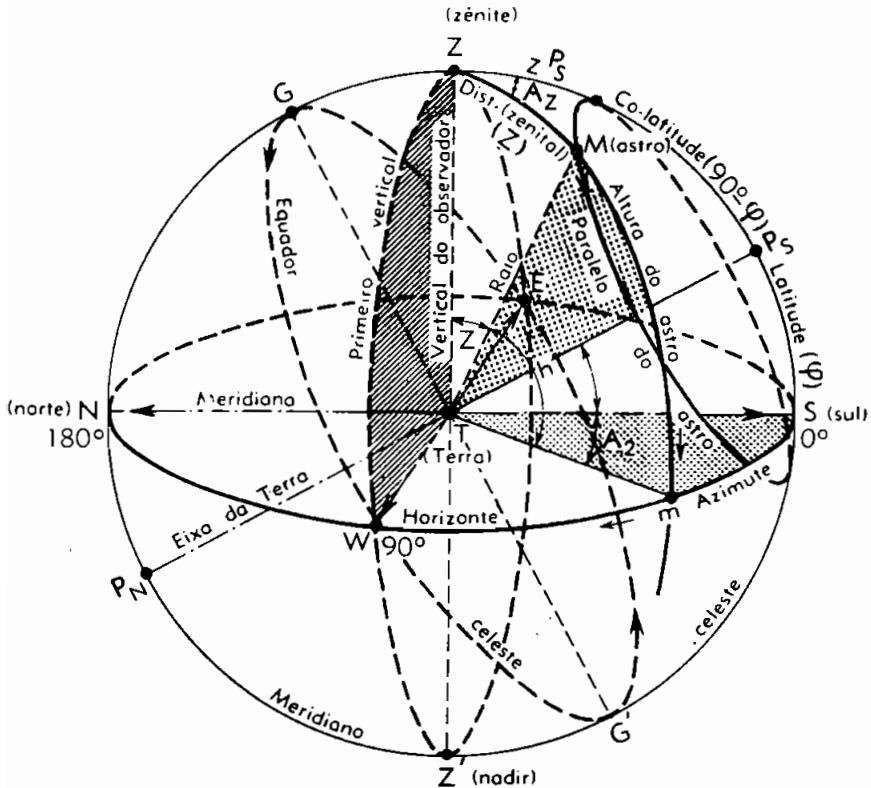


FIG. 5

b) *Coordenadas astronômicas* – 1.º sistema. Com as definições dadas, podemos dar já o primeiro sistema de *coordenadas astronômicas*, chamado *horizontal local*; tem como referências o horizontal local do observador e o zênite do lugar; são elas as seguintes:

1.ª) ZM – *distância zenital* em graus (z), do zênite ao astro observado, ou *altura* Mm (h), do astro ao horizonte, complementar de z , pois

$$h = 90^\circ - z;$$

2.^a) Sm — *azimute* (A_z), ângulo compreendido pelo meridiano e círculo vertical do astro, e contado a partir do extremo sul da meridiana, no sentido *SWNE*.

Ambas essas coordenadas, que definem e localizam a posição momentânea de um astro, são *variáveis* com a posição do astro; a contagem do azimute, feita a partir de *S*, pode ser de 0° a 360° ou de 0° a 180° nos dois sentidos.

A altura do pólo elevado (SP_s) é igual à latitude do lugar (GZ) como facilmente se depreende da Fig. 6.

Para o observador terrestre, o centro da esfera celeste coincide com o centro T da Terra, porque esta se reduz a um ponto material, diante da ordem de grandeza do raio infinito da esfera celeste.

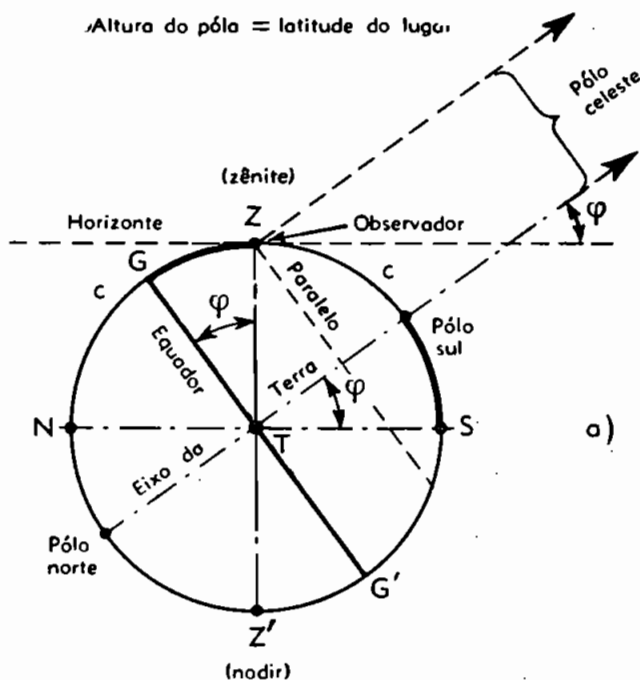


FIG. 6

c) *Coordenadas astronômicas — 2.^o sistema.* O 2.^o sistema de coordenadas, chamado das *coordenadas equatoriais horárias* dos astros, tem como referência os pólos celestes, P_s e P_n , e o meridiano celeste do observador.

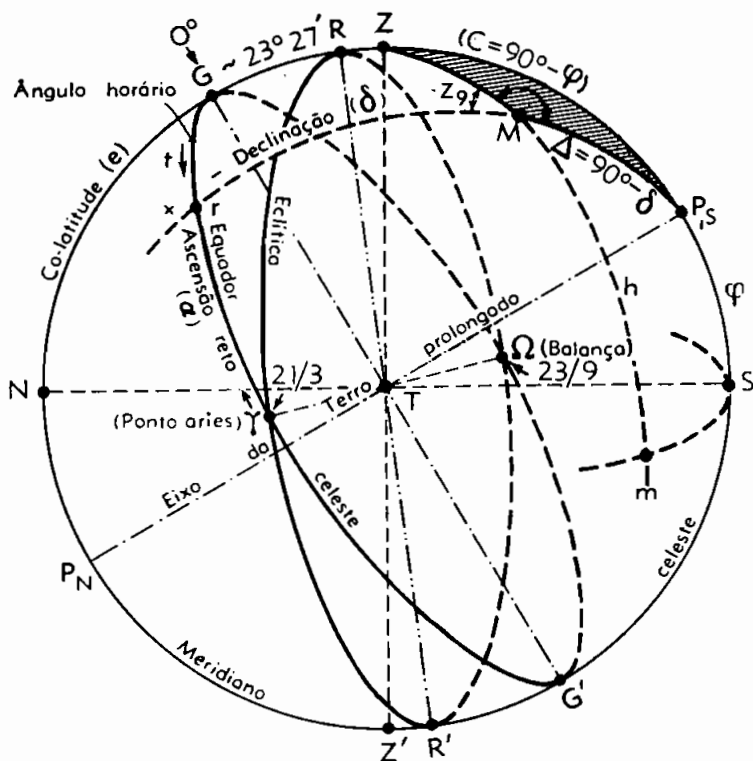


FIG. 7

O ponto T (Fig. 7) é a posição da Terra, como centro da esfera celeste; a linha $P_n P_s$ é o eixo da esfera celeste coincidente com o eixo da Terra prolongado, sendo P_s o Pólo Sul; GG' é o equador celeste; RR' , a eclíptica, que é a órbita elíptica percorrida pelo Sol de 21 de março a 23 de setembro no Hemisfério Norte e de 23 de setembro a 21 de março no Hemisfério Sul, e inclinada de um ângulo quase invariável de $23^{\circ}27'3''$ (apr.). Com relação ao equador celeste (denominado obliquidade da eclíptica), M sendo o astro, $P_s M_n$ é o círculo horário do mesmo. A velocidade é uniforme e constante para todos os astros. γn é a ascensão reta (α) do astro, que é o arco do equador medido a partir do ponto áries (γ) para leste até o círculo horário, que passa pelo astro.

A distância Mn é a declinação (δ) do astro, contada no círculo horário, do equador ao astro; é positiva quando está ao norte do equador e negativa ao sul; a declinação é constante para as estrelas e variável para o Sol.

Assim, as coordenadas astronômicas do 2.º sistema são:

1.ª) Mn , declinação (δ), distância angular do paralelo do astro ao equador, de sinal negativo para o Hemisfério Sul e positivo para o Hemisfério Norte;

2.ª) Gn , ângulo horário (t), contado no equador de 0° a 360° ou de 0^h a 24^h , positivamente do meridiano para oeste (W); varia uniformemente com o movimento do astro.

Os valores da declinação são obtidos das *efemérides astronômicas*, tais como o *Anuário do Observatório Nacional*, *Connaissance de Temps*, *Nautical Ephemeris*, etc.; chama-se de efeméride astronômica à coletânea de valores horários, diários ou decadais, das coordenadas dos astros, que podem ser observados de dia (Sol) ou à noite (estrelas), organizados nos observatórios astronômicos e publicados, pelo menos com um ano de antecedência, para uso de astrônomos, geodestas e topógrafos.

c) *Coordenadas astronômicas — 3.º sistema.* As coordenadas de 3.º sistema, chamadas *equatoriais uranográficas*, são: 1.ª a declinação (δ) do 2.º sistema, constante; 2.ª) γn ascensão reta (α), contada no equador, do ponto γ até o círculo horário do astro, também constante, e contada no sentido direto de 0° a 360° .

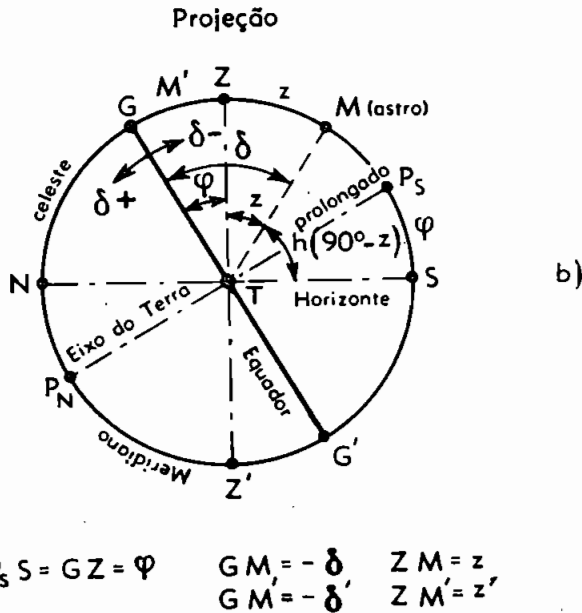


FIG. 8

d) *Determinação da latitude.* Para o Hemisfério Sul, a determinação da latitude φ , em função de observações da *culminação* (maior altura h ou menor distância zenital z) de um astro na sua passagem meridiana é feita com o auxílio das seguintes relações (Fig. 8):

1.º) Culminação do astro M ao sul do zênite:

$$\varphi = \delta - z \quad \text{ou} \quad -\varphi = (-\delta) + Z \quad (6)$$

2.º) Culminação do astro M' ao norte do zênite:

$$\varphi = \delta' + z \quad \text{ou} \quad -\varphi = (-\delta') - Z \quad (7)$$

e) *Triângulo de posição.* O triângulo de posição, ZP_sM , formado pelo *zênite-pólo-astro*, é fundamental em Astronomia de posição, pois com o auxílio das fórmulas da Trigonometria esférica, conhecidos alguns elementos, são determinados outros.

Na Fig. 7, o triângulo ZP_sM é constituído por:

1) *Distâncias angulares:*

Zm — distância zenital (z)

MP_s — distância polar ($\Delta = 90^\circ - \delta$)

ZP_s — co-latitude ($C = 90^\circ - \varphi$)

2) *Ângulos:*

MZP_s — azimute (Az)

ZP_sM — ângulo horário (t)

$ZMP_s = 180^\circ - \text{ângulo paraláctico } (q)$

f) *Coordenadas terrestres.* Já dissemos que o elipsóide terrestre difere pouco de uma esfera; esta observação conduz a uma notável simplificação nos cálculos topográficos, porque permite escolher como superfície de referência uma esfera, em lugar do próprio elipsóide.

De fato, se se considera um ponto desta superfície e se traça pelo mesmo uma esfera tangente de raio conveniente, esta se afastará pouquíssimo do elipsóide, numa longa faixa na qual as duas superfícies parecem se confundir.

O raio da esfera deve ser escolhido de acordo com a fórmula dada $R = \sqrt{\varrho N}$ onde substituindo ϱ e N pelos valores, também dados, se

chega a $R = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ por onde se verifica que o raio da esfera

tangente ao elipsóide é variável de ponto a ponto no meridiano, diminuindo do equador para os pólos; no equador o valor é mínimo, pois para $\varphi = 0$, o denominador é máximo.

Se o raio da zona considerada não ultrapassa 130 km, a diferença entre uma distância medida no elipsóide e a correspondente na esfera (arco de círculo máximo) não ultrapassa um milionésimo de seu valor e a diferença entre os ângulos de duas *geodésicas* (linhas mais curtas entre dois pontos da superfície terrestre) do elipsóide e dos arcos de círculo máximo correspondentes da esfera é de alguns décimos de segundo. Estes erros são plenamente aceitáveis em todas as operações, mesmo nas de maior precisão.

De modo diverso se apresentam as altitudes dos pontos, pois o destaque entre as duas superfícies torna-se sensível a distâncias próximas. A 30 km do ponto de tangência a diferença não é mais desprezível.

A esfera considerada se chama *esfera local*, como a que indicar que a mesma substitui o elipsóide no local, isto é, num pequeno trecho, e não integralmente.

Fica, assim, bem claro o conceito: não se volta à idéia antiga de uma Terra esférica; a superfície de referência continua a ser o elipsóide, que é substituído por comodidade de cálculo por tantas partes de esferas tangentes, quantas necessárias para abranger toda a extensão levantada.

A zona em que é lícita a substituição do elipsóide pela esfera local para as operações planimétricas, isto é, para medida de ângulos, e de distâncias, se chama *campo geodésico*.

A parte da superfície terrestre em torno de um ponto, na qual se pode considerar que a superfície do geóide coincida com o plano tangente nesse ponto, sem cometer erros que influam sensivelmente sobre os resultados das operações topográficas, se chama *campo topográfico*.

As *coordenadas geográficas*, já definidas no elipsóide, são a *latitude* (φ) e a *longitude* (λ) e devemos ainda considerar a *altitude* (A) ou comprimento do raio vector, para caracterizar bem a posição de um ponto na superfície terrestre. Por exemplo, para um ponto em Porto Alegre, teremos:

$= 30^{\circ}0'59''.8$ (Sul) — *Latitude* do Observatório Astronômico da Escola de Engenharia da Universidade do Rio Grande do Sul.

$= 3^{\text{h}}24^{\text{m}}53^{\text{s}},24$ (a oeste de Greenwich) — *Longitude* do referido Observatório, com origem em GRW.

$A = 23\text{m},58$ — *Altitude* da soteia de observações, sobre o nível médio do mar.

9 — Erros planimétrico e altimétrico. Correções da curvatura da Terra e refração atmosférica

a) *Erro planimétrico.* Na Geodésia a superfície de referência para medidas planimétricas é curva ao passo que na Topografia é plana, razão por que se deve avaliar a extensão máxima dos levantamentos topográficos.

Seja, com efeito, a esfera terrestre (Fig. 9) de centro O e de raio R , M e P dois pontos do terreno a considerar e cujas projeções ortogonais na calota esférica são m e p , segundo os raios terrestres OM e OP ; p' é a projeção cônica do ponto P sobre essa tangente e tomemos p'' de tal maneira que o arco mp seja igual à tangente mp'' .

A fim de determinar até que extensão poderemos levar os levantamentos topográficos projetados sobre planos horizontais por verticais paralelas, tomemos os valores do arco mp e da tangente mp'

$$D' = \overline{mp'} = R \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (8)$$

$$D = \widehat{mp} = R \cdot \alpha \text{ (expresso em radianos).} \quad (9)$$

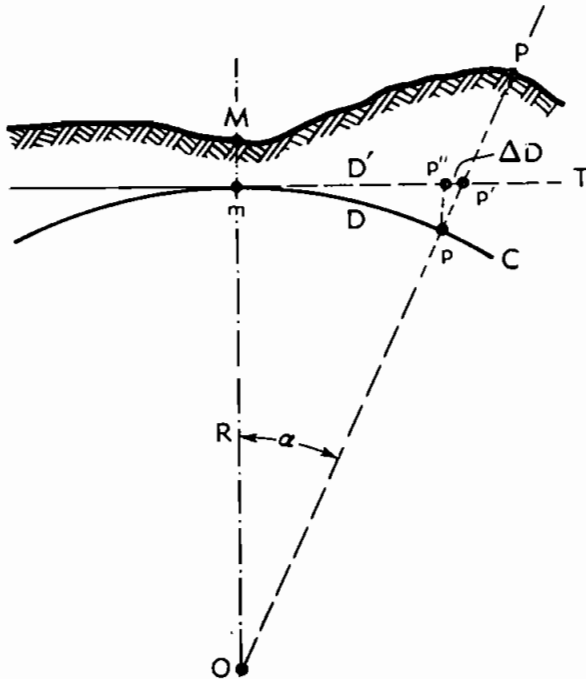


FIG. 9

A diferença de (8) e (9) dará o erro na avaliação da distância entre as projeções de D e D' ; assim

$$p'p'' = mp' - \widehat{mp} = \Delta D = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$$

Para ângulos pequenos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

$$\text{Assim, } \Delta D = \frac{R \alpha^3}{3}$$

Substituindo α^3 , obtido de (9), virá

$$\Delta D = \frac{D^3}{3 \cdot R^2} \quad (10)$$

A última operação de um levantamento topográfico é o desenho executado numa escala apropriada $\frac{1}{M}$.

A distância D do terreno será na planta $d = \frac{\Delta D}{M}$, e por conseguinte teremos:

$$d \cdot M = \frac{D^3}{3 \cdot R^2} \quad \text{e} \quad D = \sqrt[3]{\frac{3 R^2 d M}{1}} \quad (11)$$

O erro gráfico d sendo igual ou inferior a 0,1 mm, as duas projeções poderão ser consideradas iguais.

Assim, na escala $\frac{1}{M} = \frac{1}{1\,000}$ e para $d = 0,1$ mm e $R = 6\,370$ km.

$$D(KM) = \sqrt[3]{12\,173} = \sim 23 \text{ km.}$$

Para outras escalas, os valores de D serão:

$$\text{na escala de } 1/5\,000 : D = 23 \sqrt[3]{5} = \sim 39 \text{ km}$$

$$\text{na escala de } 1/10\,000 : D = 23 \sqrt[3]{10} = \sim 49 \text{ km}$$

$$\text{na escala de } 1/20\,000 : D = 23 \sqrt[3]{20} = \sim 62 \text{ km}$$

Em função do ângulo central (α) o erro de esfericidade nas distâncias topográficas pode ser obtido das relações dadas

$$D' = R \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (8) \quad \text{e} \quad D = \alpha R \quad (9)$$

Da *medida dos arcos*, sabemos que, dado o raio do círculo (R) e o ângulo central (α), o arco D , em função de medidas *sexagesimais*, o *radiano* é obtido das relações conhecidas:

$$\begin{aligned} D &= \alpha^{\circ} R = 0,017\,453\,3\, \alpha^{\circ} \cdot R = 0,000\,290\,888\, \alpha' \cdot R = \\ &= 0,000\,004\,848\, \alpha'' \cdot R = 0,015\,707\,96\, \alpha^{\#} \cdot R \\ & \quad (r - \text{radiano}; g - \text{grado}) \end{aligned}$$

Efetuada os cálculos para $\alpha = 5', 10', 15', 20', 25', 30'$, obtêm-se os valores inscritos na tabela abaixo (para $R = 6\,370\,000$ m; todas as distâncias são dadas em m):

	$D' = R \operatorname{tg} \alpha$	$D = 0,000\,290\,888' \cdot R$	ERROS	
			Absoluto (—)	Relativo (—)
5'	9 264,796m	9 264,789m	0,007m	1:1 300 000
10	18 529,631	18 529,579	0,052	1: 360 000
15	27 794,54	27 794,37	0,17	1: 160 000
20	37 059,58	37 059,16	0,42	1: 90 000
25	46 324,76	46 323,95	0,81	1: 60 000
30'	55 590,00 m	55 588,70 m	1,30 m	1: 40 000

Como a máxima precisão relativa alcançada nas medidas topográficas é de um milionésimo, resulta da tabela precedente que dentro de um *raio de 10 km* é lícito considerar plana a superfície terrestre. Na grande maioria de levantamentos em que a precisão relativa pode ser da ordem de 1:200 000, o raio do campo topográfico é de aproximadamente 25 km.

Sendo do domínio da Topografia principalmente os levantamentos restritos ao interior das malhas triangulares de um *canevas geodésico* com lados de 5 e 6 km, podem-se sem erro apreciável considerar plenamente satisfatórios a *representação planimétrica* em planos tangentes com projeções paralelas e os cálculos feitos com as fórmulas da Trigonometria retilínea ou plana.

Mas se podemos substituir a esfera terrestre por um plano tangente na representação planimétrica, o mesmo não acontece na *representação altimétrica*, isto é, no cálculo das cotas (alturas) dos diversos pontos.

b) *Erro altimétrico*. Com efeito, a cota de um ponto, P (Fig. 10), referida à esfera, é igual ao segmento Pp e ao plano tangente Pp' . A

diferença entre os dois segmentos, $pp' = \Delta h$ é o erro de esfericidade, cujo valor é obtido do triângulo retângulo OMP' .

$$Op'^2 = Om^2 + mp'^2; \quad (R + \Delta h)^2 = R^2 \times D'^2$$

$$\Delta h (2R + \Delta h) = D'^2$$

Δh sendo desprezível em presença de $2R$ ou 12 740 000 m, obteremos:

$$\Delta h = \frac{D'^2}{2R} \quad (12)$$

para $D' = 6$ km, distância entre 2 pontos geodésicos de 3.^a ordem, a fórmula acima nos dará

$$\Delta h = \frac{6000 \cdot 6000}{12\,740\,000} = \sim 2,82 \text{ m}$$

erro muito superior à tolerância.

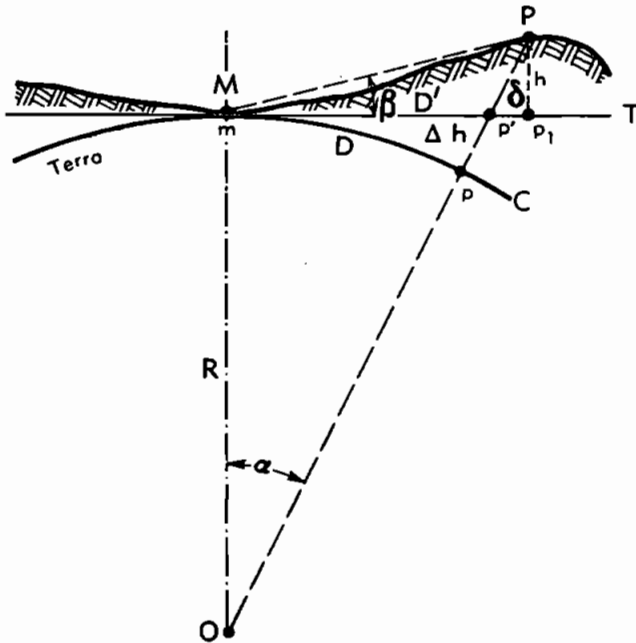


FIG. 10

Devido à *refração atmosférica*, este erro é realmente menor, pois o plano traçado por M não é uma linha reta, e sim uma linha curva com a curvatura MR voltada para o centro da Terra (Fig. 11).

Assim, o erro Δh (pp') fica diminuído para pp_r ; o abaixamento médio, $p'p_r$, segundo Gauss, é de $0,1306 h$, que podemos aproximar em Topografia para $0,15 h$; assim o erro de esfericidade e refração fica reduzido a

$$\Delta h' = pp' - p'p_r = h - 0,15 \Delta h = 0,85 \Delta h$$

$$\text{ou } \Delta h' = 0,85 \frac{D^2}{2R} \quad (13)$$

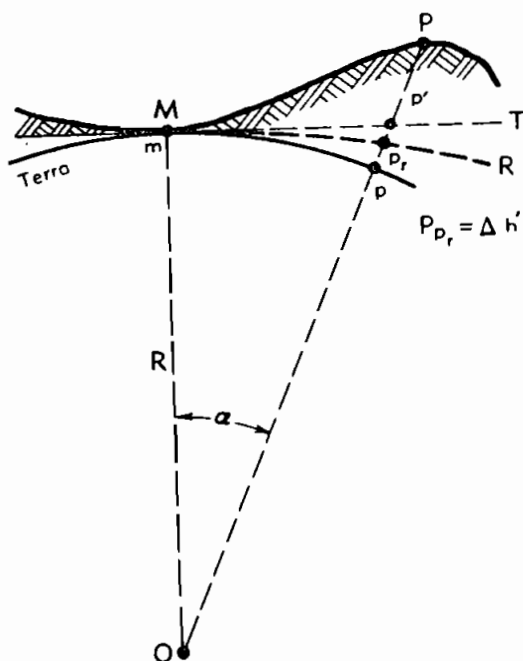


FIG. 11

No exemplo prático

$$h' = 0,85 h = 0,85 \times 2,82 = \sim 2,40 \text{ m}$$

que ainda é muito superior ao erro tolerável. Deve-se, assim, levar em conta esse erro no cálculo das cotas ou altitudes entre pontos afastados e desprezá-lo entre pontos próximos.

c) *Extensão máxima das linhas de visada.* Pela Fig. 9 podemos escrever aproximadamente $D = \widehat{mp} = \sim \overline{mp'}$. As projeções cônica e cilíndrica do ponto P , ou sejam Pp e Pp' , devem confundir-se para que não exista qualquer erro e, como tal é impossível, devemos calcular o afastamento tolerável dentro da precisão gráfica de 1/10 de milímetro para o afastamento $p'p_1 = \delta$.

Designando por h a altura do ponto P acima do plano mT e, relacionando elementos dos triângulos semelhantes MOp' e $p_1p'_p$, virá:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{h}{R} \quad \text{e} \quad D = \frac{R \cdot \delta}{h} \quad (14)$$

chamando de d a precisão gráfica e $\frac{1}{M}$ a escala da planta, $\delta = d \cdot M$,

que, substituído, dará para expressão de D acima o valor

$$D = \frac{RdM}{h} \quad (15)$$

sendo β , o ângulo de inclinação da reta que liga os dois pontos M e P obteremos h pela relação $h = (D + \delta) \operatorname{tg} \beta$

Ora δ (0,1 m na escala ao milésimo) sendo inapreciável em presença de D (em quilômetros), obteremos

$$h = D \operatorname{tg} \beta$$

que substituído acima, dará

$$D^2 = \frac{RdM}{\operatorname{tg} \beta} \quad (16)$$

sendo $\operatorname{tg} \beta$, em geral, inferior a 0,5 ($\beta = 26^\circ 34'$)

$$D^2 = 2RdM \quad \text{e} \quad D = \sqrt{2RdM} \quad (17)$$

Na escala de 1/1 000, D , terá para valor: $D^2 = 2 \times 6\,370 \times 1\,000 \times \frac{1}{10 \times 1\,000} \times 1\,000$ donde $D = \sqrt{2} \times 7,97 \times 100 = 1,4142 + 797 = \sim 1\,127$ m, o que corresponde a uma zona de terreno no interior de um círculo de 2 254 m de diâmetro; se a escala fosse de 1/2 000 o valor acima seria:

$$D = 1\,127 \sqrt{2} = \sim 1\,600 \text{ m}$$

Na escala de 1/5 000, correspondente a planta de grandes extensões ou plantas cadastrais, obteremos:

$$D = 1\,127 \sqrt{5} = \sim 2\,530 \text{ m}$$

Pela fórmula (12) se verifica que o erro de esfericidade Δh , é proporcional ao quadrado da distância, pois para

$d = 100 \text{ m}$	350 m	$1\,000 \text{ m}$	$10\,000 \text{ m}$
$\Delta h = 0,000\,78 \text{ m}$	$0,010\,1 \text{ m}$	$0,078 \text{ m}$	$7,8 \text{ m}$

A extensão dos nivelamentos, para a obtenção das cotas quando não se fizer a correção de curvatura e refração, vai depender da precisão dos métodos empregados e, mesmo assim, se deverá limitar a algumas centenas de metros, nas escalas superiores a 1/1 000.

d) *Erro nos ângulos horizontais.* A Geometria da esfera nos ensina que num triângulo esférico, a soma dos ângulos internos é maior que 180° . O excesso cresce com o aumento das dimensões do triângulo.

O triângulo esférico tem para lados três arcos de circunferência máxima, e a soma dos ângulos internos é uma função da área do triângulo. O excedente a 180° desta soma é chamado de *excesso esférico* (ϵ) e foi determinado por DELAMBRE, com seu teorema, que conclui

com $\epsilon'' = 206\,265'' \frac{S}{R^2}$ (18), sendo S a área do triângulo e R o raio

da esfera.

O teorema de Delambre, de grande importância na Topografia de precisão e na Geodésia, diz: *Se os lados de um triângulo esférico não superam 120 km, pode-se substituí-lo por um triângulo plano que tenha os lados do mesmo comprimento dos do triângulo esférico e os ângulos diminuídos cada um de um terço do excesso esférico achado.*

Para se ter uma idéia desse erro, suponhamos que os triângulos sejam equiláteros e suas áreas iguais, dados os pequenos comprimentos dos lados l , em confronto com o raio terrestre R . Sendo a área

$S = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4}$, se terá em segundos sexagesimais o valor do excesso

esférico, resumido na seguinte tabela:

para $l = 10$	20	30	40	50	100 km
$\epsilon'' = 0,2''$	$0,9''$	$2''$	$3,5''$	$5,5''$	$22''$

Com os dados acima pode-se trabalhar em Topografia sem temer o erro de esfericidade nos ângulos horizontais.

e) *Ângulos entre verticais.* Na superfície de referência, horizontal, as verticais serão paralelas e na superfície esférica, convergentes no centro da Terra.

A fórmula (9) ou seja $D = R \cdot \alpha$ (em radiano) permite determinar:

para ângulo α de $1'' \dots D = 6\,370\,000 \times 0,000\,004\,848 = 30,9$ m

para ângulo α de $1' \dots D = 6\,370\,000 \times 0,000\,290\,9 = 1\,853$ m

para ângulo α de $1^\circ \dots D = 6\,370\,000 \times 0,017\,453\,3 = 111\,775$ m

Assim, para qualquer extensão, é fácil determinar o ângulo de convergência das verticais extremas, e relacioná-lo com a precisão desejada do levantamento.

§ 3 – Unidades de medida

10 – **Definições.** Criação da unidade linear internacional. Metro dos arquivos de França. Protótipo do metro

10 (a) *Definições*

Distinguem-se, em Topografia, três espécies de grandezas, a saber: lineares, superficiais e angulares.

Para as duas primeiras, a unidade padrão é o *metro*, que corresponde à décima-milionésima parte do quadrante do meridiano terrestre, segundo deliberação da Assembléia Nacional da França, que adotou a partir de 26 de março de 1791 esse sistema de medida estudado pela Academia de Ciências de Paris. Em nosso país, o Decreto 4 257, de 16-6-1839 regula o assunto.

10 (b) *Criação da unidade linear internacional*

Os matemáticos Delambre e Méchain foram incumbidos da medida de um arco de 10 graus no meridiano que vai de Dunquerque, no norte da França, a Monjony, próximo de Barcelona, empregando como unidade de medida a *toesa do Peru* ($= 6$ pés $= 6 \times 12 = 72$ polegadas $6 \times 12 \times 12 = 864$ linhas de Paris $= 1,949$ m).

O comprimento do quarto do meridiano deduzido das medidas feitas e de outras medidas efetuadas no Peru e na Lapônia, foi de 5 130 740 toesas, cuja décima-milionésima parte, ou seja $0^{\text{T}},51\,307$, recebeu a denominação, segundo proposta do matemático BORDA, de *metro* (de *metron*, medida).

10 (c) *Metro dos arquivos de França*

O padrão, protótipo em platina, que dá o comprimento legal do metro, construído pelo físico francês FORTIN, de seção retangular,

25 × 4 mm, foi por lei de 10 de dezembro de 1799 declarado "mètre vrai et définitif", e depositado nos arquivos do Estado francês sob o nome de *metro dos arquivos*.

No século XIX, com o aperfeiçoamento dos instrumentos geodésicos e mais rigorosos processos de observação e de investigação, novas medidas foram feitas, chegando-se à conclusão de que o metro dos arquivos não era exatamente a décima-milionésima parte do quadrante terrestre, e sim $\sim 1/5$ de mm a mais (1,00002).

O último valor, obtido por Hayford, em 1909, para o quadrante terrestre foi de 10 002 286 metros.

10 (d) *Protótipo do metro internacional*

Foi resolvido, entretanto, não modificar o metro dos arquivos, para não estar sujeito a alterações periódicas, razão por que na Convenção Internacional do Metro, em 1875, à qual aderiram os principais países do mundo, entre os quais também o Brasil, foi mantida essa medida e foi designada a cidade de Breteuil, próxima de Paris, para sede da Oficina Internacional de Pesos e Medidas, encarregada dos trabalhos de Metrologia.

Foram aí confeccionadas 30 cópias do metro dos arquivos, de seção especial, numa liga de 90% de platina e 10% de irídio e, por deliberação da 1.ª Conferência Geral, a 26 de setembro de 1889, a cópia mais aproximada, isto é, de maior concordância com o metro dos arquivos, seria o METRO PROTÓTIPO INTERNACIONAL e as outras distribuídas pelos países participantes da Conferência seriam os *protótipos nacionais*.

11 – Unidades de medida linear e itinerária. Sistema métrico decimal no Brasil

No Brasil, somente a partir de 1.º de janeiro de 1874, por decreto, foi instituído esse sistema métrico decimal de medida; apesar disso, até hoje, em muitos Estados brasileiros, ainda são usadas as medidas do sistema antigo.

Sendo indispensável o conhecimento das relações que existem entre as unidades do SISTEMA MÉTRICO DECIMAL LEGAL e as do SISTEMA MÉTRICO ANTIGO, daremos a seguir alguns valores, tanto de medidas de comprimento, como itinerárias e de medida de pequenas e grandes superfícies.

Entre nós, é uso ainda, na avaliação das superfícies agrárias, representá-las nas unidades LEGAL e ANTIGA.

Assim, por exemplo, a superfície de uma lavoura poderá ser dada em *hectares* (1 hectare |Ha| = 100 × 100 m = 10 000 m²) ou em *quadrados* (1 quadra quadrada = 132 × 132 m = 17 424 m² = 1 Ha 7424 a).

11 — Medidas antigas brasileiras — Relações com o sistema métrico decimal legal

11 (a) Unidades de medida linear

<i>Sistema antigo</i>	<i>Valor</i>	<i>Sistema métrico</i>
1 linha	12 pontos	0,002 29 m
1 polegada	12 linhas	0,027 5 m
1 palmo	8 polegadas	0,22 m
1 vara	5 palmos	1,10 m
1 braça	2 varas	2,20 m
1 corda	15 braças	33,00 m
1 quadra	4 cordas	132,00 m
1 polegada inglesa	-----	0,025 4 m
1 pé inglês	12 polegadas ing.	0,304 79 m
1 jarda	3 pés ingl.	0,914 38 m
1 pé português	12 polegadas	0,33 m
1 côvado	2 pés ou 3 palmos	0,66 m
1 passo geométrico	5 pés	1,65 m
1 toesa	3 côvados	1,98 m
1 quadra do Uruguai	50 braças	110,00 m

Para a conversão de um sistema ao outro, usam-se os seguintes valores, correspondentes a um metro:

436,363 6 linhas	39,373 2 polegadas inglesas
36,363 6 polegadas	3,281 1 pés ingleses
4,545 4 palmos	1,093 7 jardas
0,909 0 da vara	3,333 3 pés portugueses
0,454 5 da braça	1,515 1 côvados
0,030 3 da corda	0,505 0 da toesa
0,007 575 da quadra	0,009 090 da quadra do Uruguai

11 (b) Unidades itinerárias.

<i>Sistema antigo</i>	<i>Valor</i>	<i>Sistema métrico</i>
1 quadra brasileira de sesmaria	60 braças	132,00 m
1 milha brasileira	1 000 braças	2 200,00 m
1 milha terrestre ou inglesa	1 760 jardas	1 609,31 m
1 milha métrica	833,33 braças	1 833,33 m
1 milha marítima ou geográfica	841,75 braças	1 851,85 m

1 légua métrica	2 500 braças	5 500,00 m
1 légua marítima ou geográfica (20 ao grau)	3 milhas ou 2 525,25 braças	5 555,55 m
1 légua brasileira ou de sesmaria	3 000 braças	6 600,00 m

Para a conversão de um sistema ao outro, usam-se os seguintes valores, correspondentes a 1 quilômetro:

7,575 7 quadras de sesmaria brasileira	0,181 8 da légua métrica
0,454 5 da milha brasileira	0,180 0 da légua geográfica
0,621 7 da milha inglesa	0,151 5 da légua de sesmaria
0,545 4 da milha métrica	
0,54 da milha geográfica	

12 — Medidas de superfície. Pequenas e grandes superfícies, relação entre medidas antigas e atuais

A unidade de medida para superfície é o METRO QUADRADO ou CENTIARE (0,01 do are) e o ARE, que corresponde à superfície de um quadrado de 10 metros de lado, ou sejam 100 m².

É muito usado o múltiplo dessas unidades, o HECTARE, que vale 10 000 m² e corresponde à superfície de um quadrado de 100 m de lado. A conversão de um número qualquer de m² nas unidades acima é muito fácil, pois basta separá-lo, a partir da direita, em casas de 2 algarismos; assim, 1 278 493 m² equivale a 127 hectares, 84 ares e 93 centiares, (127 Ha, 84 a, 93 ca) ou 127,849 3 Ha.

12 (a) Medidas das pequenas superfícies

Sistema antigo	Valor	Sistema métrico
1 palmo quadrado	64 polegadas quadradas	484 cm ²
1 vara quadrada	25 palmos quadrados	1,21 m ²
1 braça quadrada	4 varas quadradas	4,84 m ²
1 corda quadrada	225 braças quadradas	1 089,00 m ²
1 quadra quadrada	3 600 braças quadradas	17 424,00 m ²

Para a respectiva conversão em unidades do sistema antigo, cada metro quadrado vale:

0,000 057 da quadra quadrada.	0,206 6 da braça quadrada
0,000 918 da corda quadrada	0,826 4 da vara quadrada
	20,66 palmos quadrados

12 (b). *Medidas das grandes superfícies agrárias*

<i>Sistema antigo</i>	<i>Equivalência</i>	<i>Sistema métrico (hectares)</i>
1 jeira	400 braças quadradas	0,193 6
1 alqueire menor (S. Paulo, etc.)	50 × 100 braças (5 000 braças quadradas)	2,42
1 alqueire geométrico (Minas Gerais, Rio de Janeiro, etc.)	100 × 100 braças (10 000 braças quadradas)	4,84
1 data de campo	562 500 braças quadradas	272,25
1 data de mato	1 125 000 braças quadradas	544,50
1 sesmaria de mato (légua de 6 600 m)	1/4 de légua de frente por 1 légua de fundo	1 089,00
1 sesmaria de campo	1 légua de frente por 3 lé- guas de fundo	13 068,00
1 quadra de sesmaria	60 braças de frente por 1	87,12
1 légua de sesmaria (50 quadras de ses- maria)	1 légua de fundo 1 légua quadrada	4 356,00
1 légua quadrada de 20 ao grau (geográ- fica)	9 milhas quadradas	3 086,413 6
1 milha quadrada	-----	342,934 8

12 (c) *Relação entre as medidas agrárias antigas entre si e hectares*

	DA SESMARIA				QUADRADAS		Alqueires	Hectares
	Légua	Quadra	Braça	Palmo	Quadra	Braça		
Légua.....	1	60	3 000	30 000	2 500	9 000 000	900	4 356 Ha
Quadra.....	0,02	1	60	600	50	180 000	18	87,12
Braça.....	1/3 000	1/60	1	10	0,333	3 000	0,30	1,482
Palmo.....	1/30 000	1/600	0,1	1	0,083	300	0,03	0,145 2
Quadra.....	0,000 4	0,02	1,2	12	1	3 600	0,36	1,742 4
Braça.....	1/9 000 000	1/180 000	1/3 000	1/300	1/3 600	1	0,000 1	0,000 484
Alqueires.....	1/900	1/18	3,33	33,33	2,78	10 000	1	4,84
Hectares.....	1/4 356	0,011 5	0,688 7	6,887	0,574	2 066,11	0,206 6	1

13 - *Medidas angulares. Conversão de graus em grados e vice-versa. Radiano*

Dois são os tipos principais de divisão de arcos, o SEXAGESIMAL e o CENTESIMAL. Assim, a unidade de medida, para os arcos de um círculo dado, é a 360.^a ou a 400.^a parte da circunferência, e cada parte se chama GRAU, no primeiro caso, e GRADO no segundo.

A divisão **SEXAGESIMAL**, bastante usada entre nós na maioria da aparelhagem topográfica e geodésica, é muito antiga, sendo conhecida dos povos da antiguidade e dos caldeus, egípcios, persas, chineses, etc., dada a propriedade de o hexágono se inscrever exatamente no círculo e também pela sua relação com o tempo, razão pela qual é a única empregada em Astronomia.

A divisão **CENTESIMAL**, muito cômoda e prática nos cálculos, tem logrado grande aceitação, principalmente entre os povos europeus, e procede do tempo da Primeira República Francesa.

A centésima parte do grau, neste sistema, se chama também de **MINUTO**, e a décima-milésima parte de **SEGUNDO**.

Um ângulo qualquer se escreve $57^{\circ},8327$ ou $57^{\circ}83'27''$ ou, ainda, $50^{\circ}83-27''$, que não é usado por dar margem a confusões com o sistema sexagesimal.

13 (a) Conversão de graus em grados, ou vice-versa

A relação que existe entre um ângulo avaliado em graus (a°) e o avaliado em grados (a^{g}) é, evidentemente, a que existe entre as duas divisões, 360 e 400 partes; assim:

$$\frac{a^{\circ}}{a^{\text{g}}} = \frac{360}{400} = \frac{9}{10}$$

Donde:

$$a^{\circ} = 9/10 a^{\text{g}} \quad (19)$$

$$\text{e } a^{\text{g}} = 10/9 a^{\circ} \quad (20)$$

EXEMPLO: Seja converter o ângulo sexagesimal $62^{\circ}37'21''$ em centesimal. Antes de aplicar a relação (20) acima, devemos converter a parte fracionária do grau em segundos e dividi-la por 3 600, para obter a fração decimal do grau.

Assim:

$$37 \times 60'' = 2\,220 + 21 = 2\,241'' \quad \text{e} \quad \frac{2\,241''}{3\,600} = 0,6225$$

e o ângulo dado será: $62,6225$.

Substituindo esse valor na fórmula, obteremos:

$$a^{\text{g}} = 10/9 a^{\circ} = 10/9 \cdot 62,6225 = 69,55805$$

Reciprocamente, se $23,81873$ é o valor de um ângulo centesimal, para reduzi-lo a sexagesimal, aplica-se a fórmula (19) e

$$a^{\circ} = 9/10 \quad a^{\circ} = 9/10 \cdot 23,81873 = 20,986857$$

e, como um grau equivale a $60'$ e um minuto a $60''$, teremos

$$\begin{aligned} 0,86857 &= 0,86857 \times 60' = 52',1142 \\ e \ 0',1142 &= 0,1142 \times 60'' = 6'',852 \end{aligned}$$

Portanto resultará

$$a^{\circ} = \sim 20^{\circ}52'7''$$

Com o auxílio da tabela X desta caderneta, a conversão se simplifica; assim, seja converter o ângulo $27^{\circ}22'33'',67$ em grados e fração.

$$\begin{aligned} a \ 27^{\circ} &= 308,0000 \\ a \ 22' &= 0,4074 \\ a \ 33'' &= 0,0102 \\ a \ 0'',67 &= 0,0002 \end{aligned}$$

$308,4172$, que é o valor do ângulo correspondente no sistema centesimal.

A conversão inversa é idêntica, com o emprego da mesma tabela.

13 (b) Radiano

Chama-se *radiano* ao ângulo central que subentende um arco de comprimento igual ao do raio do círculo; tem aplicação na prática, principalmente na medida dos ângulos pequenos.

Assim, pela Fig. 12 obteremos:

$$\frac{2\pi R}{360^{\circ}} = \frac{1}{\rho^{\circ}}$$

e, como $R = 1$

$$\rho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{2\pi} = 57^{\circ}17'45''$$

ou, reduzindo a minutos:

$$\rho' = 3437',7 = \sim 3438'$$

e a segundos:

$$\rho'' = 206264'',8$$

(21)

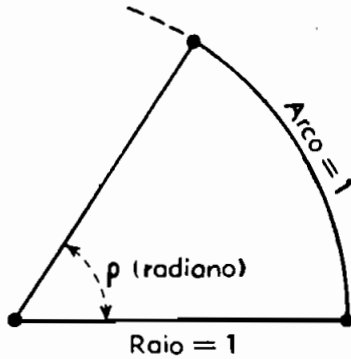


FIG. 12

Exemplo: Calcular o valor do ângulo visual que subentende uma haste com 0^m,55 a uma distância de 850 metros (Fig. 13).

Teremos:

$$\frac{ab}{Oa} = \frac{cd}{Oc} = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

Substituindo,

$$\alpha'' = \frac{0^{m},55 \times 206\ 265''}{850\ m} = 133'',46 \text{ e } \alpha'' = 0^{\circ}2'13'',46,$$

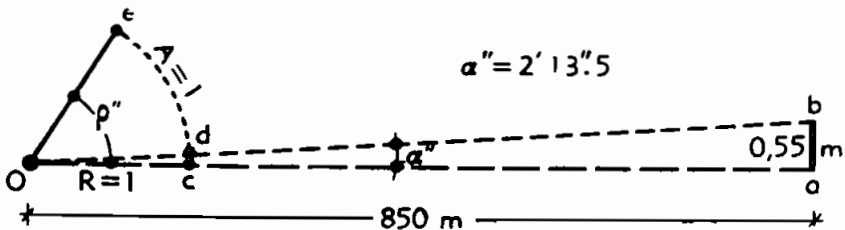


FIG. 13

que é o valor do ângulo procurado.

Valores do radiano (ρ)

$\rho^{\circ} = 57^{\circ},295\ 78$	$\log \rho^{\circ} = 1,758\ 122\ 6$
$\rho^{\#} = 63^{\#}661\ 98$	$\log \rho^{\#} = 1,803\ 880$
$\rho' = 8\ 437,746\ 8$	$\log \rho' = 3,536\ 273\ 8$
$\rho'' = 206\ 264'',806$	$\log \rho'' = 5,314\ 425\ 1$
$\text{sen } \rho^{\circ} = 0,841\ 471\ 0;$		$\text{cos } \rho^{\circ} = 0,540\ 302\ 3$
$\text{tg } \rho^{\circ} = 1,557\ 407\ 7$		

§ 4 – Planos de projeção. Escalas. Convenções

14 – Planos de projeção. Projeção de retas e superfícies

A Topografia tem por finalidade a execução, sobre uma folha de papel plana, de uma figura semelhante à que formaria a imagem de uma parcela do terreno, vista de muito alto: de um avião por exemplo. Observadas as dimensões da figura de uma centena de quilômetros de altura, poder-se-á praticamente desprezar a curvatura da Terra e considerar todos os objetos que se encontram sobre o terreno como projetados sobre uma superfície plana.

A projeção de todas as linhas que contornam a superfície do solo sobre o plano tangente à esfera que constitui a *planimetria* da carta.

O terreno, visto do alto, representa sua projeção horizontal. Entretanto, tal projeção está longe de ser uniforme; sua superfície é cheia de acidentes, reentrantes e salientes. Esses acidentes só são visíveis, quando o observador se situa nas proximidades do terreno e observa-o no sentido horizontal.

Assim, como dissemos em capítulo anterior, para ser completa, a Topografia deve traduzir sobre um plano o *relévo* do terreno, servindo-se dos processos plani e altimétrico associados:

Da *Geometria projetiva* são conhecidos já os problemas relacionados com as projeções de uma superfície inclinada, e que nos dão os cortes, perfis e alinhamentos projetados; por isso nos abstermos de citá-los aqui.

15 – Desenho de planta. Escalas usadas em Topografia

Desenhar uma planta é a operação que consiste em traçar no papel uma figura semelhante à do terreno levantado.

Os ângulos são desenhados com sua grandeza natural e as distâncias são reduzidas segundo uma razão constante.

A esta razão constante entre uma linha (gráfica) do desenho e sua homologia do terreno (linha natural), dá-se o nome de redução da planta. Indica-se a escala por uma fração da forma $\frac{1}{M}$, que também

se chama módulo da escala.

De um modo geral, se chamarmos de L o comprimento de uma linha no terreno, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{M}, \text{ donde } l = \frac{L}{M} \text{ e } L = lM$$

Esta relação permite transformar uma distância medida no terreno na sua homóloga no desenho, e vice-versa.

A escala é dita *decimal* quando seu denominador M compõe-se dos algarismos 1, 2 ou 5, seguidos de zeros. Dá-se preferência às escalas decimais pela sua comodidade e pela exatidão que elas oferecem na leitura, porque o metro e seus múltiplos são sempre expressos por um número exato de subdivisões.

Na prática empregam-se as *escalas de redução*, de duas a seis faces, em madeira ou metal, com as graduações sobre fundo branco ou sobre chapas de celulósido branco, de *perfil agudo*, de 20, 30 e 50 centímetros de comprimento.

As escalas mais usadas no desenho topográfico são as seguintes:

Escala da planta	VALORES CORRESPONDENTES A			
	1 km (terreno)	1 mm (desenho)	1/8 mm (desenho)	50 cm (desenho)
1/500	2,00 m	0,50m	0,062 5m	250m
1/750	1,333	0,75	0,093 8	375
1/1 000	1,00	1,00	0,125	500
1/1 250	0,80	1,25	0,156	625
1/1 500	0,666	1,50	0,187	725
1/2 000	0,50	2,00	0,25	1 030
1/3 000	0,333	3,00	0,375	1 500
1/4 000	0,25	4,00	0,500	2 000
1/5 000	0,20	5,00	0,625	2 500

1/8 mm — precisão gráfica (Topografia)

Os fabricantes Wichmann, Wild, Keuffel & Esser, Arquimedes e outros, constroem escalas gráficas diversas, de seção triangular e comprimentos variáveis.

A escala fabricada por Keuffel & Esser Co., N.Y., triangular, de 6 graduações, 2 em cada diedro do triângulo, traz as seguintes escalas: .05 (1/20); .03 (1/33 1/3); .025 (1/40); .02 (1/50); .0125 (1/80); e .01 (1/100). Outra escala da mesma procedência traz as escalas de 1/500 a 1/2 500.

Estas escalas permitem o desenho em outras escalas, múltiplas, e mesmo submúltiplas para desenhos de detalhes e industriais.

Quando não se dispõe de uma escala gravada de redução, pode-se construir uma escala simples ou de linhas transversais, ou ainda, utilizar uma régua comum de desenho, calculando os comprimentos equivalentes na escala métrica, o que é, entretanto, trabalhoso e incômodo para o desenho.

As régua duplas, em cartolina prensada, Wichmann, são ótimas, pois existem em grande número de escalas e são exatas para trabalhos topográficos.

16 – Principais escalas e seu emprego

Pelo que dissemos anteriormente, o número de *escalas* possíveis é teoricamente infinito. Praticamente, no entanto, esse número não é grande e se reduz na realidade a poucos.

Tais escalas são de diversas categorias: a série *decimal*, compreendendo as escalas cujo denominador é um múltiplo exato de 10: 1/100, 1/1 000, 1/10 000, 1/100 000; a série na qual o denominador é um múltiplo de 20: 1/200, 1/2 000, 1/20 000, 1/40 000, 1/80 000, 1/200 000; depois a série na qual o denominador é um múltiplo de 50: 1/500, 1/5 000, 1/25 000, 1/50 000; ainda as escalas *diversas*, cujo denominador é um número menos simples: 1/320 000, e enfim as escalas *duodecimas*, empregadas nas cartas antigas, nas quais o denominador é um múltiplo de 12: 1/288, 1/28 800, 1/86 400 (cartas de Cassini, publicadas no século XVIII, por exemplo).

Damos, a seguir, resumidas num quadro, por ordem de valores decrescentes, as principais escalas para plantas e cartas topográficas, corográficas e geográficas, com a indicação do emprego respectivo.

ESCALA	EQUIVALÊNCIA		Emprego
	1 km (terreno)	1 cm (desenho)	
	<i>Desenho:</i>	<i>Terreno:</i>	
1/100	10 m	1 m	} Detalhes de edifícios; terraplenagem, etc.
1/200	5 m	2 m	
1/250	4 m	2,50m	
1/500	2 m	5 m	} Planta de uma fazenda Planta de uma vila Planta de uma propriedade Planta cadastral, etc.
1/1 000	1 m	10 m	
1/2 000	0,50 m	20 m	
1/1 250	0,80 m	12,5 m	} Antigo cadastro
1/2 500	0,40 m	25 m	
1/5 000	0,20 m	50 m	} Planta pequena cidade Planta grande propriedade
1/10 000	0,10 m	100 m	
1/50 000	0,02 m	500 m	} Cartas de diversos países e Estados Cartas (grande país) Cartas aeronáuticas
1/100 000	0,01 m	1 000 m	
1/200 000	0,005m	2 000 m	
1/500 000	0,002m	5 000 m	} Carta reduzida (grande país)
1/1 000 000	0,001m	10 000 m	} Carta internacional do mundo.

Os *serviços geográficos*, principalmente os serviços do Estado-Maior de diferentes países, publicaram cartas em escala pequena do conjunto de seus territórios.

Em geral as escalas dessas cartas se aproximam de 1/100 000; a seguir, damos uma relação de escalas das principais cartas de alguns países:

Alemanha	1/100 000	Austria	1/75 000
Brasil	1/50 000	Bélgica	1/40 000
Dinamarca	1/80 000	Argentina	1/100 000
Estados Unidos ...	1/62 500	Inglaterra	1/63 360
Espanha	1/50 000	França	1/80 000
Itália	1/100 000	Noruega	1/100 000
Portugal	1/100 000	Países-Baixos	1/50 000
Rússia	1/126 000	Suécia	1/100 000
Suíça	1/100 000	Uruguai	1/50 000

Independente das cartas compreendidas na relação supra, ditas *fundamentais*, muitos países publicam outras cartas, em escalas maiores e menores.

Assim, na Alemanha, além da carta de 1/100 000 existe uma carta muito detalhada na escala de 1/25 000, com aproximadamente 4 000 folhas (pranchas).

Na Bélgica, há uma carta na escala 1/20 000, com 430 folhas. Em nosso país, o Estado de São Paulo tem folhas completas na escala de 1/50 000 e noutras regiões cartas parceladas em escalas maiores. As escalas fracionárias, adotadas por algumas cartas, como, por exemplo, nas da Inglaterra, resultam das unidades adotadas. A *Ordnance Survey*, nesse país, adotou a escala de uma *polegada* (25,4 mm) por milha inglesa (1 609,34 m). Sobre uma tal escala, 1 cm representa 633,60 m, ou seja 1/63 360 (em metros). Esta escala, que é complicada quando transformada em medidas métricas, torna-se simples quando se empregam as unidades usadas na Inglaterra. Não se deve confundir a milha acima adotada, arbitrária, *statute mile*, com a milha marítima, *comprimento de um minuto do meridiano*, e que vale 1 852 m.

17 - Precisão gráfica

De desenho, sabemos que o limite de finura dos traços é de 1 décimo de milímetro (0,1 mm). A precisão gráfica em Topografia, como dissemos, é de 1/8 de milímetro, e alguns autores ainda falam em 1/5 mm. Se adotarmos este último valor, bem compatível com as condições de visão comum dos desenhistas e leitores das cartas, concluímos que o quinto de milímetro representa igualmente a espessura limite, espessura

mínima que deve ter um *ponto* sobre a carta, para que o mesmo possa figurar no terreno.

Assim, no caso da execução de uma carta de 1/50 000, para figurar um ponto com 1/5 mm, o mesmo corresponderá no terreno a uma dimensão 50 000 vezes maior, ou seja, a 10 metros.

Como não se deve aumentar a precisão gráfica de 1/5 mm, resulta que o erro cometido na determinação do ponto da superfície do solo poderá ser de 10 metros, sem que este erro seja sensível na carta.

Verdade é que o erro admissível na determinação do ponto diminui à medida que a escala aumenta; na escala de 1/5 000, o erro seria apenas de 1 metro. A precisão com a qual é determinada a posição dos diversos pontos do terreno deve, assim, aumentar com a escala escolhida. Podemos, por outro lado, considerar a questão sob outro ponto de vista. Suponhamos a representação numa dada carta de, um alinhamento medido a trena.

A precisão dessa medida, como veremos adiante, é da ordem de 1/2 000, em média, isto é, o erro cometido não deve ultrapassar metade da milésima parte do comprimento medido.

Nessas condições, o maior comprimento que se poderá medir realmente com a trena, para representá-lo na carta, com a precisão que sua escala comporta, será representado por uma linha que, no *deseenho*, terá 10 cm, correspondente à *precisão gráfica relativa* adotada (1/5 de mm).

O comprimento correspondente, no terreno, variará assim com a escala da carta ou planta topográfica.

No caso duma planta na escala de 1/1 000, esse comprimento será de 100 m; na escala de 1/2 000, o valor máximo correspondente será 200 m; na de 1/10 000, 1 000 m e assim por diante.

18 — Medidas sobre a carta. Escalas gráficas. Curvímetros

Para as medidas a obter das cartas, utiliza-se a escala de redução correspondente ou constrói-se uma *escala gráfica* (Fig. 14).

Traça-se uma linha reta *AB*, com o comprimento, na escala da carta, que corresponde a 10 km, por ex., e divide-se com um compasso de ponta seca em 10 partes iguais; cada uma dessas partes representará

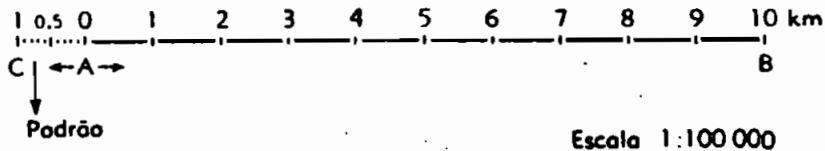


FIG. 14

1 km e, para obter as frações, toma-se mais uma parte à esquerda de *A*, *AC*, e subdivide-se em 10 novas partes; cada uma dessas partes do *padrão* da escala representa o valor de um *hectômetro*; ainda podem ser avaliados, com o auxílio de uma lupa, os décimos de cada subdivisão, ou sejam, os *decâmetros* e, mesmo, os *metros*, conforme a escala. Uma das vantagens da escala gráfica, traçada na carta ou planta, é que a mesma experimenta, sob a influência do calor ou da umidade teoricamente as mesmas variações de comprimento no desenho, pelas alterações do papel, melhorando as medidas das distâncias obtidas.

Vejamos, agora, como nos servimos de uma escala gráfica para *medir*

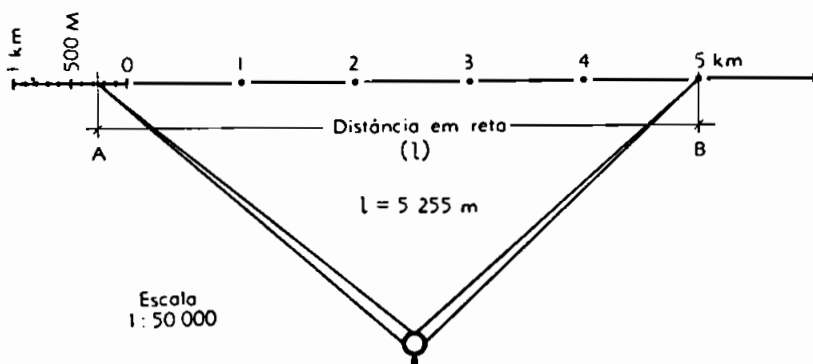


FIG. 15 a)

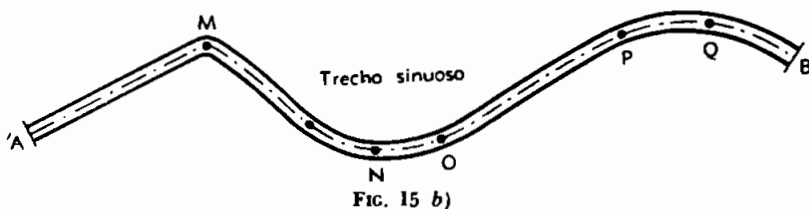


FIG. 15 b)

a distância que separa dois pontos. Há dois casos a distinguir: quando os pontos extremos estão numa linha reta, ou quando numa linha sinuosa (Figs. 15a e 15b).

Com o auxílio de um compasso facilmente se acha o comprimento na escala no 1.º caso, pois basta fixar uma das pontas do compasso numa divisão inteira da escala, 3, por ex., e ler junto à outra ponta, no padrão da escala, a fração 380 m, o que perfaz o total de 3 380 metros para a distância procurada; no 2.º caso, decompõe-se a distância

sinuosa, numa série de trechos retos, $AM, MN, \dots QB$, procedendo-se para cada trecho, como indicado acima, ou melhor, acumulando os mesmos segundo uma reta e fazendo uma avaliação única do total obtido.

Pode-se ainda empregar um pequeno instrumento, que se presta para a medida de todas as distâncias gráficas, e que se chama *curvímetro*; o grau de precisão é menor evidentemente, mas a rapidez de avaliação é maior, principalmente nos trechos curvilíneos.

Há dois tipos de *curvímetros*: os de *parafuso* (Fig. 16a) e os de *quadrante* ou *mostrador* (Fig. 16b). Nestes instrumentos, muito portáteis, uma pequena roda dentada, que gira ao longo da linha a medir, transmite seu movimento a um ponteiro que indica num mostrador circular a grandeza medida. As quatro escalas e os dois mostradores de que são dotados estes aparelhos, permitem leitura direta ou sua fácil transformação à escala da planta. A aproximação com que se medem os comprimentos, depende do cuidado do operador e da escala da planta; devemos aqui lembrar o que já dissemos com relação à precisão gráfica de $1/5$ de mm; se a carta for desenhada em $1/10\ 000$

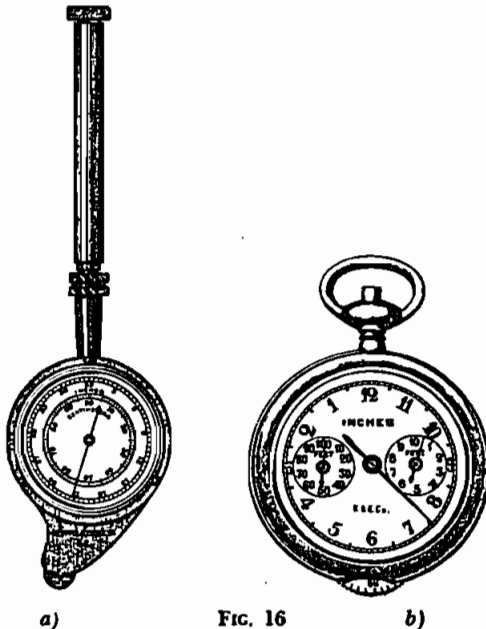


FIG. 16

e se medir um comprimento de 12 cm, p. ex., a imprecisão será da ordem de $1/600$ aproximadamente; um comprimento de 24 cm será avaliado com $1/1\ 200$ de seu valor. As medidas feitas com curvímetros

não atingem esse grau de exatidão por fatores pessoais e pelo leve deslizamento no papel.

Devemos, ainda, lembrar que a escala é a relação entre *comprimentos* análogos, na carta e no terreno, e não a relação entre as *superfícies* correspondentes.

Assim, sobre uma planta em 1/1 000, a relação duma *superfície* inedita na planta para a superfície medida no terreno, será $1/1\ 000 \times 1/1\ 000$, isto é, 1/1 000 000.

19 – Necessidade de “sinais convencionais”. Convenções usuais

Complementando o que foi dito sobre escalas, devemos acrescentar que não é senão nas *escalas grandes* (de 1/10 000 a 1/1 000), que os objetos podem figurar nas cartas com dimensões gráficas rigorosamente proporcionais a suas dimensões reais. Por exemplo, uma casa isolada de 10 metros de lado poderá ser representada na escala de 1/1 000 por um quadrado 1 000 vezes menor, isto é, de 1 cm de lado; na escala de 1/100 000, o quadrado figurativo seria 10 000 vezes menor, mas teria ainda 1 mm de lado, que é passível ainda de representação gráfica.

Em *pequenas escalas*, pelo contrário, em 1/100 000, por exemplo, a mesma casa seria representada por um quadrado com um *décimo de milímetro* de lado.

Ora, 0,1 mm é a espessura limite dos traços, os mais finos do desenho. O ponto correspondente à casa seria apenas visível. Para figurar esta casa isolada na carta, deve-se recorrer a um sinal, que forçosamente exagera as dimensões: será um *sinal convencional*.

Certos detalhes são, assim, representados por sinais, também chamados de *convenções*, cuja forma caracteriza sua natureza sem preocupação de representar suas dimensões reais. Por exemplo, sobre uma carta de Estado-Maior, em 1/80 000, todas as igrejas são figuradas por um círculo encimado por uma pequena cruz, todas as estações ferroviárias por um retângulo ao lado de um ou dois pequenos traços (conforme a escala), que representa a via férrea. É sobretudo para as estradas que essas observações têm sua razão de ser. Uma rodovia de 6 metros de largura, por exemplo, deve ser figurada por *dois* traços paralelos, com afastamento difícil de desenhar em suas dimensões reais, e por isso deve-se usar convenção adequada.

Acontece o mesmo para muitos outros detalhes que se encontram no terreno.

Resulta dessa ampliação que as larguras das estradas, ruas e caminhos, exagerados nas cartas, obrigam a leves deslocamentos nos detalhes próximos.

Não é senão nas escalas grandes, como dissemos, a partir de 1/10 000, que *todos* os detalhes podem ser figurados por representações gráficas proporcionais a suas dimensões reais.

No apêndice I de nossa *Caderneta de Campo*, da Editora Globo, às páginas 867 a 884 (3.^a edição) são dadas a cores as *Convenções Cartográficas Brasileiras*, para as cartas topográficas, abrangendo: A) Convenções para fronteiras e limites; B) Idem, para cercados, valados e tapumes; C) Idem, para vias de comunicação; D) Idem, para detalhes relativos a vias de comunicação; E) Idem de Obras de Arte e Passos; F) Idem de cursos d'água (água corrente); G) Idem, água não corrente (lagos, etc.); H) Idem da natureza do solo; I) Idem de acidentes topográficos relacionados com a hidrografia; J) Idem da representação orográfica do terreno; L) Idem de cultura e objetos topográficos relativos ao reino vegetal; M) Idem de culturas artificiais e silvestres; N) Convenções de letreiros para extensões territoriais a áreas cultivadas; O) Idem, idem para localidades e vias de comunicações terrestres; P) Idem, idem para acidentes orográficos e Q) Idem, idem para hidrografia.

Com as indicações contidas na *Caderneta* referida e neste Curso, ou no *Manual de Convenções Cartográficas* publicado em 1957 pela *Diretoria do Serviço Geográfico do Exército*, e impresso no referido serviço, torna-se fácil desenhar uma planta ou carta com convenções oficiais adequadas.

Em muitos casos, empregam-se tintas de cor para os traçados; assim, a azul é usada para os limites das águas, para suas cotas e curvas de nível em profundidade; a cor *carmin* nas alvenarias de toda a espécie e nas cotas; a terra de sena queimada (*bistre*) para as curvas de nível e cotas do terreno; traçam-se em verde (nas escalas grandes) as avenidas dos parques e jardins, os bosques e matos e os grupos de árvores isoladas.

Enfim, o preto é usado nos limites de culturas, estradas e caminhos, ferrovias, construções em madeira e as cotas, com exceção das águas, curvas de nível e alvenarias. É igualmente em preto que se fazem todos os letreiros.

CAPÍTULO II

PLANIMETRIA

A) LEVANTAMENTO EXPEDITO, A TRENA E A BÚSSOLA

§ 5 – Medida dos alinhamentos

20 – Generalidades

Fazer um *levantamento* ou uma *medição* é proceder a todas as operações e medidas necessárias para determinar a posição relativa dos pontos que compõem uma parte da superfície terrestre.

A extensão dos levantamentos, bem como a precisão obtida, é função do tipo de levantamento empregado; este pode ser expedito, comum e de precisão, cada qual exigindo instrumental e método adequado.

A representação em escala da figura levantada, com todos os detalhes medidos, é feita sobre papel especial e constitui o *desenho topográfico*; este, de acordo com a escala, grau de precisão, detalhe e extensão, pode ser um esboço, uma planta ou mapa topográfico, geodésico ou geográfico, ou uma carta corográfica.

Os mapas são sempre acompanhados das cadernetas de campo, planilhas dos cálculos e memórias descritivas, que completam os detalhes cuja representação é difícil num desenho; para essa representação são empregadas *convenções topográficas*, de que tratamos com algum detalhe no capítulo anterior.

A Topografia está intimamente ligada à *Geodésia* e *Geografia*, sendo que aquela usa processos de grande rigor nas medidas, devido à extensão dos levantamentos, que podem abranger um Estado ou um país, e esta utiliza observações astronômicas para a determinação dos pontos de suas cartas.

Em Topografia não se entra com a curvatura da Terra como fator de influência nas medidas tomadas. Como se opera sobre superfície relativamente restrita, pode-se assimilar a porção da esfera em que se está, isto é, uma calota esférica, ao plano tangente respectivo.

O levantamento topográfico pode ser *planimétrico*, quando somente são representadas sobre um plano básico de referência, as projeções

horizontais dos contornos e pontos medidos, e *altimétrico*, quando são medidas as alturas desses pontos acima do plano horizontal da base.

Estudaremos, a seguir, sucintamente, os instrumentos e métodos empregados nos diversos levantamentos, quer expeditos, quer regulares ou de precisão, tanto plani como altimétricos.

21 — Processos expeditos

Os levantamentos rápidos ou expeditos têm sua aplicação quase que restrita aos *reconhecimentos*, muito usados no estudo de uma estrada e, principalmente, quando são empregados os processos de *exploração locada*, isto é, do traçado de uma estrada à vista do terreno.

Quando o estudo é feito numa planta completa, com curvas de nível, o processo é, então, o da *exploração comum*, que prescinde, em parte, do referido reconhecimento.

Entre nós, o *reconhecimento* é básico e constitui, mesmo, uma parte importante no estudo de uma estrada, principalmente quando se trata de traçados em regiões de que não há cartas nem levantamentos aproximados.

Nas zonas coloniais, já povoadas, este reconhecimento deverá ter não somente um caráter técnico, mas também investigativo, quanto à produção agrícola, importância industrial e outros fatores determinantes na escolha de um traçado.

A medida das distâncias é feita por processo direto ou indireto.

a) *A passo*: A medida das distâncias a passo, devidamente aferido, em terreno plano, é um meio excelente e prático de medir com rapidez e relativa segurança o comprimento de um alinhamento; serve, também, como verificação aproximada das medidas com diastímetros (trenas, etc.) ou indiretas com taqueômetros, evitando os erros grosseiros ou faltas.

Há diferentes espécies de passos: assim, o passo de estrada com 0,80 m, com o qual um operador percorre 4,800 km, por hora, ou sejam 100 passos por minuto; o passo acelerado, de 0,65 m, com 110 por minuto, ou 4,290 km, por hora; e o passo ginástica, de 0,83 m, podendo executar-se 165 por minuto, ou, mais ou menos, 8,200 km, por hora.

Há, ainda, o passo geométrico de 0,75 m, com 105 por minuto e 4,725 km, por hora, empregado em plantas, ou cartas topográficas, que tem, geralmente, duas escalas: uma comum, métrica, e outra de passos.

Devemos notar que o valor do passo é variável com a estatura, modo de caminhar, sobrecarga e cansaço do operador, condições do terreno, hora do dia, influência das rampas e do vento e outras condições.

Pode-se fixar o comprimento do passo de um homem de 1,70 m de altura em 0,80 m e aumentar ou diminuir de 1 cm o valor do passo para cada 5 cm de diferença em altura. Todo operador deve determinar seu passo individual por aferição com uma distância medida a trena e nunca forçá-lo para chegar a um valor maior, que julgue normal, pois não poderá mantê-lo por muito tempo.

É preferível que a contagem seja feita por passos duplos; com alguma prática e em boas condições, pode-se obter a aproximação de 2 a 3%.

Nas rampas há encurtamento nas projeções dos passos, maior nas subidas (aclives) do que nas descidas (declives):

As seguintes fórmulas práticas de Rziha dão os valores aproximados do passo p em rampa, em função do passo p_0 em terreno horizontal.

$$\begin{aligned} \text{Em aclives: } p' \alpha &= p_0 (1 - \text{sen } \alpha); \\ \text{em declives: } p'' \alpha &= p_0 (1 + \text{sen } \alpha/2), \end{aligned} \quad (22)$$

sendo α o ângulo da rampa.

Os valores obtidos por essas fórmulas concordam aproximadamente com os dados práticos obtidos por Jordan, para um passo de 77 cm, que damos a seguir.

Rampas	Subida	Descida	Rampas	Subida	Descida
0°	77 cm	77 cm	20°	50 cm	67 cm
5°	70 cm	74 cm	25°	45 cm	60 cm
10°	62 cm	72 cm	30°	38 cm	50 cm
15°	56 cm	67 cm	—	—	—

Para não ter que guardar mentalmente o número de passos, podem ser usados os *podômetros* (Fig. 17) ou contapassos automáticos, em formato de relógio, e que funcionam mantidos no bolso, em posição vertical.

A sacudidela que experimenta o podômetro a cada passo é transmitida a um ponteiro de relógio que vai marcando no mostrador o número de passos dados.

Embora prático, seu emprego exige muito cuidado; e para que os resultados sejam aceitáveis, seu número deve ser de, pelo menos, dois podômetros para a devida comparação dos resultados e correções.

Estão os podômetros sujeitos a desarranjos, razão por que a contagem direta, com anotação em caderneta, após cada centena de passos, oferece mais segurança do que a com seu emprego.

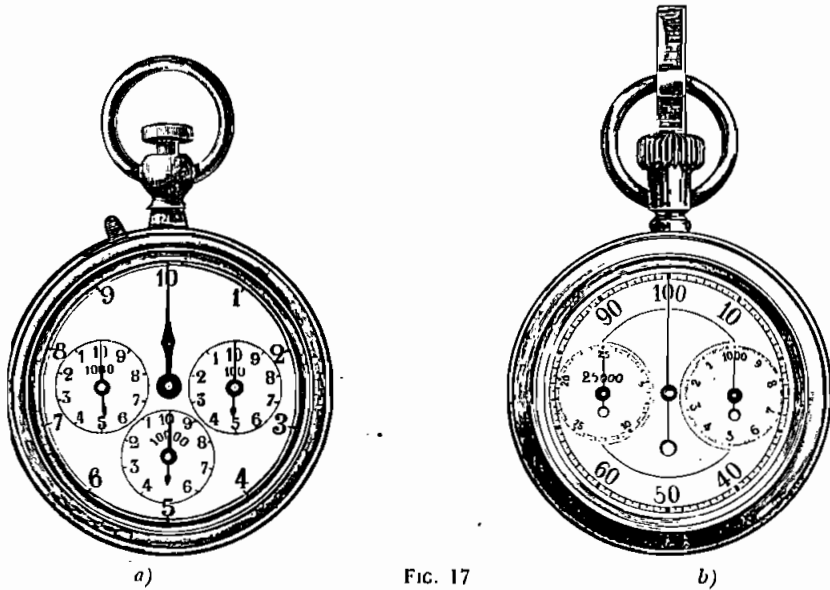


FIG. 17

Os passômetros, que dão o número de metros, em lugar dos passos, com dispositivo para aferição, são inferiores aos primeiros, razão por que não são muito empregados na prática.

b) *Pela velocidade de marcha:* É o processo de medida das distâncias pela velocidade ou tempo de marcha, um dos mais empregados em reconhecimentos. Pode ser feita por um homem, a pé ou a cavalo. Como já vimos, um homem percorre, com velocidade média, de 5 a 6 km por hora.

Para grandes itinerários, trabalhos geográficos e outros, é mais aconselhável o percurso a cavalo.

A velocidade pode ser conhecida, desde que o animal percorra em linha reta a distância de 1 km ou mais, com a anotação do tempo correspondente à cada andadura; assim, em terreno plano, obteremos, em média, para percurso a *passo*, 5 km por hora, a *trote*, 11 km e a *galope*, 23 km; alternadamente, a *passo* e a *trote*, a média é de 8 km e a *trote* e a *galope*, 17 km por hora.

c) *Pelo odômetro:* O *odômetro* é um aparelho que se adapta ao raio da roda de um veículo, permitindo medir, pelo registro do número de voltas, o comprimento percorrido pela mesma ao longo da distância a medir. Consiste em um quadro metálico, com um eixo e disco pesado ligados a um quadrante e índice registrador.

O produto do número de voltas, no fim do percurso, dado pelo odômetro, pela circunferência da roda, fornece o comprimento percorrido.

É um processo de medição direta, dada em função de uma unidade de comprimento — circunferência da roda.

É preciso que o percurso seja feito em bons caminhos, pois se forem cheios de rugosidades e buracos, o resultado não será satisfatório.

Há, ainda, os *dromômetros*, aparelhos idênticos aos anteriores, adaptados em rodas de bicicletas, e os *velocímetros* dos automóveis, que permitem, também, avaliar os percursos aproximados, desde que existam estradas nos contornos a percorrer.

d) *Pelo binóculo, com estadia*: A medição de uma distância pelo binóculo exige que o operador saiba utilizar-se de uma escala milesimal (Fig. 18), gravada num disco de vidro, que é a *estadia*.

A estadia é adaptada na ocular direita do binóculo e cada divisão de sua escala equivale a 5/1 000 da distância.

Sua utilização é dupla, pois se pode avaliar a largura e altura de objetos situados a distâncias conhecidas, ou as distâncias em função dos primeiros. Para tal basta observar, horizontal ou verticalmente, o número de traços interceptados pelo objeto visado e multiplicar ou dividir o resultado por 1 000.

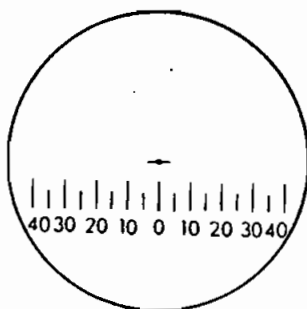


FIG. 18

Assim, uma fila de postes telegráficos, eqüidistantes de 50 m, a distância de um poste a outro abrange, p. ex., na estadia, de 10 a 28 passando por 0, isto é, 28 milésimos; a distância a que nos encontramos dos postes será:

$$\frac{50 \times 1\,000}{28} = \sim 1\,785 \text{ m}$$

e) *Trânsito de mão com estadia*: Os fabricantes americanos Keuffel & Esser Co. constroem uma excelente bússola-eclímetro com estadia, a que deram o nome de *trânsito de mão* (Fig. 19), com o qual se pode medir tanto a orientação dos alinhamentos pelos azimutes, como a

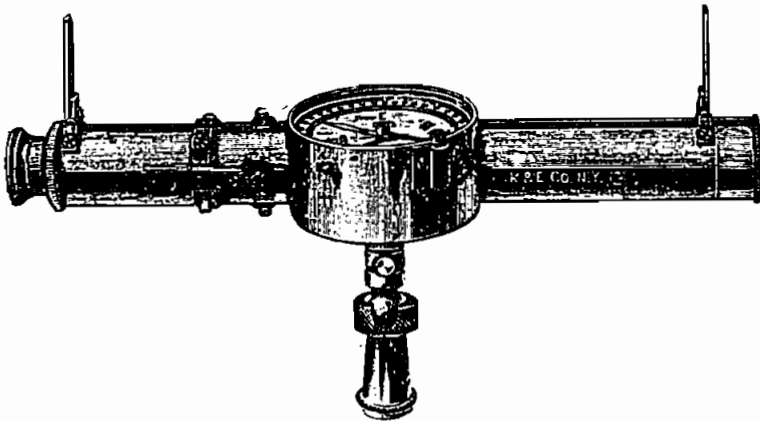
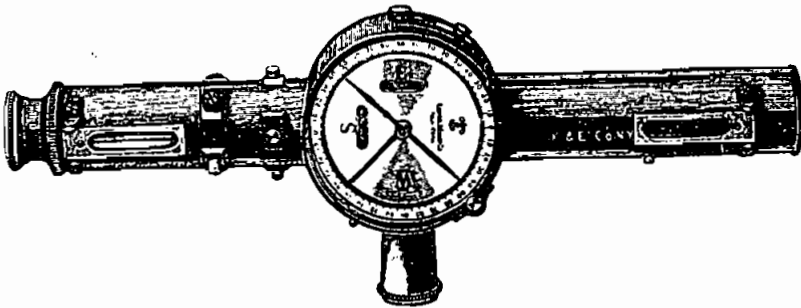
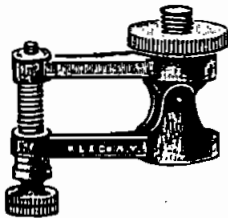


FIG. 19

a) Posição para leitura dos azimutes.



b) Posição para medidas dos ângulos verticais e distâncias com a estadia.



c) Dispositivo micrométrico para nivelar.



d) Campo de visão.

distância indireta pela estadia e os declives, pelas percentagens ou pela inclinação em graus das rampas. Dispõe o aparelho de uma luneta terrestre acromática de 10 polegadas (25 cm) de comprimento e com um aumento de 12 diâmetros. Nela são fixadas duas pínulas que permitem também a visada direta. Um dispositivo helicoidal aperfeiçoado facilita a focalização do objeto visado.

Um clinômetro e altímetro formados por um anel-pêndulo muito sensível e equilibrado, com parada automática, dá os ângulos verticais de grau em grau até 45°, em ambos os sentidos, e, também, as percentagens dos declives.

Os fios suplementares, chamados estadimétricos, $aa'bb'$, (Fig. 20), projetados em uma régua graduada, permitem achar o número gerador (G), isto é, a diferença de leituras dadas pelo fio superior e inferior na referida régua; esse número, multiplicado por 100, em terreno aproximadamente horizontal, dá a distância do ponto visado do instrumento.

$$d = 100 \cdot G \quad (23)$$

Em terreno inclinado, a distância será obtida por:

$$d = 100 \cdot G \cdot \cos^2 \alpha \quad (24)$$

sendo α o ângulo vertical de inclinação.

A bússola, de 70 mm de diâmetro, graduada de grau em grau, é muito sensível e permite a avaliação dos ângulos horizontais magnéticos, de 5 em 5 minutos.

É um aparelho aperfeiçoado e ideal para levantamentos expeditos, sendo sólido, compacto e leve.

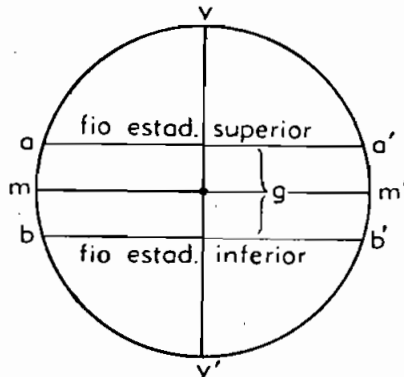


FIG. 20

Os azimutes podem ser obtidos com o auxílio da luneta em terreno plano ou com as pínulas articuladas em terreno inclinado.

f) *Bússola — eclímetro com telêmetro*: A Fábrica Zeiss constrói um ótimo aparelho para levantamentos expeditos, que dá, ao mesmo tempo, a orientação magnética e inclinação das linhas de visada, bem como o afastamento dos pontos; trata-se do telêmetro topográfico *teletop* (Fig. 21).

A vantagem do *teletop* está principalmente em não ser necessária a colocação da régua graduada em cada ponto a levantar, bastando orientá-lo na direção do ponto, fazer a coincidência das semi-imagens obtidas pelo telêmetro óptico e ler na escala a distância correspondente, bem como o azimute e o ângulo vertical respectivo, na bússola e no eclímetro do aparelho.

Convém, assim, o emprego desse instrumento, onde existirem pontos marcantes do terreno, tais como árvores, postes, casas, e em particular, para levantamentos de rochedos, ilhas, grotas, condutos elétricos, etc.

O levantamento em zonas desprovidas de detalhes naturais e em poligonais pode também ser feito com maior rapidez do que com outros aparelhos, desde que se leve em cada ponto a amarrar uma baliza ou uma régua, para as devidas observações de coincidência.

O *teletop* compreende essencialmente um *telêmetro* com base variável (até 200 mm) e um *suporte*, onde se reúne uma base triangular de eixo vertical, o círculo vertical e a bússola (Fig. 21).

A *luneta* do telêmetro pode ser retirada e usada, por exemplo, no balizamento de alinhamentos ou no reconhecimento; seu aumento é de 6 vezes e o campo visual tem a amplitude de 7 graus.

O *telêmetro* é munido de uma *cunha estadimétrica* variável: 1/100, 1/250, 1/500, 1/1 000 e 1/2 000.

As medidas correspondentes, de acordo com cada cunha, são:

para cunha 1/100 de 2 a 20 m; precisão $\pm 0,2\%$
 para cunha 1/250 de 3 a 50 m; precisão $\pm 0,2\%$
 para cunha 1/500 de 6 a 100 m; precisão $\pm 0,5\%$
 para cunha 1/1 000 de 12 a 200 m; precisão $\pm 1\%$
 para cunha 1/2 000 de 25 a 400 m; precisão ± 2 a 3%

O *círculo vertical* é dividido em graus ($\pm 45^\circ$) e pelo índice pode-se avaliar ± 36 minutos e a *bússola* dá os azimutes com a aproximação de 20 minutos.

Modo de operar com o teletop. O telêmetro trabalha segundo o princípio da dupla coincidência ou superposição das imagens. No campo visual da ocular da luneta aparecem duas semi-imagens do objeto visado, separadas por uma linha fina.

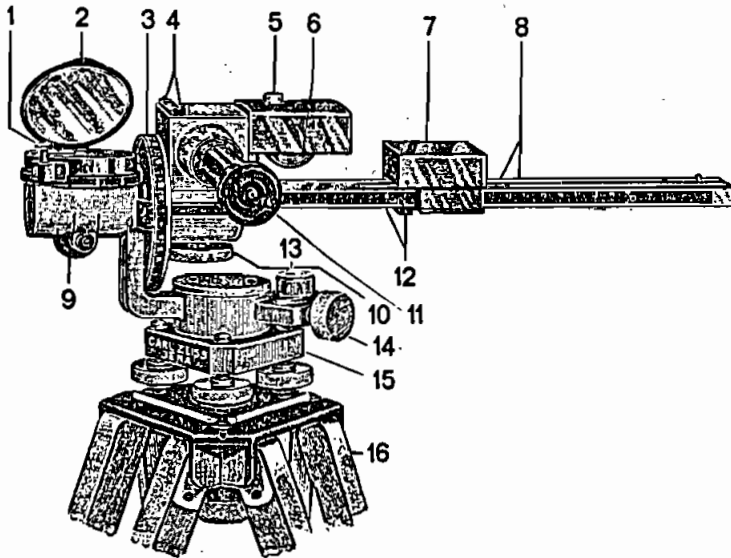
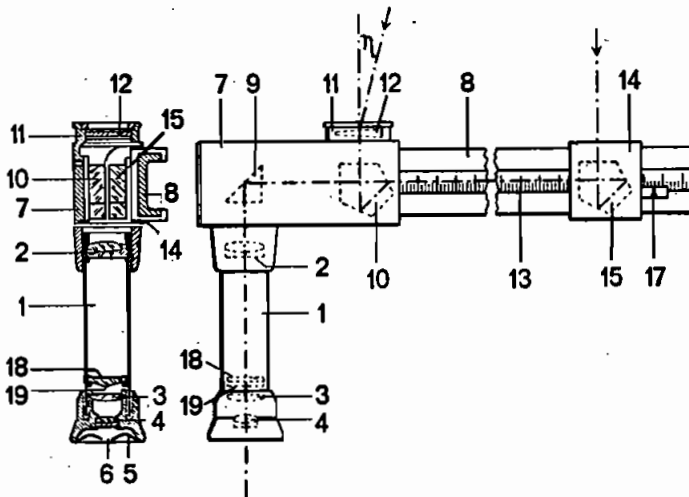


FIG. 21

Vista



Corte

Nomenclatura: 2) Bússola azimutal; 3) Limbo vertical; 6) Cunha estadiométrica;
7) Prisma móvel para estadiometria; 11) Luneta amovível; 12) Escala estadiométrica e índice.

Por uma translação do cárter do prisma móvel (7), pode-se obter a coincidência das semi-imagens que se prolongam mutuamente.

A leitura na graduação estadimétrica pelo índice (12) dá de imediato a distância. Um milímetro da divisão, para a cunha de 1/100, corresponde a 0,1 m; para a de 1/250 — 0,25 m; para a de 1/500 — 0,50 m; para a de 1/1 000 — 1 m e para a de 1/2 000 — 2 m.

Na Fig. 21 vem representado o corte da luneta e a posição dos prismas que permitem as leituras por coincidência; assim (9) é um



FIG. 22 — Modo de operar

prisma triangular, (10) um *prisma pentagonal fixo* e (15) um *prisma pentagonal que é móvel* com o cárter (14).

A *cunha estadimétrica* (12), variável de acordo com a distância e grau de precisão, é adaptada no encaixe (11) por simples aderência.

No interior da luneta, além da objetiva, vidro de campo e objetiva, existe um *prisma duplo* (18) para a separação das imagens do objeto visado, ou da baliza ou régua.

A diferença de nível entre os pontos é obtida com a luneta apontada para um ponto da baliza situado a uma altura igual à do próprio *teletop*.

Assim, o simples produto da distância inclinada pelo seno do ângulo dá a diferença de nível desejada.

Com menor precisão, mas maior rapidez, pode-se usar ainda o *teletop* sem o tripé, adaptando um cabo para usá-lo manualmente (Fig. 23).

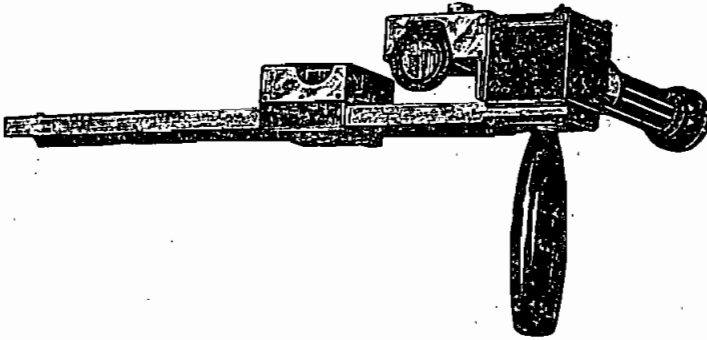


FIG. 23 — Teletop com cabo

g) *Prancheta de explorador*. A Fábrica Gurley constrói um novo tipo de *prancheta de explorador* (Fig. 24), adaptada perfeitamente aos trabalhos de reconhecimento.

É constituída de uma bússola (1) de limbo de celulósido, preso a uma agulha de 3" (76 mm, 2) graduado de 0 a 360°, para a leitura dos azimutes.

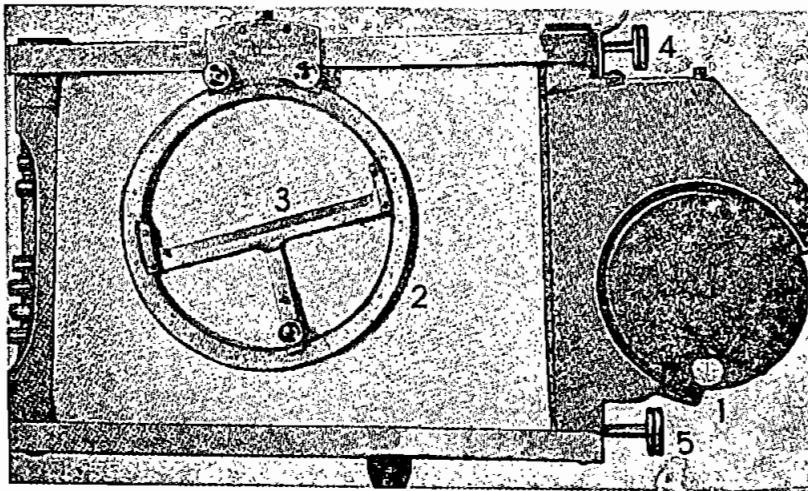


FIG. 24 — Prancheta Gurley (novo tipo)

Um *transferidor* (2) de metal, móvel, graduado do mesmo modo que a bússola, com *régua-alidade* (3), que se desloca para o traçado dos alinhamentos numa escala conveniente.

Dois *rolos de metal*, comandados pelos parafusos (4) e (5), permitem a colocação do papel para o desenho, com 0,20 m de largura, e 1,20 m de comprimento, podendo se deslocar para a frente ou para trás, a fim de permitir a coincidência do centro do limbo com as estações do caminhamento.

As leituras na bússola são sempre feitas num plano horizontal e acontece às vezes que em terrenos acidentados os pontos ficam fora de visada, feita à altura dos olhos, pela mira e alça de mira correspondente; neste caso lança-se mão de um fio a prumo que permitirá aumentar a amplitude da visada.

A prancheta é dotada de um prumo bastão ou de tripé.

22 – Processos diretos de medida das distâncias com diastímetros

a) *Piquetas e estacas*. Para assinalar convenientemente os extremos do alinhamento a medir, empregamos as *piquetas* e as *estacas* ou *testemunhas* (Fig. 25). As piquetas são feitas no mato, de madeira roliça e resistente, com a superfície no topo plana e medindo, no mínimo, 12 cm de comprimento, por 3 a 4 cm de diâmetro; servem para assinalar os vértices dos ângulos, origem e fim das curvas, mudança de aparelho, etc.

Todos os vértices, além disso, são assinalados por tachas de cobre cravadas nos topos das piquetas.

As estacas testemunhas, cravadas à direita das piquetas, numa distância variável de 30 a 50 cm, têm 30 a 40 cm de comprimento e

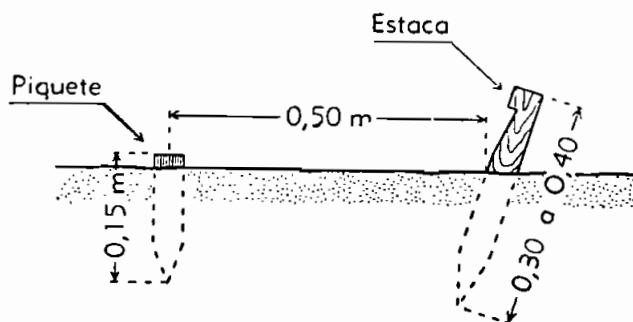


FIG. 25 — Piquetas e estacas

4 cm de diâmetro e são chanfradas na parte superior para permitir a inscrição numérica ou alfabética das estacas.

b) *Balizas*. Para demarcar ou balizar um alinhamento no terreno, é preciso fazer uso de *balizas* (Fig. 26), que podem ser tanto de madeira como de tubo de aço.

Uma baliza de madeira é uma haste bem reta, sextavada, ou oitavada, com 2 m de comprimento, de madeira leve e resistente, terminada em ponta guarnecida de ferro, dividida e pintada de branco e encarnado, de 50 em 50 ou de 20 em 20 cm.

Uma baliza de cano de aço, usada de preferência, tem 2 m de comprimento, 16 a 20 mm de diâmetro e é pintada do mesmo modo que a de madeira.

Há, ainda, as balizas triangulares, reunidas em grupo de seis e amarradas com correia; ocupam pouco espaço, são leves e muito cômodas para o transporte.

Para manter-se uma baliza bem a prumo, deve-se segurá-la levemente com as pontas dos dedos das mãos e em coincidência com a tacha da piqueta, atento ao sinal do operador no instrumento.

Cravar a baliza adiante ou atrás da piqueta só é justificado em levantamento expedito.

c) *Trenas, correntes e fitas de aço*. A *trena de lona* (Fig. 27) é uma fita de pano oleado em que estão ligados ao próprio tecido fios de arame muito fino, para lhes dar consistência e invariabilidade de comprimento.

É dividida, geralmente, de um lado, em metros, decímetros e centímetros e do outro em pés e polegadas inglesas.

Seu comprimento é variável de 10 a 50 metros; na prática usa-se a trena de 20 metros.

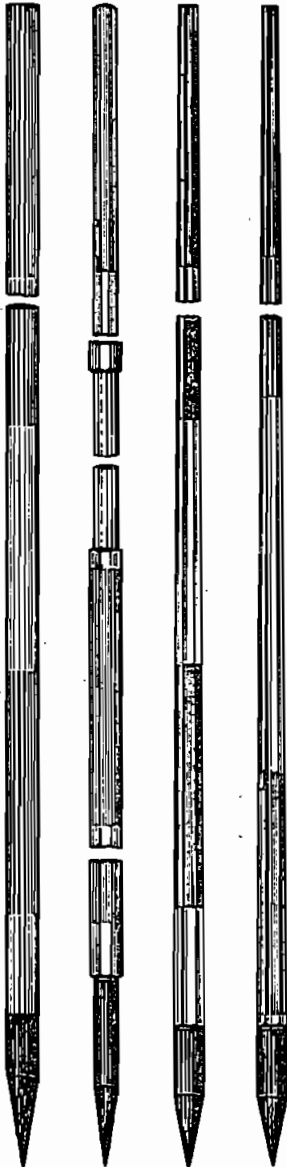


FIG. 26 — Tipos de balizas

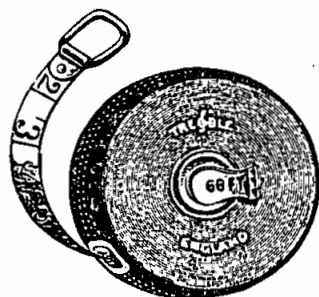


FIG. 27 — Trena de lona

É muito conveniente aferir de vez em quando a trena com um bom metro padrão e levar em conta a correção, se houver, nas medições.

A trena de pano é usada principalmente de detalhes, medida planimétrica de casas e cercas, onde não for exigido muito rigor.

A trena de aço (Fig. 28) oferece maior precisão nas medidas, pois é constituída de uma lâmina de aço inoxidável ou não, de 10 a 12 mm de largura e com divisão métrica de um lado e em polegadas do

outro; seu comprimento normal é de 10, 15 ou 20 m.

A cadeia ou corrente de agrimensura (Fig. 29), usada na medida dos alinhamentos, com bastante cuidado, apesar de apresentar muitos defeitos, ainda é empregada pela comodidade de uso.

Compõe-se a cadeia de agrimensor de 100 fuzis de aço envernizados de preto ou de ferro galvanizado inoxidável, reunidos dois a dois por meio de anéis (elos) do mesmo metal.



FIG. 28 — Trena de aço

A distância de anel a anel, compreendendo um fuzil, é de 20 cm; 10 fuzis e os respectivos anéis medem 2 metros.

Geralmente, de dois em dois metros há uma placa de latão numerada ou um pendente metálico com dentes para facilitar a leitura.

Há correntes com elos circulares não soldados que, com certo tempo de uso, vão se alargando, precisando de aferição para serem usadas; muito melhores são as de elos elípticos e soldados, onde a deformação é bem menor.

A) PLANILHA DE UM LEVANTAMENTO EXPEDITO COM TELÊMETERO "TELETOP" ZEISS

Dados Colhidos no Campo				Funções Trigonom.		DADOS CALCULADOS				
Estac.	Dist. Lidas	Azimutes	Ang. Vertic.	Senos	Co-Senos	Dist. Horiz	Dif. de Nível Calculada	Correções	Dif. de Nível Compensada	Altitudes
1										54.50
1-2	96,00	140°	— 2°00'	0,035	0,999	95,90	— 3,36	+ 0,20	— 3,16	51.34
2-3	88,25	140°	— 0°20'	0,006	0,999	88,16	— 0,53	+ 0,03	— 0,50	50.84
3-4	92,50	141°	+ 0°20'	0,006	0,999	92,40	0,56	0,03	0,59	51.43
4-5	97,25	140°	1°30'	0,026	0,999	97,15	2,53	0,15	2,68	54.11
5-6	99,50	139°	2°15'	0,039	0,999	99,40	3,88	0,23	4,11	58.22
6-7	93,50	140°	0°40'	0,012	0,999	93,41	1,12	0,07	1,19	59.41
7-8	99,10	207°	2°30'	0,044	0,999	99,00	4,36	0,26	4,62	64.03
8-9	91,50	182°	3°00'	0,052	0,999	91,41	4,76	0,28	5,04	69.07
9-10	88,25	179°	3°50'	0,067	0,998	88,07	5,91	0,35	6,26	75.33
10-11	36,10	176°	3°15'	0,057	0,998	36,03	2,06	0,12	2,18	77.51
11-12	92,00	135°	6°20'	0,110	0,994	91,45	10,16	0,59	10,71	88.22
12-13	88,25	134°	8°00'	0,139	0,990	87,37	12,27	0,72	12,99	101.21
13-14	93,25	132°	10°25'	0,181	0,984	91,76	16,88	0,99	17,87	119.08
14-15	41,25	179°	— 4°30'	0,078	0,997	41,13	— 3,22	0,19	— 3,03	116.15
15-16	34,87	217°	— 17°30'	0,301	0,954	33,27	— 10,50	0,62	— 9,88	106.17
16-17	11,80	128°	1°20'	0,023	0,999	11,79	0,27	0,02	0,29	106.46
17-18	26,37	140°	15°30'	0,267	0,964	25,42	7,04	0,41	7,45	113.91
18-19	36,50	71°	10°40'	0,185	0,983	35,88	6,75	0,40	7,15	121.06
19-20	44,28	138°	5°45'	0,100	0,995	44,08	4,43	0,26	4,69	125.75
20-21	27,12	155°	0°50'	0,015	0,999	27,09	0,41	0,02	0,43	126.18
21-22	24,37	118°	5°30'	0,096	0,995	24,25	2,34	0,14	2,48	128.66
22-23	14,70	121°	5°30'	0,096	0,995	14,63	1,41	0,08	1,49	130.15
23-24	23,75	69°	16°50'	0,290	0,957	22,73	6,89	0,40	7,29	137.44
24-25	24,15	104°	20°00'	0,342	0,940	23,27	8,46	0,50	8,96	146.40
25-26	107,50	156°	4°10'	0,073	0,997	107,18	7,85	0,46	8,31	154.71
26-27	66,30	169°	6°50'	0,119	0,993	65,84	7,89	0,46	8,35	163.06
27-28	62,75	130°	6°50'	0,119	0,993	62,31	7,47	0,44	7,91	170.97
28-29	30,00	220°	7°40'	0,133	0,991	29,73	3,99	0,23	4,22	175.19
29-30	25,00	197°	19°00'	0,326	0,946	23,65	8,15	0,48	8,63	183.82
30-31	42,25	199°	15°50'	0,273	0,962	40,64	11,53	0,68	12,21	196.03
31-32	37,50	173°	15°30'	0,267	0,964	36,15	10,01	0,59	10,60	206.63
32-33	50,50	178°	11°45'	0,204	0,979	49,44	10,30	0,60	10,90	217.53
33-34	101,00	178°	0°00'	1,000	0,000	101,00	0,00	0,00	0,00	217.53
34-35	201,00	165°	7°10'	0,125	0,992	199,39	23,13	1,47	26,60	244.13
35-36	31,00	220°	1°20'	0,023	0,999	30,97	0,71	0,04	0,75	244.88
36-37	59-25	149°	7°20'	0,128	0,992	58,78	7,58	0,44	8,02	252.90
37-38	95,00	160°	4°30'	0,078	0,997	94,72	1,41	0,43	7,84	260.74

B) POLIGONAL LEVANTADA A TELÊMETRO NO MORRO DE TERESÓPOLIS (PORTO ALEGRE)

Escala 1 : 7500

PLANTA



O comprimento das correntes varia de 20 a 30 metros.

A *fita de aço* (Fig. 30), também chamada *trena*, enrolada em tambor ou em cruzeta, com cabos distensores nas extremidades, é uma lâmina

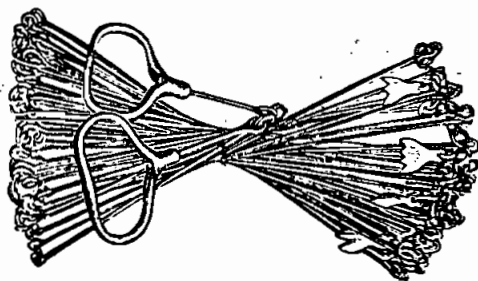


FIG. 29 — Corrente de agrimensor

de aço especial de 20 m de comprimento e 10 mm de largura, numerada de metro em metro, com os meios metros assinados por furos ou rebites e os decímetros, por pequenos orifícios, é um dos mais precisos diastímetros para a medida dos alinhamentos.

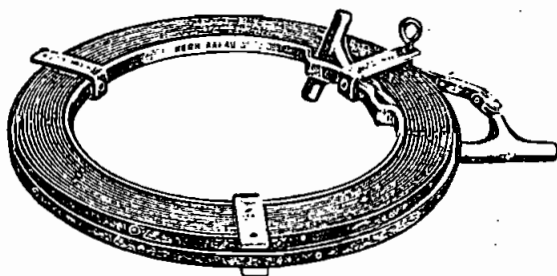


FIG. 30 — Fita de aço

Sua vantagem está em poder ser retirada do tambor, com adaptação de punhos, para a devida distensão, com menor esforço do que nas correntes, e não estar sujeita a nós; tem, entretanto, o inconveniente de poder ferir as mãos do operador por ser uma lâmina de aço e exigir cuidado na ocasião em que está torcida, podendo-se partir ou dar medida afetada de erro, devido à torção.

A *fita de aço com cabo* (Fig. 31) é ótima para levantamento preciso dos detalhes.

Os fabricantes Keuffel & Esser introduziram no mercado excelentes fitas de aço tipo *Champion*, estreitas, extraleves e reforçadas, que satisfazem plenamente, na medida precisa dos alinhamentos.

São fabricadas com 20, 25, 50 e 100 metros de comprimento, são de aço inoxidável, numeradas nos dois sentidos de meio em meio metro e com metro padrão nas extremidades, para avaliação das frações.

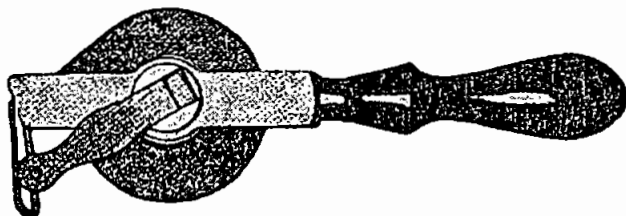


FIG. 31 — Idem, com cabo

d) *Jogo de fichas*. Um jogo de fichas (Fig. 32) é composto de 11 fichas ou hastes de ferro, com 6 mm de diâmetro, 55 cm de altura, com argolas de 5 e 8 cm de diâmetro, e pintadas de branco ou de preto; um anel maior com fecho serve para prender as fichas.

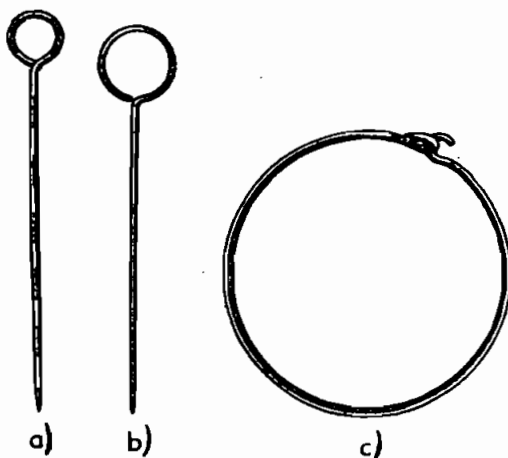


FIG. 32 — Jogo de fichas

Para medir um alinhamento, é cravada uma ficha no ponto inicial de partida, e as outras dez leva-as consigo o baliza de vante que, após cada *trenada*, finca uma no chão, que o baliza de ré ao mudar-se vai arrancando, procedendo-se do mesmo modo nas *trenadas*.

Quando o baliza de vante estiver sem fichas, anota o operador na caderneta uma *talha*, ou 200 metros, e renova-se a operação até a

conclusão da medida. O número de talhas, de fichas e a fração da trenada final, darão o comprimento total do alinhamento medido. A média das medidas, de ida e de volta, dará o comprimento verificado do alinhamento.

§ 6 – Medida dos ângulos horizontais com bússolas, pantômetros e esquadro

23 – Introdução

Em Topografia, considera-se somente a medida dos ângulos contidos em dois planos: um, *horizontal*, nas operações de planimetria; outro, *vertical*, nas operações de altimetria. Os primeiros são chamados *ângulos horizontais* ou *azimutais*; os segundos, *ângulos verticais* ou *zenitais*.

Os instrumentos antigos permitiam a avaliação dos ângulos no seu plano do espaço, mais ou menos inclinados, e, para obter o valor da projeção horizontal desses ângulos, era necessário resolver trigonometricamente para cada um deles o problema conhecido sob o nome de *redução ao horizonte*. Atualmente, todos os instrumentos angulares compreendidos sob a denominação de *goniômetros* dão imediatamente, sem cálculo, não o ângulo do espaço, mas a sua projeção sobre o plano horizontal do lugar. Na avaliação dos ângulos, devem-se distinguir duas espécies de ângulos: os que os alinhamentos fazem entre si e os que os alinhamentos fazem com uma direção constante, os quais são mais particularmente designados sob o nome de *direções*.

24 – Medida das direções. Bússola

A bússola é um instrumento destinado a determinar a direção dos alinhamentos em relação à meridiana dada pela agulha magnética, suposta constante. A agulha é sustentada por um pivô ou eixo vertical fixo no centro de um círculo horizontal cuja circunferência é dividida geralmente em graus e metades de grau.

O valor das indicações da bússola depende da sensibilidade da agulha e da constância com que ela se conserva no meridiano magnético. A primeira condição depende da facilidade com que ela se move em redor do pivô; a segunda, da força que a obriga a essa posição.

Satisfaz-se a primeira fazendo com que a parte da agulha que se apóia no pivô seja de ágata; a segunda, imantando fortemente a agulha.

A agulha magnética das bússolas tem geralmente a forma de um losango de aço alongado, cujo comprimento varia com as dimensões da bússola. Numa localidade, quando em repouso e livre de atrito e de atrações, a agulha toma uma posição quase constante, que coincide proximamente com a direção norte-sul magnética.

25 – Pólos magnéticos da Terra

Tendo a Terra as propriedades de um grande magneto, as extremidades da agulha são atraídas por duas forças atuando em dois pontos diametralmente opostos, que são os pólos magnéticos da Terra, os quais não coincidem com os pólos geográficos.

A linha que une os pólos magnéticos da Terra é denominada *meridiana magnética*; a ponta da agulha que se dirige para o pólo magnético do N é chamada ponta norte, a outra, ponta sul.

26 – Inclinação da agulha

Em todo ponto equidistante dos pólos magnéticos da Terra, a agulha é igualmente atraída; mas quando a agulha estiver colocada em ponto que diste desigualmente dos pólos magnéticos, ela será mais atraída pelo mais próximo, e inclinar-se-á para ele.

Este desvio que a agulha experimenta no sentido vertical é o que se denomina inclinação da agulha; no hemisfério norte da agulha será mais atraída; no hemisfério sul a atração será mais forte para o lado sul.

Para anular a inclinação da agulha é necessário equilibrá-la com um peso qualquer, que será colocado, no primeiro caso, ao lado sul, e, no segundo, ao lado norte, fazendo com que a agulha se conserve num plano horizontal.

27 – Declinação magnética

O meridiano magnético e o meridiano astronômico ou geográfico formam entre si um ângulo variável que tem o nome de declinação magnética.

Quando o meridiano magnético fica à *direita* do meridiano verdadeiro, a declinação é *oriental*; quando fica à *esquerda* é *ocidental*. Em uma mesma localidade a agulha magnética não aponta constantemente para uma direção determinada; a direção da agulha sofre variações que são denominadas variações de declinação. Essas variações podem ser classificadas segundo os períodos de tempo que são considerados. Assim, denominam-se variações secular, anual, mensal e diária.

A variação secular tem grande importância no caso da leitura de uma carta. As outras três espécies de variações pouca influência têm, atendendo ao grau de exatidão da bússola.

A variação diária da declinação da agulha em Porto Alegre tem uma amplitude de 9'; um valor mínimo verifica-se às 11 horas, e o máximo às 13 horas. Devem-se evitar trabalhos com a bússola nesse intervalo de tempo, pois as variações são bruscas e podem afetar a exatidão das operações.

A declinação média em Porto Alegre foi em 1951 de 8°17' ocidental.

Devem-se ter em vista também as variações irregulares da agulha, devidas às tempestades magnéticas, as quais podem atingir uma amplitude de 20'.

28 — Atração local

As atrações locais são devidas à influência que exercem os objetos de ferro sobre a agulha imantada, bem como certos minerais contendo ferro, como a pirita e a magnetita. Tem-se observado também que algumas rochas eruptivas exercem às vezes influência sobre a agulha.

Um dos melhores meios de reconhecer a atração local consiste em fazer diversas observações ao longo de um alinhamento ou levantar um pequeno polígono e verificar se ele fecha.

A *variação geográfica* é muito importante para o topógrafo. Lugares de *latitudes e longitudes* diferentes têm, também, *declinações magnéticas* diferentes.

Para o estudo dessas variações, o *Observatório Nacional* do Rio de Janeiro publica em seu Anuário um mapa do país, com o traçado das *curvas isopóricas*, lugar geométrico das regiões que têm a mesma variação anual da declinação magnética e as *curvas isogônicas*, lugar geométrico dos pontos de uma região, que tem a mesma declinação magnética.

Esse mapa isogônico-isopórico do Brasil, em escala reduzida, vem em outra folha deste volume, acrescido das declinações de algumas cidades do nosso país. Usando esse mapa, podemos obter a declinação magnética numa ano qualquer em qualquer ponto do território nacional, por meio da expressão

$$\delta_t = \delta_i + v(t - 1935) \quad (25)$$

onde δ_t é o valor desejado da declinação num ponto de coordenadas geográficas dadas e interpoladas no mapa, para o ano t (ano e fração decimal do ano);

δ_i é o valor da declinação em janeiro de 1935, obtido por interpolação gráfica no mapa;

v é o valor da variação de declinação também obtido do mapa por interpolação.

Por exemplo, procuramos o valor da declinação em Porto Alegre em julho de 1951 (1951,8).

$$\begin{aligned} \text{Sejam: } \varphi \text{ de P. Alegre} &= -30^{\circ}2' \\ \lambda \text{ de P. Alegre} &= 51^{\circ}14' \end{aligned}$$

Por interpolação entre as curvas encontramos $v = 9'6$ (minutos de arco, por ano) e entre as curvas isogônicas $\delta_i = 5^{\circ}42'$.

Assim

$$\begin{aligned} \delta_t \text{ (P. Alegre) em agosto de 1951} &= 5^{\circ}42' + 9'6 \\ (1951,8 - 1935) &= 8^{\circ}23' \text{ W (ocidental)} \end{aligned}$$

29 – Azimute magnético (Az)

Chama-se *Azimute magnético* de um alinhamento o ângulo que a direção deste alinhamento faz com o meridiano magnético (Fig. 33).

Os azimutes variam de 0° a 360° e são contados a partir da ponta *N* da agulha no sentido dos ponteiros dum relógio (quando voltado com o mostrador para cima).

Assim, admitindo que:

$$\text{ângulo } NOA = 45^\circ$$

$$\text{ângulo } NOB = 130^\circ$$

$$\text{ângulo } NOC = 220^\circ$$

$$\text{ângulo } NOD = 310^\circ, \text{ teremos:}$$

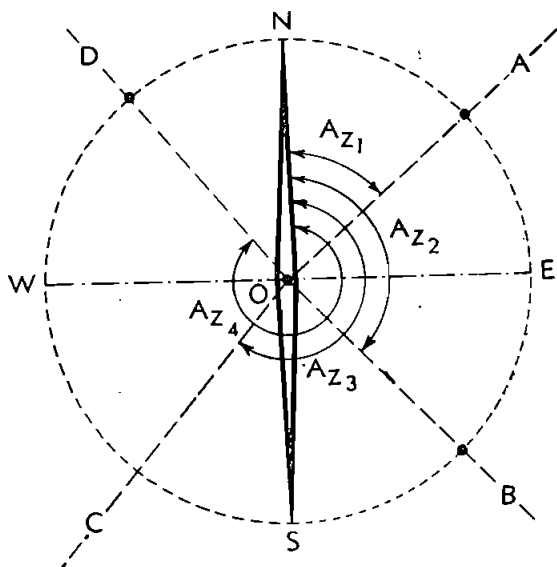


FIG. 33

$$\text{Azimute de } OA = 45^\circ (Az_1)$$

$$\text{Azimute de } OB = 130^\circ (Az_2)$$

$$\text{Azimute de } OC = 220^\circ (Az_3)$$

$$\text{Azimute de } OD = 310^\circ (Az_4)$$

Estando o alinhamento na direção *ON*, o seu azimute será 0° ; se estiver na direção *OS* será 180° ; se estiver em *OE*, o azimute será 90° e em *OW*, 270° .

30 – Rumor magnético (R)

Chama-se *rumo* de um alinhamento o ângulo que ele forma com a ponta da agulha que lhe fica mais próxima (Fig. 34).

Os rumos são contados para a direita ou para a esquerda, conforme se acham mais próximos de *E* ou de *W*. Os rumos variam de 0° a 90° .

Assim,

ângulo $NOA = 40^\circ$; Rumor $OA = N40^\circ E$
 ângulo $SOB = 45^\circ$; Rumor $OB = S45^\circ E$
 ângulo $SOC = 70^\circ$; Rumor $OC = S70^\circ W$
 ângulo $NOD = 78^\circ$; Rumor $OD = N78^\circ W$

Pode-se escrever também $40^\circ NE$, $70^\circ SW$, etc., ao invés de $N 40^\circ E$ e $S 70^\circ W$, mas a primeira maneira de escrever é mais fácil de entender.

Existem bússolas cuja graduação vai de 0° a 90° a partir da ponta norte e da ponta sul, dando assim diretamente os rumos.

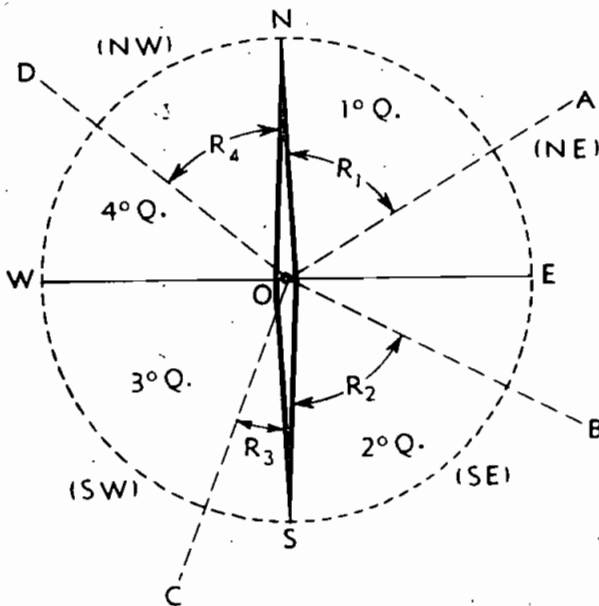


FIG. 34

31 – Conversão de azimutes em rumos e vice-versa

Consideremos os alinhamentos OA , OB , OC e OD (Fig. 35), situados respectivamente nos primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes,

e sejam os rumos: de $OA = R_1$, $OB = R_2$, $OC = R_3$, $OD = R_4$, sendo $R_1 = N 45^\circ E$, $R_2 = S 60^\circ W$, $R_3 = S 30^\circ E$, $R_4 = N 45^\circ W$.

Conforme vemos na figura, o azimute de OA (Az_1) é o mesmo rumo de OA , ou seja $Az_1 = 45^\circ$; o azimute de OB (Az_2) é o ângulo $NOB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; o de OC (Az_3) será o ângulo $NOC = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ e o azimute de OD será o ângulo $NOD = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ (Az_4).

Assim, podemos dizer que para os alinhamentos situados no primeiro quadrante, o azimute é igual ao rumo; no segundo quadrante o azimute é igual a 180° menos o rumo; no terceiro quadrante o azimute é igual a 180° mais o rumo; e no quarto quadrante o azimute é igual a 360° menos o rumo.

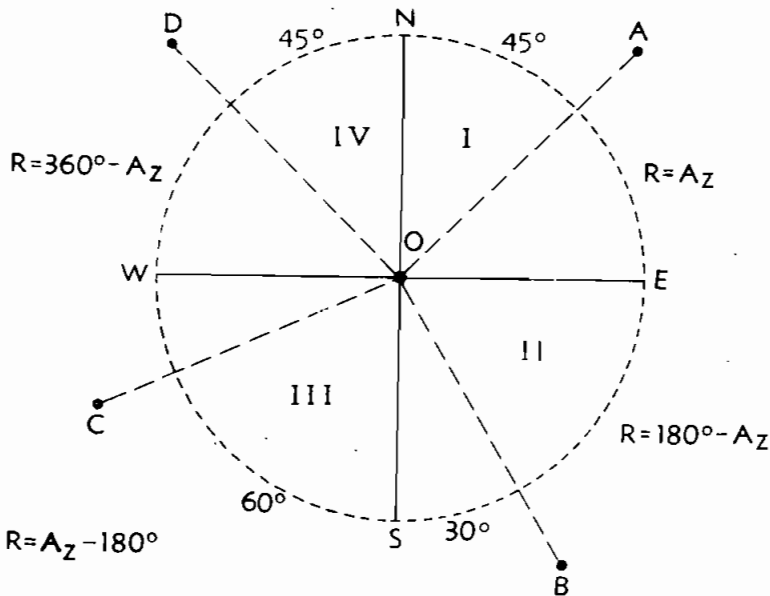


FIG. 35

32 - Orientação magnética

Chamam-se respectivamente *origem* e *fim* de um alinhamento os pontos onde se inicia e termina este alinhamento.

O rumo ou azimute é tomado na origem visando para o fim e vice-versa. Todo alinhamento tem dois azimutes, que diferem entre si de 180° e são chamados recíprocos. Os rumos da origem para o fim e vice-versa têm o mesmo valor angular, mas estão situados em quadrantes diametralmente opostos.

Quando se trata de um alinhamento muito extenso devem-se *verificar* os azimutes e os rumos, o que se faz centrando a bússola em diversos pontos do alinhamento ou unicamente no fim, e ler o azimuth ou rumo da mesma maneira que foi feito na origem.

33 - Tipos de bússola

A bússola de agrimensor, comumente usada, consiste essencialmente em uma agulha magnética livremente suportada no centro de um círculo horizontal graduado ou *limbo*.

A este círculo estão ligadas duas *pinulas*.

A agulha e o círculo graduado estão fechados em uma cápsula ou caixa de latão munida de uma tampa de vidro, sendo o conjunto adaptado a um suporte convenientemente munido de dispositivo que permite horizontalizar a chapa do limbo.

A agulha magnética é uma barra de aço, de 6 ou mais centímetros de comprimento, fortemente imantada e apoiada ou suportada por um pivô ou ponta aguçada em torno da qual gira livremente.

Em toda e qualquer localidade, soltando a agulha da bússola, esta se manterá numa mesma posição e aproximadamente coincidente com a linha norte-sul magnética local.

As pontas da agulha são atraídas por duas forças que atuam em dois pontos diametralmente opostos da Terra.

Estes dois pontos são os pólos magnéticos que não distam muito dos pólos geográficos da Terra e são denominados, respectivamente, pólo magnético norte e sul.

Chamam-se ponta norte e ponta sul da agulha as pontas que indicam os respectivos pólos.

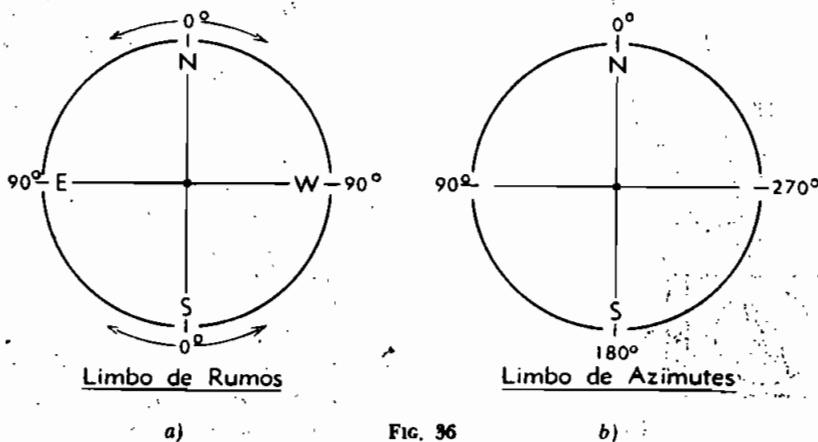


FIG. 36

Uma agulha magnética, quando se aproxima de um dos pólos da Terra, manifesta a tendência de inclinar-se para esse pólo com a ponta do mesmo nome; assim, em latitudes austrais como a nossa, será a ponta sul a que deve ser contrabalançada com fio fino metálico enrolado em torno dessa ponta.

As pínulas são duas barras que se dispõem verticalmente na extremidade da mesa da bússola, e são munidas de aberturas ou janelas na metade da altura e de fendas com um fio de cabelo na outra extremidade.

O diâmetro do círculo é um pouco maior que o comprimento da agulha e a graduação do mesmo círculo, chamado *limbo*, geralmente é de meios graus e numerados em cada 5 graus.

Há dois tipos de graduação, que caracterizam as bússolas, conforme a graduação for de 0 a 90°, em ambos os sentidos a partir dos extremos de um diâmetro ou *linha de fé*, ou num só sentido, de 0 a 360°.

Ao primeiro tipo de graduação correspondem as bússolas de rumos (Fig. 36-a) e ao segundo (Fig. 36-b), as bússolas azimutais.

Chama-se de *rumo* magnético de um alinhamento ao ângulo que ele forma com a ponta da agulha que lhe fica mais próxima e é contado para a direita ou para a esquerda, conforme se acha mais próxima de *este* (E) ou de *oeste* (W).

34 - Bússolas de alidade excêntrica. Erro

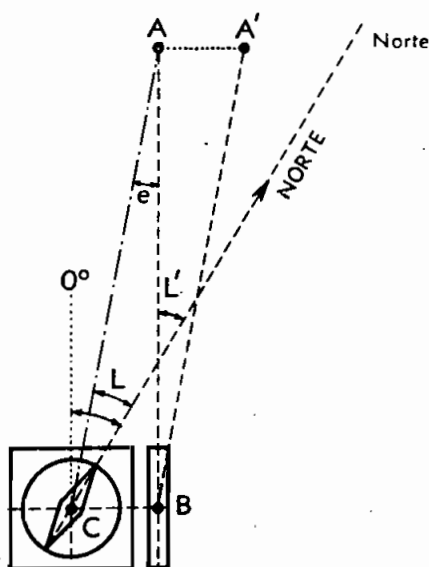


FIG. 37

Estas bússolas constam em geral de uma caixa quadrada de madeira ou metal, à qual está fixa uma alidade lateral. A graduação do limbo pode dar $\frac{1}{2}$ ou um quarto de grau. As bússolas são munidas de nônio; mas a aproximação que se obtém por estimativa é suficiente, pois se trata de um instrumento que, por sua natureza, não pode fornecer muita precisão. A alidade de pínulas permite visar nos dois sentidos sem girar o aparelho.

A bússola de alidade excêntrica tem o inconveniente de dar sempre um erro na medida dos azimutes.

Com efeito, em lugar de medir o azimute $360^\circ - L$ (Fig. 37), mede-se o azimute $360^\circ - L'$; ora, $L' = L + e$. Comete-se, portanto, um erro igual a e .

O ângulo e , sendo muito pequeno, pode-se substituí-lo pela sua tangente, $tg e = \frac{BC}{AB}$. O erro é, como se vê, proporcional à excentricidade da alidade e inversamente proporcional à distância AB .

Sendo $BC = 10$ cm, temos:

Para $AB =$	10 m	20 m	30 m	40 m	50 m	100 m
$e =$	34'12"	17'0"	11'30"	8'30"	7'0"	3'0"

Um ângulo de 7 minutos sendo geralmente inapreciável na bússola, poder-se-á desprezar o erro de excentricidade para os alinhamentos maiores de 50 m. Para alinhamentos menores, pode-se corrigir o erro de excentricidade visando um ponto A' (Fig. 37), distante de um comprimento $A'A$ igual à excentricidade da bússola.

35 - Bússolas de alidade central

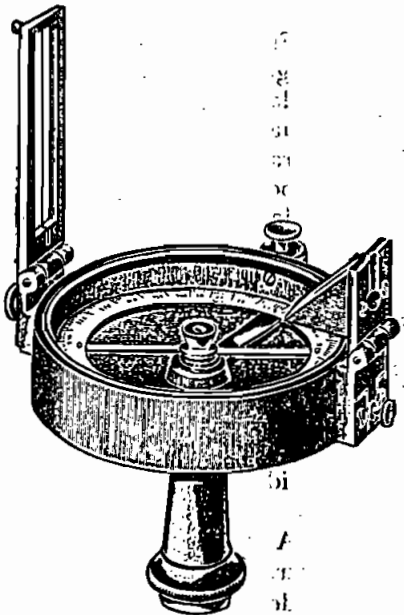


Fig. 38 - Bússola prismática azimutal

As bússolas de alidade central não apresentam o erro precedente (excentricidade). Constam, em geral, de uma régua de pínulas no centro da qual está adaptada uma bússola; quando a alidade é de luneta, esta pode estar colocada abaixo ou acima do limbo da bússola.

Damos na (Fig. 38) um tipo de bússola prismática azimutal, em que uma das pínulas é substituída por uma lupa prismática para fácil leitura do azimute.

O limbo é preso à agulha e tem 65 mm de diâmetro com a divisão em graus.

Na (Fig. 39), vemos um tipo americano de bússola de rumos, GURLEY, com agulha magnética de 5" (127 mm) e afastamento das pínulas de 15" (381

mm); pode ser usada com tripé ou prumo bastão; 2 níveis de bolha permitem horizontalizar a bússola para a leitura conveniente dos rumos.

Um tipo muito prático para grandes itinerários, usado para fins civis ou militares, é a bússola BEZARD (Fig. 40), pequena e simples, de visada e leitura simultâneas, com marcas fosforescentes para trabalho noturno. Permite dar também as declividades dos alinhamentos.

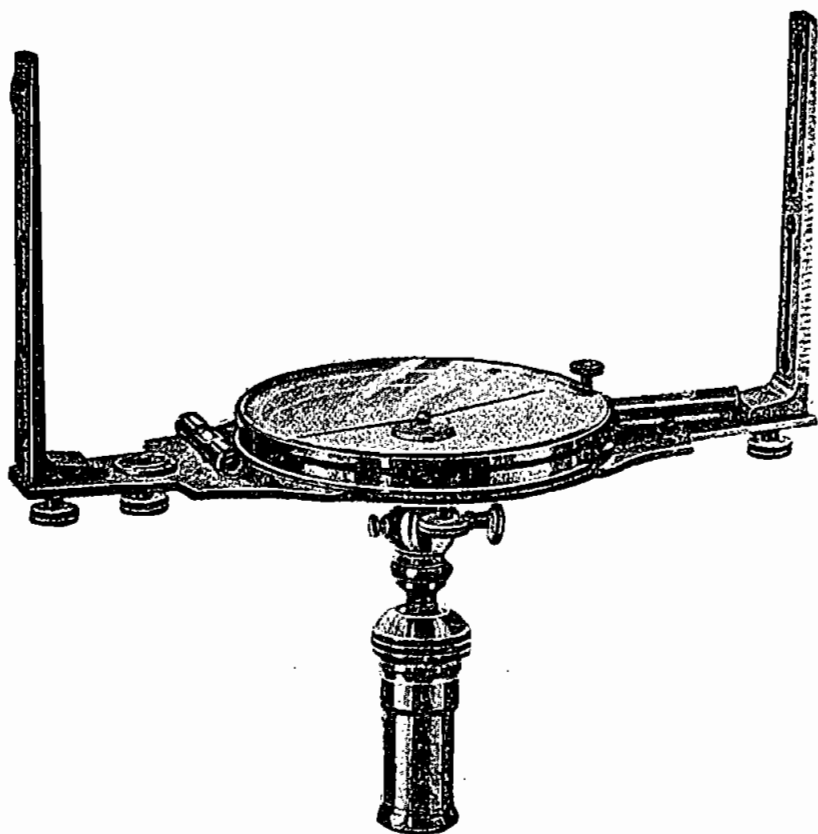


FIG. 39 — Bússola de rumos — Gurley

As condições a que toda bússola em bom estado deve satisfazer são as seguintes:

I) A agulha deve ser sensível, isto é, o pivô deve ter a ponta bem aguçada e a imantação da agulha ser bastante forte;

II) O plano vertical deve passar pelo pivô e pelas extremidades da agulha, isto é, o pivô deve ser perfeitamente vertical;

III) O pivô deve estar perfeitamente no centro do limbo ou do círculo graduado.



FIG. 40 — Bússola Bezard

36 — Pantômetro

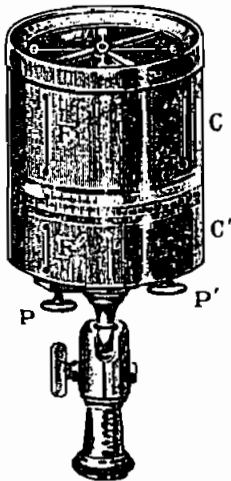


FIG. 41 — Pantômetro simples

O *esquadro goniométrico* ou *pantômetro*, usado em terrenos planos, se compõe essencialmente de um corpo cilíndrico, formado por 2 tubos (Fig. 41), de mesmo raio e mesmo eixo, superpostos, com 6 a 9 cm de diâmetro e 10 a 12 cm de altura total.

O cilindro inferior C' , onde existe um sistema de pínulas formado por uma janela F' e um fio distendido no outro lado, é fixado pelo parafuso P' na direção de um dos vértices do ângulo a medir; esse cilindro é graduado de 0 a 360° .

O cilindro superior C , encimado por uma bússola azimutal e nível esférico, tem as mesmas pínulas do inferior e mais outras dispostas em ângulo reto, para o levantamento de normais aos alinhamentos; é pro-

vido de um vernier, com a aproximação de 2 minutos, e onde são feitas as leituras dos ângulos, acionando sobre o parafuso *P*.

O pantômetro simples é de construção singela e rústica e sua precisão é de 4 a 6 minutos por ângulo lido.

O *pantômetro de luneta* (Fig. 42) com nível de bolha *N*, círculo vertical, parafusos de pressão e de chamada, é um *teodolito* rudimentar e dá melhores resultados que o pantômetro simples, permitindo operar em terrenos acidentados e com visão melhor. O limbo ou círculo vertical dá o ângulo vertical das linhas de visada e, conseqüentemente, as diferenças de nível entre as estações.

A luneta dos pantômetros é geralmente a *luneta astronômica* que dá, dos objetos visados, uma imagem invertida.

Os pantômetros, como as bússolas, podem apresentar defeitos de construção ou desarranjos que devem ser ajustados ou retificados, antes de seu emprego. A correção dos *níveis* consiste em nivelar num sentido, dar uma rotação de 180° e corrigir metade do afastamento da bolha, se hou-

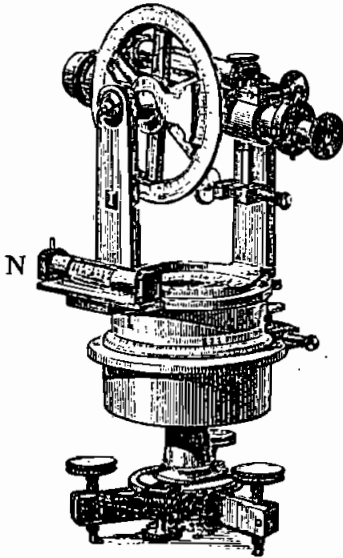


FIG. 42 — Pantômetro de luneta

ver, pelo parafuso de correção do nível.

A *coincidência dos zeros do limbo e vernier* deve ser retificada com a ajustagem dos planos de visada dados pelas fendas correspondentes das duas partes do pantômetro. Qualquer diferença deve ser anotada, para a correção no ângulo lido, pois é defeito de construção.

O *plano de visada*, dado através da luneta, deve ser *coincidente* com o das pínulas; isto é obtido se visamos com as últimas uma baliza vertical ou canto de edifício e verificarmos se há correspondência.

A correção, se necessária, é feita pelo parafuso de correção do retículo.

37 — Esquadro de agrimensor

Para o traçado de normais, linhas a 45° ou bissetrizes é empregado o *esquadro de agrimensor*, o mais simples dos instrumentos de pínulas (Fig. 43).

O esquadro de agrimensor é cilíndrico ou esférico, de eixo vertical, em cobre fino, de 6 a 8 cm de diâmetro e de 10 a 12 cm de altura, contendo pínulas dispostas em ângulo reto e de 45° , num total de 8 pínulas.

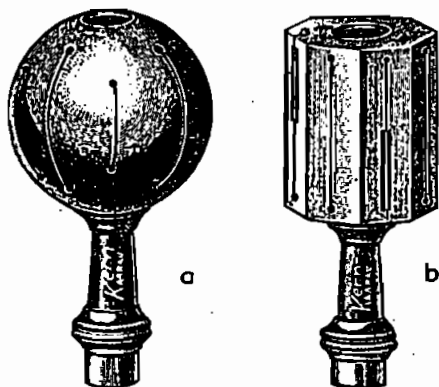


FIG. 43 — Esquadro de agrimensor

Os esquadros cilíndricos e octogonais (Fig. 43-b) são usados em terreno plano e os esféricos (Fig. 43-a) em terreno acidentado.

Devemos ter o cuidado de verificar se, efetivamente, as pínulas em ângulo reto e a 45° interceptam alinhamentos normais ou bissetrizes; é fácil a verificação, dada a possibilidade de observarmos, com pínulas duplas, nos dois sentidos, tal como se faz com um simples esquadro de desenho.

Devido à construção em geral defeituosa e ao pequeno diâmetro, há uma imprecisão média de ± 10 cm na marcação de uma normal, a 50 m, o que corresponde ao erro angular de ± 10 minutos.

Há esquadros que dispõem na parte superior de uma pequena bússola e nível esférico, que facilita a instalação e traçado de bissetrizes.

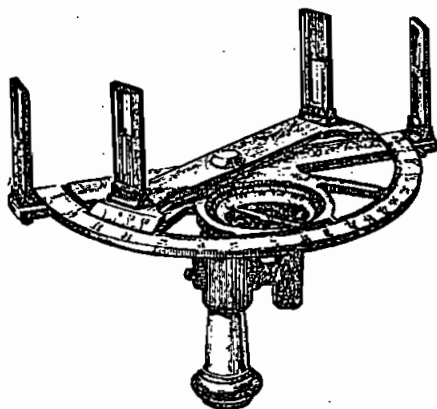


FIG. 44 — Grafômetro

38 — Grafômetro

O grafômetro (Fig. 44) é um instrumento composto de um limbo circular ou semi-circular, como o de um transferidor, graduado nos dois sentidos de 0 a 180° , tendo nas extremidades do diâmetro duas pínulas fixas, *A* e *B*, para a orientação na direção de um dos alinhamentos; este diâmetro e as duas pínulas formam a *alidade fixa*.

Concêntrica ao limbo, há a *alidade móvel*, que se orienta na direção do outro alinhamento, sendo o ângulo formado pelos mesmos medido no vernier respectivo.

Uma bússola interna permite a orientação e um pequeno nível esférico a horizontalidade do prato do limbo.

A calagem é feita por uma articulação ou *joelho* fixado ao tripé.

Modernamente são construídos os esquadros-grafômetros, de limbo completo e pínulas mergulhantes, mais precisos e mais fáceis de operar. A precisão de um grafômetro e de um pantômetro é idêntica.

39 – Verificação de uma bússola

a) Verificar se o pivô da agulha não está colocado excêntricamente. Reconhece-se este defeito quando a diferença das indicações lidas nas duas pontas da agulha não iguala 180° . A partir dessa posição até a posição perpendicular, o erro cresce de 0 ao máximo. Uma observação somente não basta para descobrir o defeito, porque existe uma posição $0'$ em que as pontas da agulha marcariam o mesmo diâmetro, e a diferença das duas leituras seria igual a 180° .

Pode-se corrigir esse erro tomando uma média das duas leituras nas extremidades, da qual se subtraem 90° para ter o azimute exato. Com efeito, seja C o centro do limbo e C' o eixo do pivô. O azimute que se quer medir é α (Fig. 45), ao passo que se lê no limbo o arco β ; ora, α é o ângulo de 2 secantes que se cortam no interior do círculo,

$$\text{logo } \alpha = \frac{NA + BS}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} \text{ lê-se nas pontas } N \text{ e } S \text{ da agulha os}$$

valores β e γ , mas $BS = \gamma = \gamma' - 180^\circ$.

Portanto:

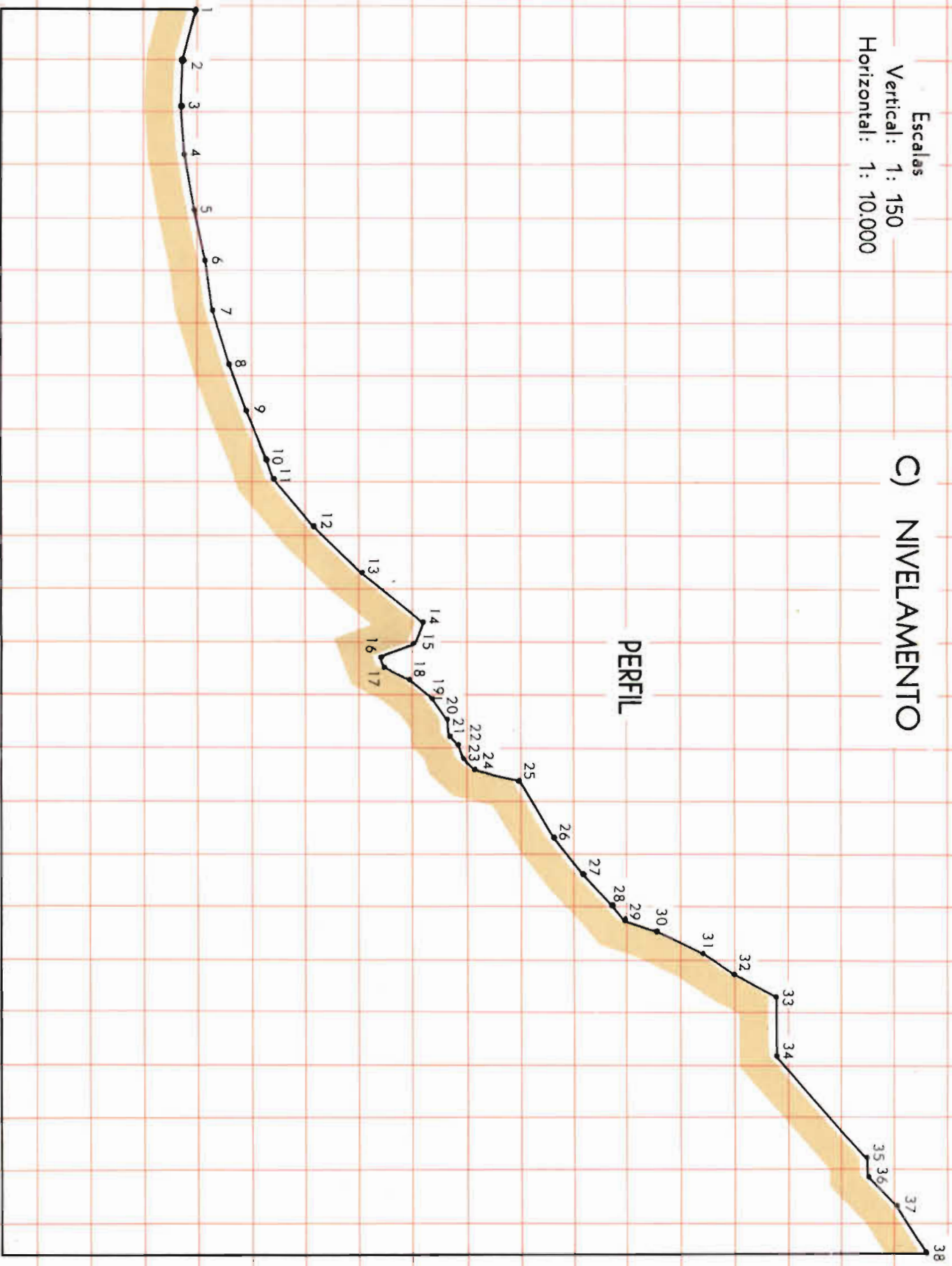
$$\alpha = \frac{\beta + \gamma'}{2} - \frac{180^\circ}{2} = \frac{\beta + \gamma'}{2} - 90^\circ \quad (26)$$

b) Verificar se a agulha está bem equilibrada. Quando a bússola estiver na posição horizontal as extremidades da agulha devem rasar os bordos do limbo. No Hemisfério Sul a ponta N da agulha deve ser mais pesada do que a ponta S .

Escalas
Vertical: 1 : 150
Horizontal: 1 : 10.000

C) NIVELAMENTO

PERFIL



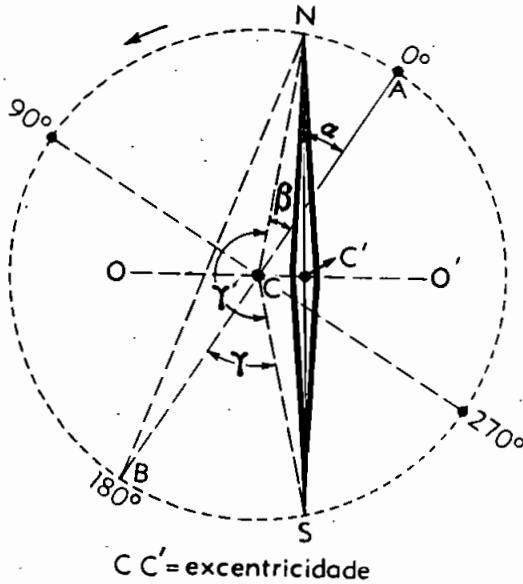


FIG. 45 — Excentricidade de uma agulha

c) Verificar se a agulha é preguiçosa. Diz-se que uma agulha é preguiçosa quando os seus movimentos são muito lentos. Faz-se a verificação aproximando da agulha um objeto de aço, e examinando em seguida se ela volta imediatamente ao ponto de partida, executando oscilações rápidas e regulares em torno do pivô.

40 — Bússolas declinadas

Para referir-se uma direção a um meridiano astronômico ou verdadeiro, basta somar ou subtrair do azimute magnético o valor da *declinação* da agulha. Quando a declinação é oriental, soma-se este elemento ao azimute magnético, para ter a direção do meridiano verdadeiro; quando a declinação é ocidental, subtrai-se. A fim de dispensar esta operação existem bússolas de limbo móvel, o qual, podendo deslocar-se em relação à linha de fé, permite o recuo ou avanço do zero da graduação duma quantidade igual à declinação, de modo a dar a leitura direta do azimute verdadeiro.

Estes instrumentos são chamados bússolas declinadas.

41 — Inversão dos pontos leste e oeste nas bússolas de rumos

O motivo da inversão dos pontos cardeais *E* e *W* nos limbos das bússolas de rumos é a origem de contagem dos ângulos dos rumos que na bússola é dada a partir da linha de fé *O — O* ou *N — S* do limbo para a *ponta norte* da agulha ou da *ponta sul* para o alinhamento.

No caso dos azimutes, pelo mesmo motivo, o sentido de gradação na bússola é inverso do tomado para a contagem dos ângulos.

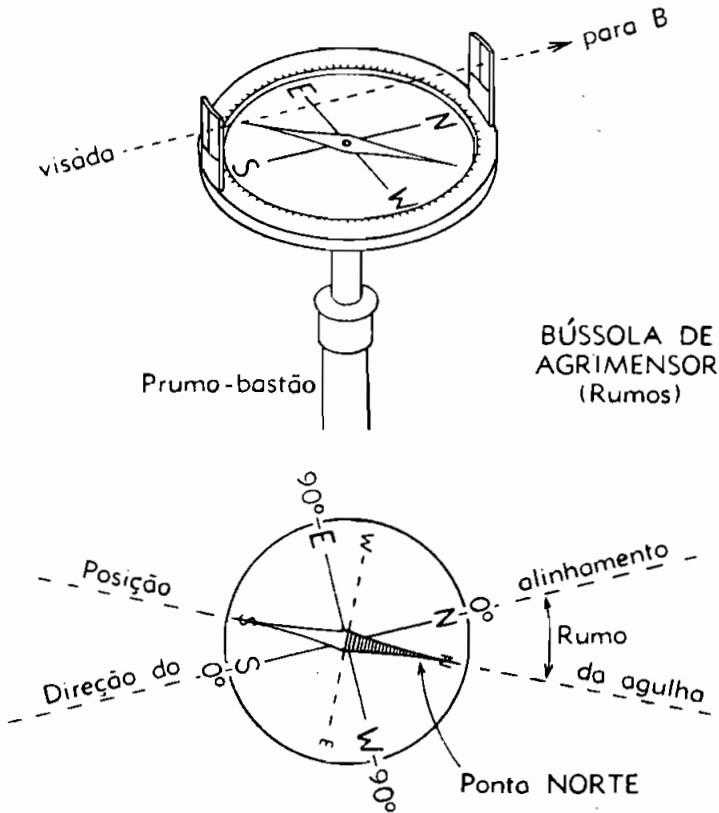


FIG. 46 — Razão da inversão dos pontos *E* e *W*, etc.

Somente quando o limbo é solidário à agulha, a origem de contagem é a mesma e não são, assim, alterados, tanto as posições dos pontos cardeais *E — W*, como o sentido de gradação, num ou noutro tipo de bússola. A Fig. 46 (*a* e *b*) esclarece melhor a razão do que expusemos acima.

42 – Levantamento à bússola

TIPO DE CADERNETA

Est.	Pontos visados	Asimutes	Distância (m)	Observações	Croquis
DE	k	239°15'	—	As distâncias das estações B, C e D são acumuladas a partir da origem	
	c	271°30'	—		
	D	91°30'	107		
	k	163°15'	—		
	j	91°30'	19,30	A.	
	i	91°30'	4,25		
Co	h	43°30'	35,60	O ponto k será determinado por coordenadas bipolares.	
	o	2°15'	20,00		
	j	149°30'	3,45		
	B	271°30'	—		
	G	91°30'	78,40		
	e	180°00'	13,65		
Bo	d	33°30'	29,85		
	c	352°00'	22,25		
	A	271°30'	—		
	B	91°30'	40,30		
Ao	b	160°00'	18,40		
	a	15°15'	17,10		

FIG. 47

A bússola, sendo um instrumento de instalação rápida, pode-se aplicar sem inconvenientes para o levantamento de um polígono cujos vértices forem marcados no reconhecimento, empregando o método do caminhamento perimétrico. De cada vértice visa-se não somente o vértice seguinte como o precedente. Os azimutes recíprocos, diferindo de 180° , tem-se assim um meio para verificar as leituras.

Os azimutes dos alinhamentos tomados no sentido do caminhar, chamam-se de vante; os azimutes, tomados no sentido oposto, chamam-se azimutes de ré.

Os lados do polígono são medidos a trena ou a passo e os detalhes podem ser levantados por qualquer dos processos indicados no levantamento a trena.

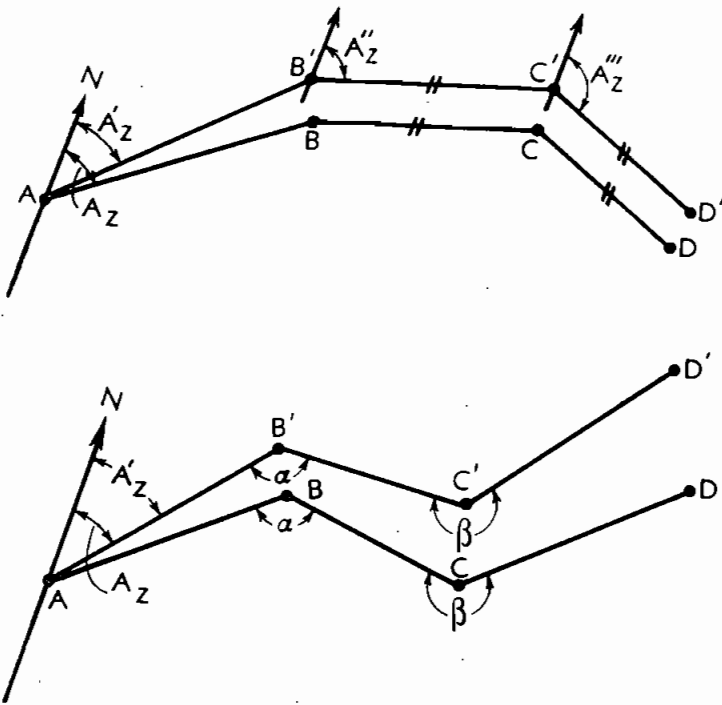
Pode-se adotar o tipo de caderneta ilustrada com os dados e Fig. 47.

43 - Vantagens e inconvenientes da bússola

A principal vantagem da bússola reside em sua simplicidade e na rapidez que ela permite nas operações. Basta uma visada em cada vértice do polígono para obter as direções de todos os lados; e mesmo quando se trata de levantamentos rápidos, podem-se fazer leituras nos vértices 1, 3, 5, etc., ou nos vértices 2, 4, 6, etc.

Uma outra vantagem da bússola consiste em não deixar acumular erros cometidos na leitura dos ângulos.

Com efeito, supondo que se tivesse cometido um erro BB' numa direção AB , que foi medida como sendo AB' , pertencendo a uma



Figs. 48 e 49

poligonal, Fig. 48, as outras direções $B'C'$, $C'D'$, etc. seriam paralelas às direções BC , CD , etc.

Entretanto, quando se opera com instrumentos que dão os ângulos que as direções fazem entre si — teodolito, por ex. — um erro cometido na medida de um ângulo B (Fig. 49) numa linha poligonal afeta toda esta, ampliando-se com a extensão dos lados, de modo que se obteria a poligonal $A'B'C'D'$... muito diferente de $ABCD$.

Os *inconvenientes* da bússola derivam principalmente da *pouca precisão* das suas indicações, devido à natureza da força magnética e às causas de erro de leitura.

Em resumo, a bússola é um aparelho simples mas pouco preciso, que oferece resultados satisfatórios quando se emprega para reconhecimentos rápidos.

§ 7 — Traçado dos alinhamentos no terreno. Erros nas medidas. Poligonação e Detalhes

44 — Problema geral

O problema a resolver na medida de um alinhamento topográfico é o seguinte: *Determinar, tanto em planimetria como em altura, dois pontos próximos, visíveis um do outro.*

Para essa determinação são necessárias as três seguintes operações:

1.^a — *direção* da linha que une os dois pontos, ou seja, sua *orientação* com relação a uma direção fixa de referência; esta determinação comporta, por conseguinte, a medida de um *ângulo*, reduzido ao horizonte;

2.^a — *distância* que separa os dois pontos em questão, distância essa medida no plano horizontal de projeção;

3.^a — *diferença de nível* ou de *altura* entre os planos horizontais, que passam pelos pontos extremos, superior e inferior.

Todas as operações topográficas sobre o *terreno* conduzem, pois, a medida de ângulos e a de comprimentos.

Os instrumentos usados na medida dos ângulos são os *goniômetros*, e os usados na medida dos comprimentos são os *diastímetros* ou *métricos*, nas medidas diretas, e *estadimétricos*, quando as medidas são indiretas, sem percorrer o alinhamento.

Ainda se empregam instrumentos que permitem *traçar* diretamente, ou *goniográficos*, tal como a combinação de uma *prancheta* e de uma *alidade*.

45 — Determinação de uma direção. Piquetagem, balizamento e medida

Para as medidas mencionadas, é preciso materializar na superfície do solo por *pontos* e *direções* as linhas cujos comprimentos se querem determinar; estas duas operações constituem a *piquetagem* e o *balizamento*.

Antes de qualquer operação de medida definitiva no terreno, deve-se fazer um *reconhecimento* prévio, a fim de escolher a posição mais conveniente dos vértices, dos quais deverão ser medidos os ângulos e lados da poligonal envolvente do trabalho.

Marcam-se esses pontos por números ou letras num croqui provisório traçado na caderneta de anotações, com clareza e cuidado, para evitar qualquer ambigüidade.

Para fixar materialmente a posição dos vértices, são cravadas as *piquetas* e *estacas* ou testemunhas de que já falamos.

As direções dos alinhamentos a fixar materialmente no terreno são linhas em geral sinuosas em relação à superfície do terreno, mas que se devem *projetar horizontalmente seguindo linhas retas*.

Determinar sobre o terreno a *direção* de uma linha equivale, pois, a determinar um *plano vertical* que deve contê-la; esse plano é obtido com o auxílio de diversas *balizas* colocadas verticalmente, com o auxílio de *fios a prumo*. Uma linha reta, definida por dois de seus pontos, basta, *teoricamente*, para defini-la, mas, para sua medida precisa é necessário cravar balizas intermediárias para medidas parceladas com qualquer diastimetro, de 25 m, por ex.; assim, para medir alinhamentos são necessários um operador e um ou dois ajudantes, um dos quais cravando as *fichas* em cada *trenada*.

46 - Balizamento de uma direção

Dois casos podem se apresentar:

1.º - A baliza extrema *B* é visível da baliza *A*. O operador se coloca a alguns passos de *A*, em *O* e procura cobrir a baliza colocada em *B* (Fig. 50). O ajudante coloca, então, outra baliza, entre *A* e *B*. O operador, para bem alinhar, deve deslocar o olho à direita e à esquerda, segundo as tangentes *ab* e *a'b'*, sem o que a baliza *C* ficará fora do alinhamento dado pelas balizas em *A* e *B* e o erro pode atingir para balizas de 4 cm de diâmetro, p. ex.; e 50 m de afastamento (*AC*) mais de dois metros, o que não é admissível.

2.º - A baliza em *B* não é visível de *A*, pela existência de um obstáculo, como uma elevação do terreno, *P* (Fig. 51) neste caso, pode-se recorrer ao processo mais simples, que damos a seguir: coloca-se uma

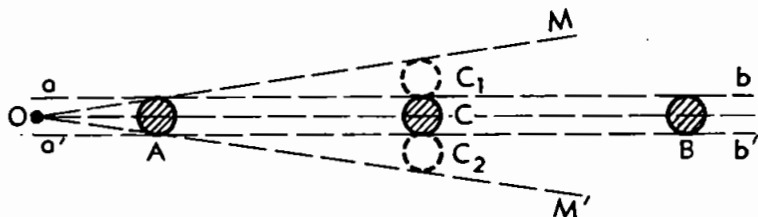


FIG. 50 - Alinhamento de 3 balizas

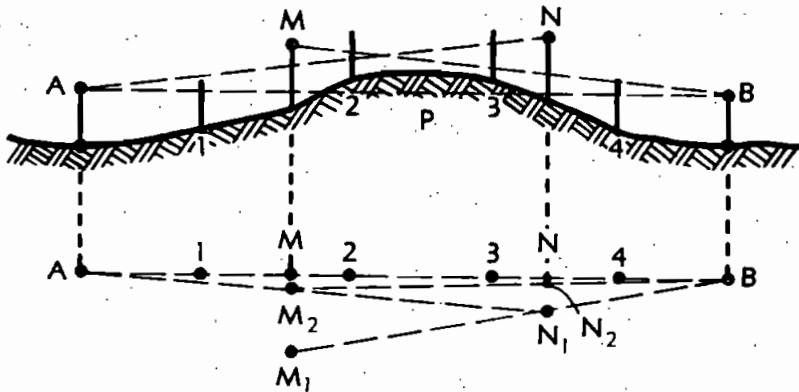


Fig. 51 - Alinhamento, existindo obstáculo

primeira baliza em M , donde se possa ver A e B e o ajudante coloca uma segunda baliza em N , na direção do alinhamento M, B . O operador se transporta para N_1 e o ajudante desloca a baliza de M , para M_2 , na direção dada pelo operador, NA e assim por diante até que as direções MN e NM passem pelos pontos B e A ; duas ou três tentativas, quando pouco afastadas, permitem determinar os pontos intermediários no alinhamento dado.

3.º - *Outros problemas.* Daremos a seguir diversos problemas que se resolvem somente com o auxílio da trena e de balizas.

a) *Medida indireta de um ângulo com a trena.* Sejam AB e BC dois alinhamentos cujo ângulo queremos medir com a trena (Fig. 52).

Marcando em AB e BC comprimentos iguais $BD = BE = l$ e medindo a corda $DE = c$, teremos $\text{sen } 1/2 \alpha = \frac{DF}{BD} = \frac{1/2 c}{l}$.

b) *Determinar a distância de um ponto inacessível.* Seja determinar a distância de um ponto B a um ponto inacessível P (Fig. 53).

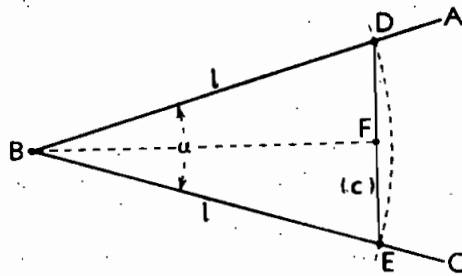


Fig. 52

Mede-se BC numa direção conveniente e traça-se uma linha AD , paralela a BC , até um ponto D , situado na direção PC .

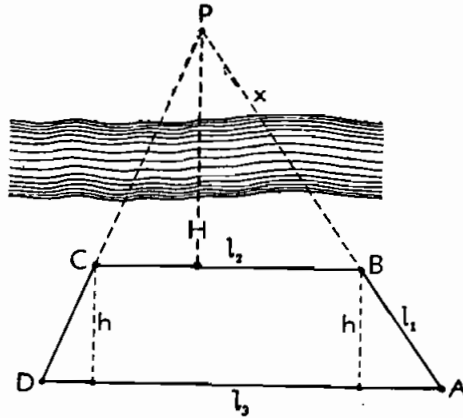


FIG. 53

Dos triângulos PBC e PAD , vem $PB = x = \frac{AB \times BC}{AD - BC} = \frac{l_1 \times l_2}{l_3 - l_2}$.

c) *Determinar a distância entre dois pontos invisíveis um do outro.* Seja determinar a distância entre dois pontos A e B (Fig. 54) invisíveis um do outro, devido ao obstáculo P .

Corre-se uma linha que passe o mais próximo possível de B , seja Ax , e nesta escolhe-se um ponto C' , donde se levanta uma perpendicular, que só casualmente passará pelo ponto B ; medindo $B'B$ e deslocando C' para C do mesmo valor, a nova perpendicular deverá passar pelo ponto B . A distância AB será dada pela fórmula

$$AB = \sqrt{AC'^2 + BC'^2}$$

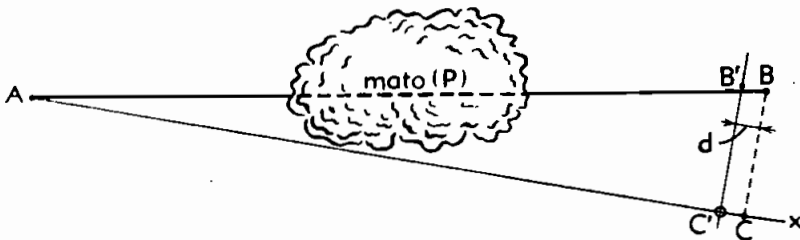


FIG. 54

d) *Levantar uma perpendicular a um alinhamento com a trena.* Os lados de um triângulo, sendo 3, 4 e 5, este será retângulo, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Seja levantar por um ponto C do alinhamento AB (Fig. 55) uma perpendicular.

Balizado o alinhamento AB , a partir do ponto C marca-se um ponto D a 3 metros ou a um múltiplo de 3 metros ($3n$) do ponto C . Com um operador e dois ajudantes, um em D com a ponta da trena, outro em E , distendendo os 5 (ou $5n$) metros e o terceiro em C com os 9 (ou $9n$) metros da trena, também distendendo os 4 ou $4n$ metros, será marcado o ponto E , que, balizado com C , dará a perpendicular CE ao alinhamento dado e seu prolongamento.

e) *Correr um alinhamento sobre uma coxilha, não sendo visíveis os extremos.* Supondo (Fig. 56) A e B colocados de um e outro lado da coxilha, invisíveis um do outro, quer se correr um alinhamento entre eles e marcar um ponto E intermediário.

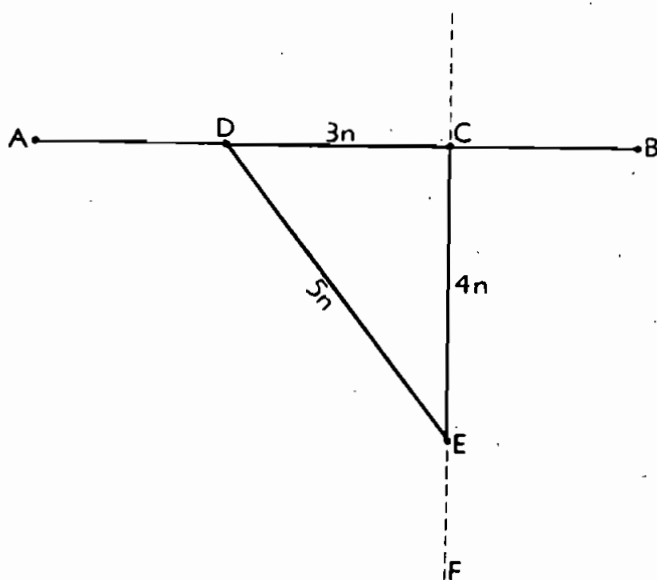


FIG. 55

Colocam-se duas balizas, uma em A e outra em B e duas outras nos pontos C e D , em linha aproximadamente com AB e de tal modo que de C se vejam D e B e de D , C e A .

Dois balizadores começam então a colocar-se em alinhamento, movendo-se com as balizas do alto e orientando-se pelas dos extremos;

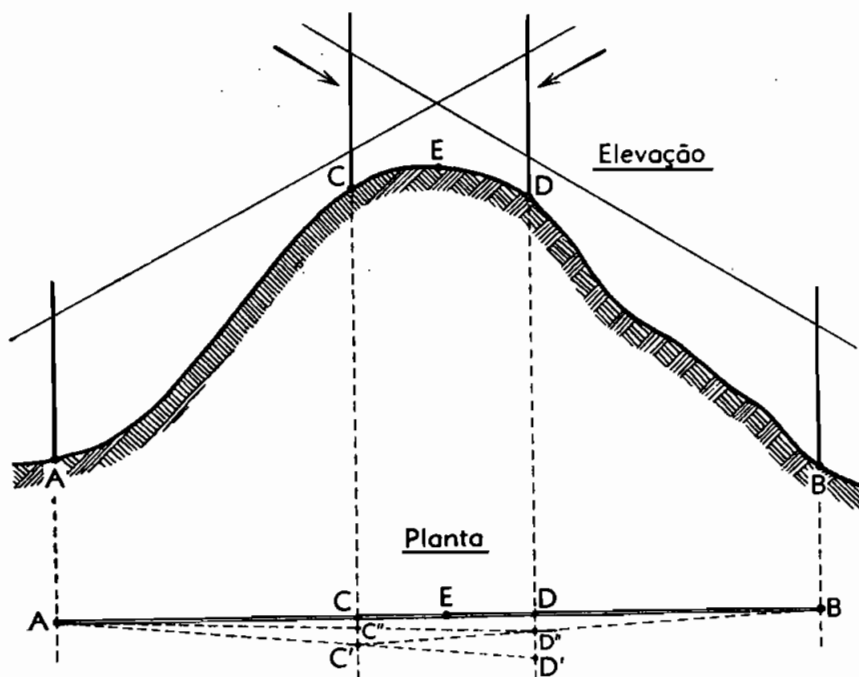


FIG. 56

assim, um balizador irá se deslocando no sentido DCA , até se situarem no mesmo plano (Fig. 56 — planta).

47 — Medição a trena

a) *Em terreno horizontal.* Quando o terreno é plano e horizontal, a medida de um alinhamento com a trena, fita ou corrente não oferece dificuldade. Um ajudante percorre o alinhamento munido de uma baliza, ficha e de um dos punhos da trena; o operador que orienta o ajudante na direção do alinhamento segue-o, levando o outro punho da trena.

O ajudante vai cravando as fichas, em número de onze, no solo, nos pontos indicados pela trena que conduz, sendo uma das fichas cravada na origem do alinhamento; o operador vai recolhendo as fichas, à exceção da primeira, e o número destas multiplicado pelo comprimento da trena, mais a última fração, dá a extensão total do alinhamento.

b) *Em terreno inclinado.* Os alinhamentos em planimetria são sempre medidos no plano horizontal, razão por que as medidas em terreno inclinado devem ser feitas em degraus (Fig. 57) ou, então, tomadas segundo o terreno e reduzidas ao horizonte.

O comprimento a medir, AB , ou L , é a projeção de AB .

Medem-se os comprimentos $G'G$, $D'H$, $E'I$, etc., iguais ao comprimento l de cada trenada e também a fração final c , sendo a soma das mesmas igual à projeção horizontal L .

Pode-se, quando o declive for pronunciado, medir diretamente AB e calcular a projeção por

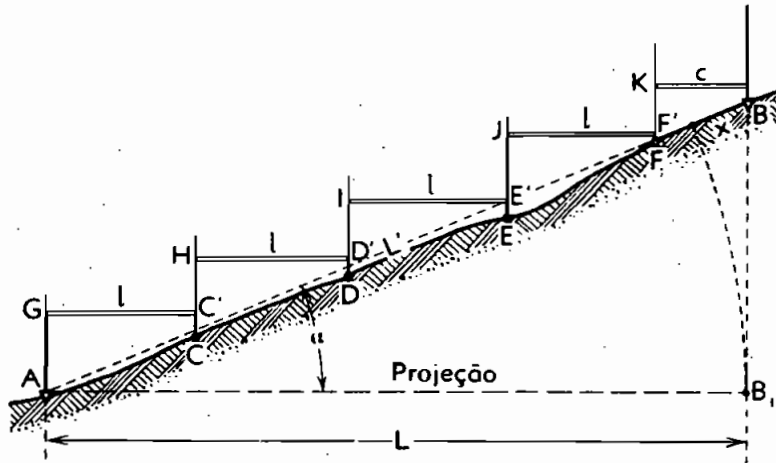


FIG. 57 — Medida em terreno inclinado

$AB_1 = L = AB \cdot \cos \alpha = L' \cdot \cos \alpha$; $L' - L = L'(1 - \cos d)$ (27)
devendo-se, nesse caso, medir a inclinação α da rampa.

Para declividades que não excedam a 10° ($\sim 18\%$), pode-se calcular dita projeção pela fórmula

$$L = L' \left(1 - \frac{d^2}{2} \right)$$

sendo d o declive de AB .

Esta fórmula é assim obtida:

Da Trigonometria sabemos que:

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} = \sim \cdot 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \text{ (para } \alpha \text{ até } 10^\circ)$$

$$d \text{ (declive)} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{d}{2} = \sim \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$e \quad \frac{d^2}{4} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{d^2}{2} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

substituindo em (27)

$$L' - L = L' \cdot \frac{d^2}{2} \quad \text{e} \quad L = L' \left(1 - \frac{d^2}{2} \right) \quad (28)$$

EXEMPLO. Comprimento medido segundo o terreno = 137,40 m; declividade do mesmo 8,5%; ângulo correspondente $4^{\circ}52'$.

Pela fórmula (27), a projeção será:

$$L = 137,40 \cdot \cos 4^{\circ}52' = 137,40 \cdot 0,996 = 136,85 \text{ m}$$

e, pela fórmula (28)

$$L = 137,40 \left(1 - \frac{0,085^2}{2} \right) = 137,40 \times 0,996 = 136,85.$$

c) *Verificações.* Todo alinhamento deve ser medido, num e noutro sentido, e, pela média, se os valores forem aceitáveis, se obtém o valor mais provável da distância medida.

O erro médio accidental na medida de um alinhamento varia com a raiz quadrada da distância medida ($l = \alpha \sqrt{l}$) e é calculado pelos seguintes valores médios:

Para medidas com réguas $e_1 = 0,003 \sqrt{l}$ ou, ainda, 0,03 m para 100 m;

Para medidas com fitas e trenas de aço $e_2 = 0,005 \sqrt{l}$ ou, ainda, 0,05 para 100 m;

Para medidas com correntes $e_3 = 0,008 \sqrt{l}$ ou, ainda, 0,08 para 100 m, sendo l o comprimento do alinhamento em metros.

Assim, para 1 km ou 1 000 metros, o erro accidental médio será:

$$e_1 = \pm 0,09 \text{ m ou } 0,009\%; \quad e_2 = \pm 0,16 \text{ m ou } 0,016\%; \\ e_3 = \pm 0,25 \text{ m ou } 0,03\%.$$

Há ainda a acrescentar, como erro constante, o fator $\beta l = \pm 0,03\%$ ou seja 0,30 m para 1 000 m.

O erro também é variável com as condições favoráveis, médias ou desfavoráveis do terreno, devendo se levar em conta os casos de medições cadastrais ou urbanas.

O erro máximo ou tolerável pode ser calculado como sendo igual a três vezes o erro médio.

48 - Erros nas medidas lineares diretas

a) *Generalidades sobre faltas e erros.* A exatidão das medidas no terreno pode ser perturbada por causas diversas, tais como: negligência do operador, imperfeição dos instrumentos, dificuldade em percorrer o terreno, etc.

Distinguem-se as faltas dos erros propriamente ditos.

As faltas têm por causa, geralmente, a negligência do operador e são mais prejudiciais que os erros.

Os erros são devidos à imperfeição dos nossos órgãos e dos instrumentos empregados.

Os erros podem ser sistemáticos e acidentais.

Os erros *sistemáticos* são devidos a uma causa permanente e reproduzem-se sempre, no mesmo sentido. Seria um erro sistemático o que resultasse do emprego de uma trena realmente maior ou menor que a indicada. Os erros *acidentais* provêm de causas perturbadoras, que não dependem do operador; reproduzem-se ao acaso em um sentido ou no sentido oposto. A sua influência nota-se mesmo nos instrumentos mais aperfeiçoados. Quando, por exemplo, na medida dum alinhamento o resultado final é o resultado da soma de medidas parciais, os erros sistemáticos se reproduzem, indo, destarte, acumulando-se para mais ou para menos, sempre no mesmo sentido, ao passo que os erros acidentais, porque se repetem ora num ora noutro sentido, em vez de se acumularem, vão se compensando em parte.

b) Erros toleráveis. Quando as operações no terreno têm por fim determinar elementos numéricos, para serem posteriormente transformados em elementos gráficos, o grau de exatidão deve ser relativo à importância do levantamento e independente da escala do desenho; quando, porém, as operações se destinam a colher diretamente elementos gráficos, o erro que se pode tolerar depende essencialmente da escala da planta, a qual, por sua vez, depende da importância do trabalho.

c) Escalas. Desenhar uma planta é a operação que consiste em traçar no papel uma figura semelhante à do terreno levantado.

Os ângulos são desenhados com a sua grandeza natural e as distâncias são reduzidas segundo uma relação constante. A essa relação constante entre uma linha no desenho (linha gráfica) e a sua homóloga no terreno (linha natural) dá-se o nome de *escala de redução* da planta.

Indica-se a escala por uma fração de forma $\frac{1}{M}$, que também se chama módulo da escala.

De um modo geral, se chamarmos L o comprimento duma linha natural, l o de sua homóloga gráfica, e o módulo de $1/M$, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{M}, \text{ donde } l = \frac{L}{M} \text{ e } L = lM$$

Chama-se escala decimal a uma escala cujo denominador M é uma potência de 10, ou multiplicada por 2 ou 5.

Dá-se preferência às escalas decimais pela comodidade e exatidão que elas oferecem nas leituras, porque o metro e seus múltiplos são sempre expressos por um número exato de suas subdivisões.

Por exemplo:

Na escala 1:50	— 0,02 m	corresponde a 1 m
Na escala 1:100	— 0,01 m	corresponde a 1 m
Na escala 1:200	— 0,005 m	corresponde a 1 m
Na escala 1:2 500	— 0,000 4 m	corresponde a 1 m

d) *Cálculo do erro tolerável.* Designemos pela fração $\frac{1}{M}$ a escala do plano e procuremos o erro tolerável na medida do alinhamento. Admite-se que o comprimento de $1/5$ de mm é inapreciável no desenho; nestas condições, pode-se desprezar no terreno um comprimento L que reduzido à escala dê um valor igual ou menor que $1/5$ de mm. Assim:

$$\frac{L}{M} = \frac{0\,001\text{ m}}{5} = \frac{1\text{ m}}{5\,000} \quad L = \frac{M}{5\,000}$$

EXEMPLO: A escala da planta sendo 1:1 000, o erro tolerável na medida de um alinhamento será:

$$L = \frac{1\,000}{5\,000} = 0,20\text{ m}$$

Quando se trata de medidas angulares, o erro tolerável depende ao mesmo tempo da escala da planta e da extensão dos lados do ângulo. Chamemos e o erro resultante da avaliação dum ângulo A (Fig. 58). Para que este erro e seja tolerável, é necessário que se possa desprezar o arco a , sem prejuízo da planta.

Chamando L o lado do ângulo, deve-se ter:

$$\frac{a}{2\pi L} = \frac{e}{360 \times 60} \quad \text{donde} \quad e = \frac{21\,600}{2\pi} \frac{a}{L} \quad (29)$$

Se $a = \frac{M}{5\,000}$, pode-se desprezar e ; substituindo este valor de a na

expressão (29), obtém-se:

$$e = \frac{21\,600}{2\pi} \times \frac{M}{5\,000 \cdot L} = \frac{21\,600}{31\,416} \frac{M}{L} \quad \text{ou} \quad e \approx 0,69 \frac{M}{L} \quad (30)$$

limite superior do erro que se pode admitir na medida do ângulo.

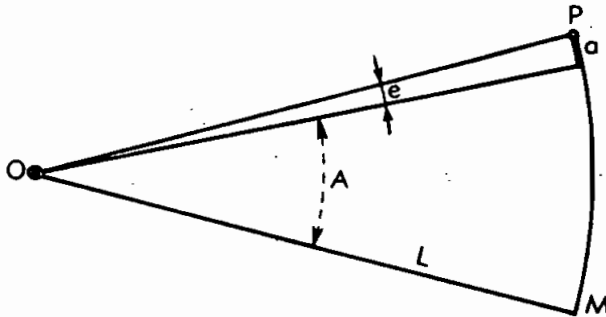


FIG. 58 - Erro gráfico

EXEMPLO: A escala sendo 1:1 000 e $L = 200$ m, vem:

$$e = 0,69 \times \frac{1\ 000}{200} \cong 0^{\circ}3'27''$$

e) Erros devido ao emprego da fita ou da corrente de metal. Os diastímetros estão sujeitos aos seguintes erros sistemáticos:

– *Desvio do alinhamento.* Neste caso mede-se na realidade não uma linha reta, mas uma linha quebrada que serpenteia em torno dela; por consequência, o resultado obtido virá afetado dum erro para maior.

– *Falta de horizontalidade.* A falta de horizontalidade dá lugar a um erro da mesma natureza do precedente; mede-se uma série de linhas inclinadas em vez de medir as suas projeções.

– *Flexão do fio ou corrente.* Quando a *corrente* não repousa diretamente no solo, ela flexiona segundo uma curva (catenária), resultando daí um erro também para maior.

– *Elasticidade da corrente.* Os punhos e os anéis da *corrente* alongam-se sensivelmente sob a influência da tração exercida pelos operadores; a diferença pode atingir 2 a 3 cm. Esta é uma causa de erro para menos.

I) Erro devido à falta de alinhamento da trena. Suponhamos que a trena ocupa uma posição AC, fora do alinhamento AB (Fig. 59).

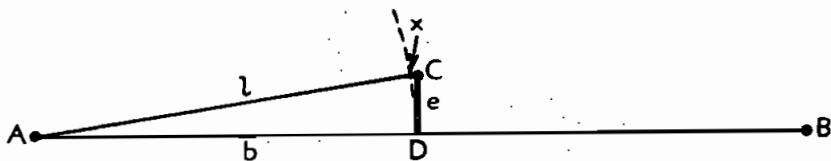


FIG. 59 - Desvio do alinhamento

Sejam $AC = l$, $AD = b$, $l - b = x$, $CD = e$.

O triângulo retângulo ACD dá $l^2 - b^2 = e^2$.

Mas $l = b + x$; donde $(b + x)^2 - b^2 = e^2$.

$$b^2 + 2bx + x^2 - b^2 = e^2$$

$$x^2 + 2bx = e^2$$

Ora, x sendo muito pequeno em face de b , podemos desprezar x^2 e escrever $2bx = e^2$, donde o erro

$$x \cong \frac{e^2}{2b} \quad (31)$$

O comprimento do alinhamento AB obtém-se por medidas (ou trenadas) parciais sucessivas, donde se conclui que o erro total é proporcional ao comprimento de AB . É fácil calcular, segundo a expressão (31), o afastamento e que se pode tolerar a fim de que o erro de comprimento devido à falta de alinhamento da trena seja inferior a $1/n$ da distância; basta fazer:

$$\frac{1}{n} = \frac{x}{b} \quad \therefore \quad x = \frac{b}{n}$$

Substituindo em (31) virá:

$$\frac{b}{n} = \frac{e^2}{2b}; \quad \text{donde} \quad e = \sqrt{\frac{2b^2}{n}} \quad (32)$$

EXEMPLO: Medindo um alinhamento com uma trena de 20 m ($b = 20$ m), quer se proceder de modo que o erro x seja inferior a $1:3\,000$ ($n = 3\,000$) da distância. A fórmula dá:

$$e = \sqrt{\frac{800}{3\,000}} = \sqrt{0,27} = 0,52 \text{ m (ap).}$$

II) *Erro devido à falta de horizontalidade da trena.* A expressão deste erro é análoga à do precedente, sendo neste caso o afastamento e contado no sentido vertical.

III) *Erro devido à curvatura da trena.* O efeito da curvatura da trena pode-se calcular facilmente considerando o arco de catenária AB como um arco circular.

Chamemos $2l$ o desenvolvimento do arco; f a flecha CD ; R o raio; 2α o ângulo central. Teremos:

$$\alpha = \frac{l}{R}; \quad \cos \alpha = \frac{R - f}{R}$$

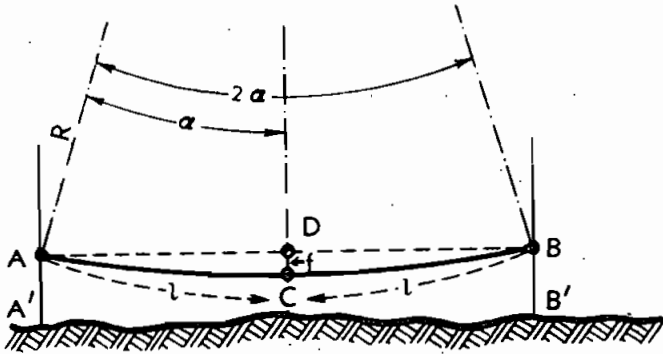


FIG. 60 - Catenária

podemos admitir que:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots \dots \text{(desenvolvimento em série)}$$

portanto:

$$\frac{R-f}{R} = 1 - \frac{l^2}{2R^2}; \quad \frac{R-f}{R} = \frac{2r^2 - l^2}{2R^2} \quad \text{e} \quad R-f = \frac{2R^2 - l^2}{2R}$$

$$\text{ou } R^2 - 2Rf = 2R^2 - l^2; \quad \text{finalmente, } R = \frac{l^2}{2f} \quad (33)$$

também

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2f}{l} \quad (34)$$

Fazendo a diferença entre o arco e a corda, teremos:

$$e = \text{arco} - \text{corda} = 2l - AB = 2\alpha R - 2R \cdot \text{sen } \alpha = 2R (\alpha - \text{sen } \alpha)$$

$$e \cong 2R \cdot \frac{1}{6} \alpha^3$$

pois α sendo muito pequeno, pode-se igualar $\alpha - \text{sen } \alpha \cong \frac{\alpha^3}{6}$;

daí vem:

$$e = \frac{1}{3} R \cdot \alpha^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{2l} \quad (35)$$

EXEMPLO: Para $f = 0,20$ m e $2l$ (trenada) = 20 m o erro será de apenas 5,3 mm. Este erro é desprezível para flechas pequenas.

49 – Levantamento a trena dum perímetro fechado. Trabalho de campo

a) *Reconhecimento.* Antes de iniciar o levantamento deve-se percorrer o perímetro do polígono, escolhendo os seus vértices, e fazendo um croqui (esquema) aproximado da forma do polígono.

Esta operação, que mostra as dificuldades que se têm a vencer, denomina-se *reconhecimento*.

b) *Medida dos lados.* Marcados os vértices com estacas inicia-se a medida dos lados. Colocam-se balizas nas extremidades (origem e fim) do alinhamento, e tantas balizas intermediárias quantas forem necessárias para os operadores de *vante* e de *ré* da trena não se afastarem do alinhamento.

Uma das extremidades da trena é colocada sobre a estaca origem do alinhamento, indo o operador de *vante* colocar a outra extremidade que é marcada por uma *ficha*, sobre o alinhamento, segundo a indicação do operador; a trena é esticada o mais horizontalmente possível e a ficha é enterrada no chão a fim de marcar o ponto. O operador de *ré* virá ocupar a posição do de *vante*, colocando a extremidade da trena no ponto que ficou marcado pela ficha. O de *vante* irá colocar-se novamente sobre o alinhamento, onde cravará outra ficha. Assim, num instante qualquer, a distância medida será igual ao produto do número de fichas que o operador de *ré* tem na mão, pelo comprimento da trena. (Não se conta a ficha que está no chão para marcar o ponto.) Desde que o operador de *vante* esgote as fichas, o de *ré* entregue as fichas que tem na mão (10) ficando uma no chão marcar-se-á uma *talha*. Uma talha representa, portanto, um comprimento igual a 10 vezes o comprimento da trena. Assim, continuarão até o fim do alinhamento, onde a fração da trena será lida pelo operador de *vante*, para completar a medida do alinhamento.

c) *Levantamento dos detalhes.* Ao mesmo tempo que os lados são medidos, deve-se ir marcando, em relação ao lado que fica mais próximo, os diversos detalhes do terreno. Esse levantamento é feito por meio do processo de irradiação ou das ordenadas, aumentando o número de ordenadas conforme a sinuosidade do terreno.

Seja, por exemplo, o alinhamento AB e o arroio RR' , que corre ao longo dele (Fig. 61).

Levantam-se nos pontos correspondentes às mudanças de direção do arroio as perpendiculares aa' , bb' , cc' , etc., ao alinhamento AB . Os comprimentos (y) e distâncias à origem A do alinhamento (x), sendo determinadas, permitem obter a forma da projeção horizontal dos detalhes. Da mesma maneira age-se para qualquer outro detalhe: casas, árvores, etc.

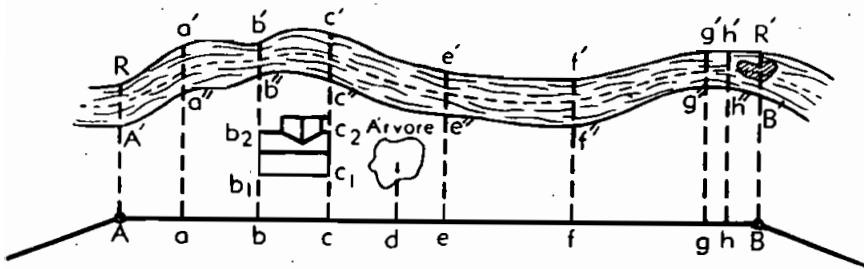


FIG. 61 — Levantamento de detalhes

d) *A forma do polígono.* Medindo-se os lados dos polígonos têm-se os comprimentos das suas projeções horizontais; para ter a forma seria necessário determinar os ângulos. Mas, como o trabalho de levantamento de que tratamos é a trena, devem-se medir ainda as diagonais do polígono, dividindo-o, assim, em triângulos, que têm a sua forma determinada por três lados.

e) *Área do polígono.* Seja o polígono $ABCDEF$ que se quer levantar; medem-se os lados AB, BC , etc. (deixando o polígono à esquerda) e medem-se também as diagonais AE, BE , etc. (Fig. 62).

Ficamos com o polígono dividido em 4 triângulos. A área de um deles será dada pela fórmula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

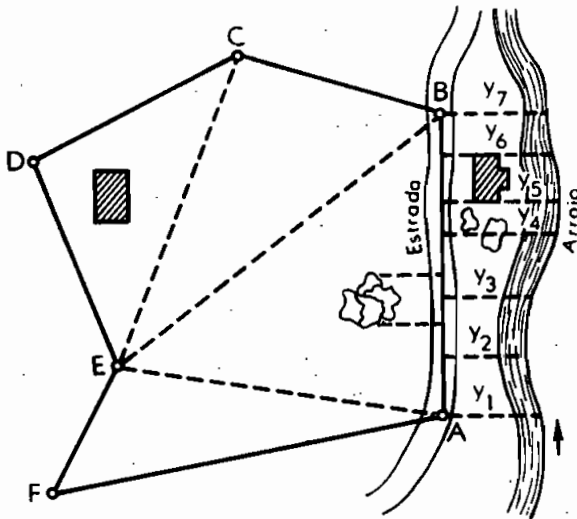


FIG. 62 — Projeto poligonal e detalhes

A soma das áreas dos diversos triângulos dará a área total do polígono.

f) *Área extrapolygonal*. Geralmente, o perímetro do polígono que se levanta não pode coincidir com os limites do terreno do qual se quer determinar a área e a forma.

Sendo estes detalhes levantados por ordenadas, formam-se entre as coordenadas consecutivas um certo número de trapézios, cujas áreas são dadas pela fórmula

$$S_1 = \frac{b + b'}{2} \cdot h$$

onde b e b' são as bases (comprimentos de duas ordenadas consecutivas) e h a distância entre os pés destas duas ordenadas.

g) *A caderneta*. Deve-se ter em vista que o desenho, acompanhando o levantamento para frente, é feito, como dissemos, de baixo para cima; as distâncias do pé da ordenada à origem do alinhamento são tomadas na coluna das distâncias, e os comprimentos das ordenadas anotadas no próprio croqui.

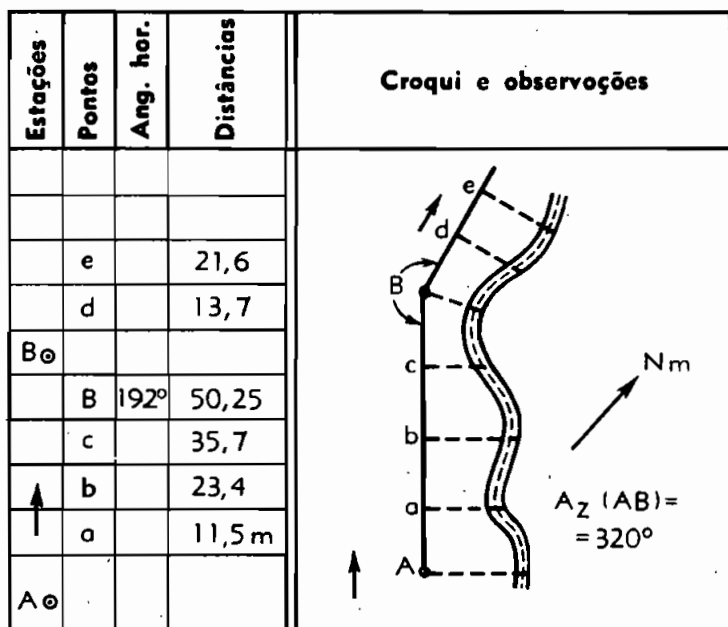


FIG. 63 — Detalhes de um alinhamento

§ 8 – Determinação dos ângulos internos e declinação com as bússolas. Problemas

50 – Fórmula geral dos azimutes

Sendo conhecidos os ângulos internos de um polígono, e o azimute do primeiro lado, determinar os azimutes dos outros lados.

Vamos considerar o caso em que o polígono fica à esquerda do caminhamento, à direita; nestas condições, os ângulos internos são contados no sentido do movimento dos ponteiros dum relógio. A figura dá:

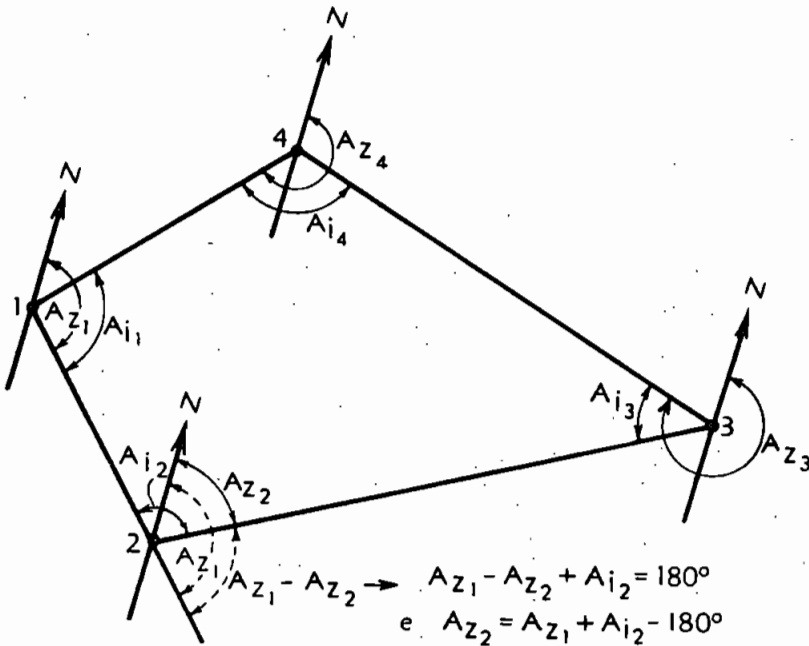


FIG. 64 - $Az_n = Az_{n-1} \pm \text{etc.}$

Azimute de 1-2 = Az_1

Azimute de 2-3 = $Az_2 = Az_1 + Ai_2 - 180^\circ$

Azimute de 3-4 = $Az_3 = Az_2 + Ai_3 + 180^\circ$

Azimute de 4-1 = $Az_4 = Az_3 + Ai_4 - 180^\circ$

Podemos então escrever de um modo geral:

$$Az_n = Az_{n-1} + Ai_n \pm 180^\circ$$

(36)

O último termo do segundo membro tem o sinal + quando a soma dos primeiros é menor que 180° , e o sinal - quando a soma dos dois primeiros é maior ou igual a 180° .

Calcular o ângulo do polígono em função dos azimutes: Da fórmula anterior (36) tira-se:

$$Ai_n = Az_n - Az_{n-1} \pm 180^\circ \quad (37)$$

É fácil demonstrar que quando o polígono fica à direita, com caminhamento à esquerda, tem-se:

$$\begin{aligned} Az_n &= Az_{n-1} - Ai_n \pm 180^\circ, \text{ donde} \\ Ai_n &= Az_n + Az_{n-1} \pm 180^\circ \end{aligned}$$

Podemos então enunciar a seguinte:

Regra geral: O azimute de um lado é igual ao azimute do lado anterior mais ou menos o ângulo interno, mais ou menos 180° .

51 - Determinação da declinação com a bússola

A bússola, como já tivemos ocasião de dizer, é usada particularmente para dar a direção dos alinhamentos com a linha norte-sul magnética, dando o azimute ou o rumo dos alinhamentos.

Estacionada a bússola na origem de um alinhamento, nivela-se o prato, solta-se a agulha e dirige-se a alidade de pínulas ou a luneta para a baliza colocada no outro extremo, lendo-se, então, o ângulo nas duas pontas da agulha, para que a média forneça um valor isento do erro de excentricidade.

Chama-se visada a vante a que se faz para a frente, no sentido da medição, e a ré, no sentido contrário.

Em todo trabalho feito à bússola, há conveniência de fazer as duas visadas, a de vante e a de ré, evitando-se com isso erros grosseiros e a influência da atração local. A agulha em um certo ponto pode ser desviada de sua direção constante norte-sul por presença de massas de ferro, tais como jazidas, trilhos, corrente eletromagnética, chaves no bolso do operador, etc.

É indispensável nos reconhecimentos à bússola, fazer na caderneta de campo, ao lado das anotações de distâncias e ângulos lidos, um croqui bastante claro do levantamento, bem como da própria bússola com que se opera, para evitar enganos e facilitar o desenho da planta.

As indicações angulares das bússolas diferem das referidas o meridiano verdadeiro, de um ângulo de amplitude variável, diurna, mensal e anualmente.

É a declinação magnética variável, também, de um lugar para outro.

Não temos ainda cartas isomagnéticas ou mapas isogônicos regulares, para fazer as devidas correções, razão por que precisamos determinar *in loco* a declinação magnética.

No estudo que faremos em capítulo especial sobre a determinação da meridiana verdadeira, são dados os processos para obtê-la precisamente com observações do Sol ou de estrelas.

Para o caso de observações à bússola, podem-se tomar os valores médios dados em nosso *Anuário do Observatório Nacional do Rio de Janeiro* para cidades e capitais de nosso país, interpolando-os para o local de trabalho, ou, então, fazer observações do azimute, do nascer e do ocaso do Sol, quando se tiver horizonte livre.

Variando a *declinação* do Sol, dia a dia, só nos equinócios (21 de março e 21 de setembro), os valores obtidos serão isentos de erro, não acontecendo o mesmo com as observações feitas em qualquer dia e mês do ano.

Assim, para valor *aproximado* do azimute verdadeiro, basta fazermos duas observações.

Sejam (no horizonte)

Azimute do nascer	108°25'
Azimute do por do Sol	265°45'
Azimute médio	<u>187°05'</u>

que é o azimute aproximado do Pólo Sul e donde se verifica uma declinação ocidental de 7°05'.

A declinação, assim determinada, está sujeita a um erro de $\pm 15'$ para as nossas latitudes.

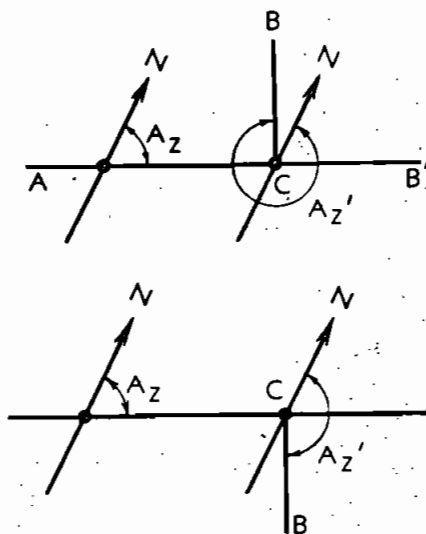


FIG. 65 — Traçar perpendicular à bússola

52 — Problemas resolvidos com as bússolas

a) *Traçar uma perpendicular a um alinhamento.* Basta traçar uma reta cujo azimute tem uma diferença de um ou três ângulos retos do azimute do alinhamento dado, como indica a figura ao lado.

b) *Traçar uma paralela a um alinhamento.* Equivale a traçar uma reta que tenha um azimute igual ao do alinhamento dado.

c) *Prolongar um alinhamento além de um obstáculo.* Seja *AB* (Fig. 66) o alinhamento cujo azimute é conhecido.

Prolonga-se o alinhamento até o ponto *C*, e daí tira-se *CD*

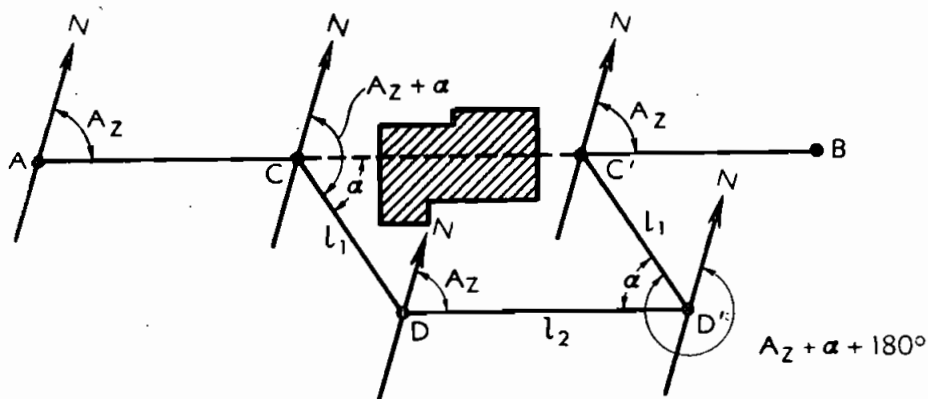


FIG. 66 — Passagem (obstáculo)

numa direção conveniente; mede-se CD e pelo ponto D traça-se DD' paralela a AC ; do ponto D' tira-se $D'C'$ igual e paralela a DC ; finalmente de C' traça-se $C'B$ com um azimute igual ao de AC .

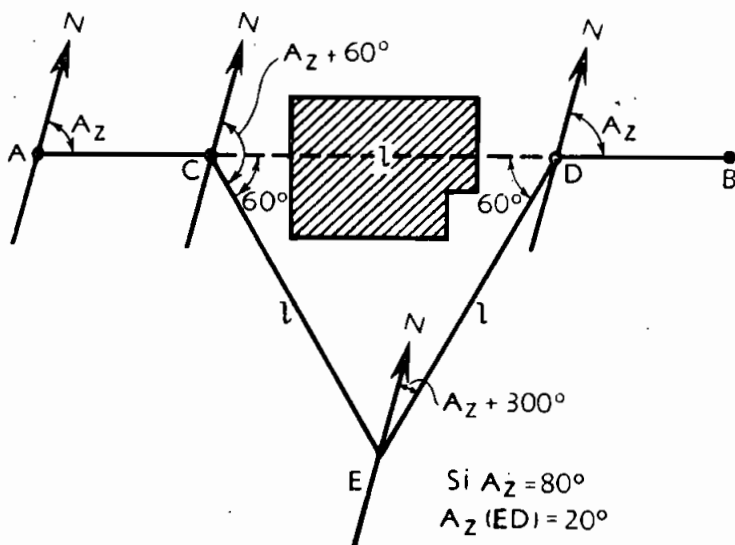


FIG. 67 — Passagem (obstáculo)

EXEMPLO: O azimute de AC sendo 80° (Az) teremos:

azimute de $CD = 80^\circ + \alpha$ (ângulo da deflexão) $= 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$

azimute de $DD' = 80^\circ$ (A_z)

azimute de $D'C' = 80^\circ + 180 + 80 = 340^\circ$

azimute de $C'B = 80^\circ$.

sendo $D'C' = DC = l_1$ e CC' (não medido diretamente) $= DD' = l_2$.

Resolve-se também esse problema, traçando em vez do paralelogramo $CDC'D'$ um triângulo equilátero como indica o exemplo numérico seguinte (Fig. 67).

d) Medir a distância entre dois pontos, indiretamente, ou medir a largura de um rio. Quer-se determinar a distância AC (Fig. 68). Mede-se AB numa direção conveniente e, centrando a bússola nos pontos A e B , lêem-se os azimutes de AB , AC , BC .

Fica-se assim de posse dos elementos necessários, para calcular os ângulos α e β .

$$\text{O triângulo } ABC \text{ dá: } AC = \frac{ab \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

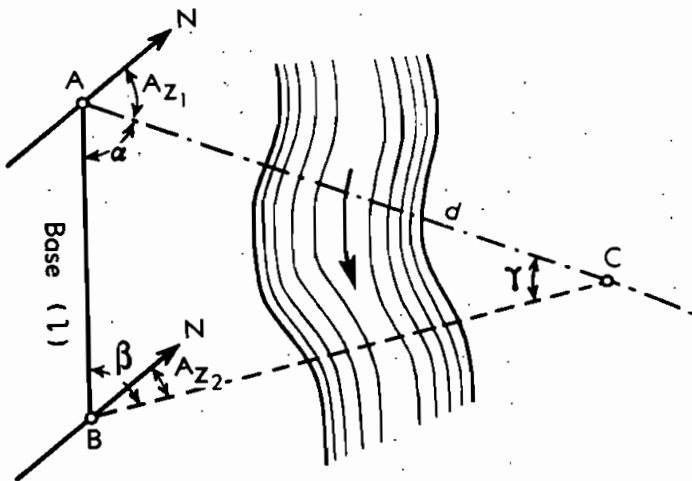


FIG. 68 - Passagem (obstáculo)

sendo $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, o lado AD deve ser tal que os ângulos do triângulo fiquem compreendidos entre os limites extremos de 30° e 120° . Sempre que for possível deve-se fazer $\alpha = 90^\circ$; então $AC = AB \cdot \text{tg } \beta$.

e) *Determinar a distância de dois pontos, com medidas tomadas de uma base auxiliar.* Mede-se uma base AB , e os ângulos formados nos pontos A e B , (Fig. 69), com esta base, e os raios visuais dirigidos para os pontos C e D , cuja distância se procura. Calculam-se trigonometricamente os lados AC e AD do triângulo ACD ; sendo conhecido o ângulo CAD , pode-se em seguida determinar a distância DC .

f) *Medida dos ângulos horizontais com a bússola.* A medida dos ângulos com a bússola quando se trata de dois alinhamentos pode ser feita indiretamente por meio dos azimutes dos lados dum ângulo. Vamos considerar três casos principais.

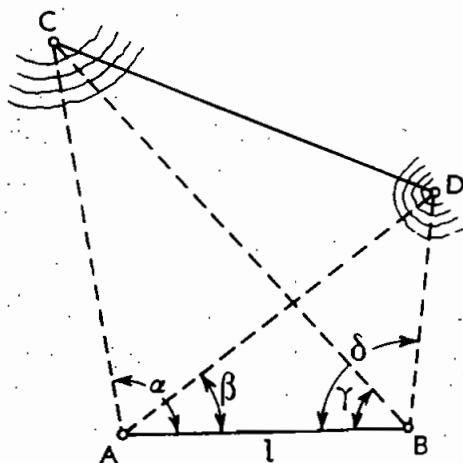


FIG. 69 — Distância entre dois pontos

1.º) *O vértice do ângulo é acessível, e a ponta norte da agulha se encontra exterior ao ângulo.* Neste caso o ângulo é igual à diferença entre os azimutes Az_1 e Az_2 (Fig. 70); isto é:

$$BAC = Az_2 - Az_1$$

2.º) *O vértice é acessível e a ponta norte da agulha se encontra no interior do ângulo.* Neste caso, um dos azimutes é menor que 180° e o outro maior. A figura dá

$$\alpha = 360^\circ - Az_2 + Az_1 = 360^\circ - (Az_2 - Az_1).$$

O valor do ângulo α se obtém subtraindo de 360° a diferença entre os dois azimutes.

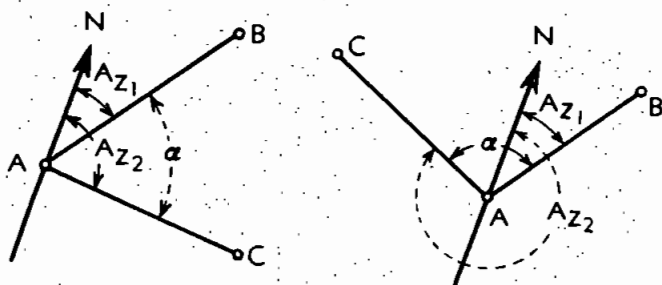


Fig. 70

3.º) *O vértice do ângulo é inacessível.* Estaciona-se a bússola em dois pontos acessíveis dos lados do ângulo, e determinam-se os azimutes respectivos. Recai-se assim em um dos casos precedentes. Com efeito, a Fig. 71 dá:

$$\alpha = Az_2 - Az_1$$

A figura (71) dá $\alpha = 360^\circ - Az_2 + Az_1$

$$\text{ou } \alpha = 360^\circ - (Az_2 - Az_1)$$

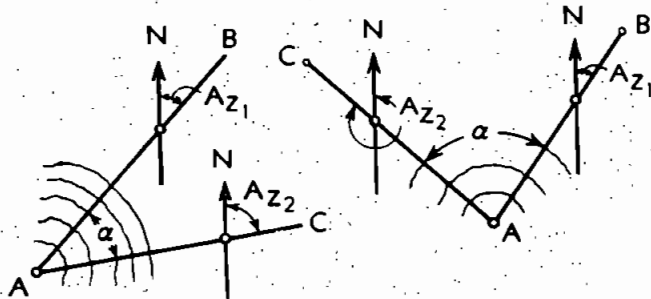


Fig. 71

§ 9 – Cálculo das poligonais: Erros e compensação. Desenho da planta

53 – Poligonais fechadas e abertas

Construir a *carta*, que deve ser a representação na escala escolhida da porção de terreno que nos propomos *levantar*, é a operação topográfica para o cálculo do caminhamento e respectivo desenho.

Começaremos pela planimetria e, para simplificar, substituiremos a figura formada pela multiplicidade de pontos do terreno por outra mais simples, formada de um conjunto de pontos que podem ser ligados dois a dois por linhas retas.

Esses pontos são escolhidos no terreno entre os mais visíveis; as linhas que os unem formam *triângulos*, suscetíveis de serem medidos por processos simples; a justaposição desses triângulos constitui os *polígonos*, e o conjunto dos mesmos forma o *canevas* do levantamento.

Uma vez fixado o *canevas* no terreno, e representado graficamente seu traçado numa folha de desenho, completa-se o levantamento, que na prática é *plani* e *altimétrico* ao mesmo tempo, com o *levantamento dos detalhes*.

Com o trabalho assim parcelado, ficam reduzidas as dificuldades e a acumulação dos erros, pois há verificações nos vértices comuns das poligonais justapostas.

Já dissemos que toda a operação topográfica conduz finalmente a duas espécies de medidas: a dos *comprimentos* e a dos *ângulos*; as primeiras exigem mais cuidado e são, em geral, mais demoradas do que as últimas.

A medida de ângulos feita com verificações pode se estender a vértices próximos ou afastados; as operações de instalação do instrumento, pontarias, visadas e leituras tanto podem ser de um ponto afastado de 2 km, por ex., como de 200 m, salvo quando as circunstâncias atmosféricas forem desfavoráveis.

O cuidado do agrimensor ou do topógrafo deve ser o de reduzir ao mínimo as medidas de comprimentos, substituindo-as quanto possível por medidas angulares.

A Geometria elementar ensina que se pode construir um triângulo conhecendo três de seus seis elementos, neles incluindo um lado; assim pode-se resolvê-lo: 1.º, conhecendo dois lados e o ângulo compreendido; 2.º, um lado e os dois ângulos adjacentes; 3.º, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto; 4.º, conhecendo os três lados.

O primeiro caso, nos *levantamentos a teodolito*, corresponde aos métodos de *caminhamento* e *irradiação*; o segundo, aos de *interseções*; o terceiro também de *interseções*, porém com visadas *diretas* e *inversas*, e o quarto corresponde ao método de *levantamento a trena* usado nos detalhes. A esses quatro métodos, ainda pode-se juntar um quinto, conhecido por *problema dos três pontos*, com medidas de dois ângulos obtidos por pontarias para pontos de coordenadas conhecidas, e resolvido pelos processos *gráfico*, *mecânico*, *numérico* e *trigonométrico*.

Para levantamentos expeditos a bússola e a passo é mais empregado o método de *caminhamento exterior de contorno*, com *poligonais*

fechadas e, quando necessário, com transversais interiores em poligonais abertas (Fig. 72).

A orientação dos lados é tomada nos dois sentidos de cada alinhamento, direto e inverso, e os comprimentos dos lados também por duas vezes, para as devidas verificações. Se o instrumento empregado for um *pantômetro* pode ser feita a verificação da soma dos ângulos internos lidos pela comparação com a obtida da conhecida relação

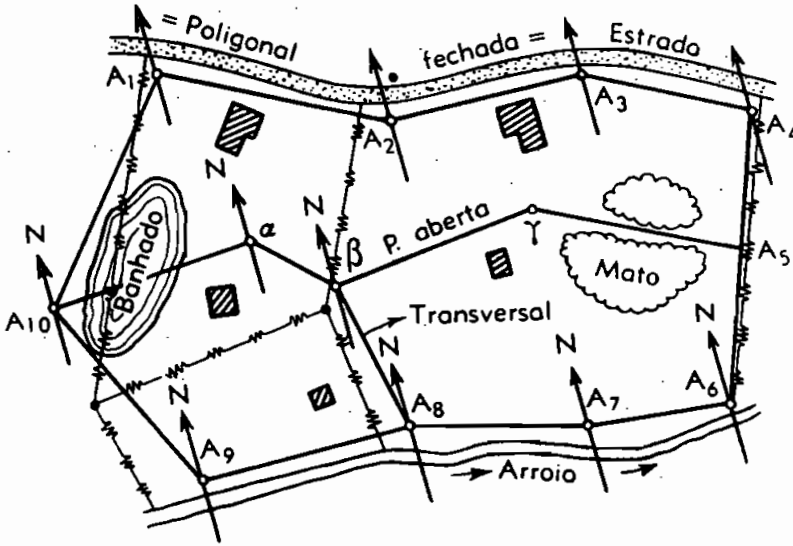


FIG. 72 — Levantamento à bússola

$$\Sigma A_i = 180^\circ (n - 2)$$

onde ΣA_i é a soma dos ângulos internos e n é o número de lados ou vértices de uma poligonal fechada.

Se o caminhamento for levantado com bússola topográfica, substitui-se a verificação dos ângulos internos pela que resulta da verificação da orientação de cada lado nas medidas direta e recíproca.

54 — Compensação gráfica de uma poligonal fechada

Quando o erro angular constatado for admissível, reparte-se o mesmo por todos os ângulos medidos, igualmente em cada ângulo. Quanto ao erro de fechamento linear, em desenho feito com transferidor e escala de redução, é ele distribuído do seguinte modo: seja (Fig. 73) a linha poligonal a b'c' d'e'f' desenhada cuidadosamente com os dados

obtidos e verificados; o último ponto a' deve coincidir com o ponto de partida, a , o que dificilmente acontece, como no campo, pois o polígono deve fechar sobre si mesmo.

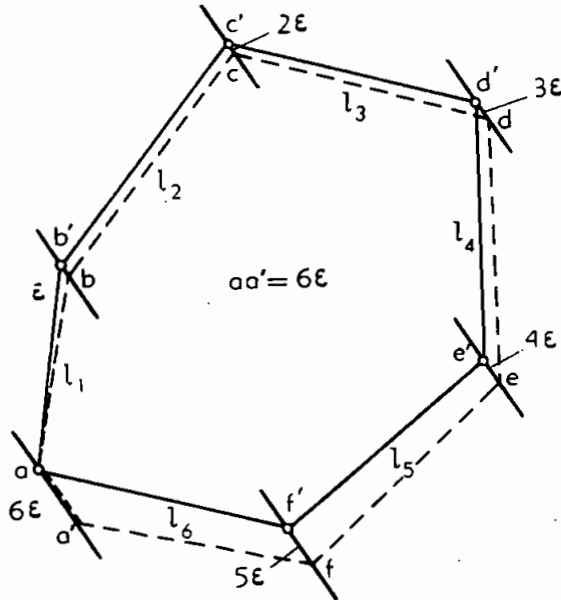


FIG. 73

A distância aa' , mais ou menos próxima, é o erro de fechamento, que, sendo tolerável, pode ser distribuído.

Suponhamos, por ex., que o polígono tenha 6 lados e o erro seja de 6 mm; a 6.^a parte será 1 mm (ϵ) que deve ser distribuído em cada vértice, cumulativamente, na direção da linha aa' do erro achado. Pelos pontos $a', b', c' \dots$ são traçadas paralelas a aa' e os vértices sofrerão os seguintes deslocamentos:

- vértice a , sem deslocamento (inicial)
- vértice b , deslocamento $b'b = \epsilon$
- vértice c , deslocamento $c'c = 2\epsilon$
- vértice d , deslocamento $d'd = 3\epsilon$
- vértice e , deslocamento $e'e = 4\epsilon$
- vértice f , deslocamento $f'f = 5\epsilon$

$$\text{e } a'a = 6\epsilon \text{ (total)}$$

Este processo gráfico de repartir o erro é suficientemente exato na prática, e quando os lados são aproximadamente iguais; para fazer uma repartição melhor proceder-se-á do seguinte modo. Seja aa' (Fig. 74) a projeção horizontal desenvolvida da poligonal $abcd\dots$ e aa' o erro de fechamento; levantando-se normais pelos extremos de cada lado, ficam determinados os deslocamentos bb', cc', dd' , etc. proporcionais aos comprimentos dos lados, e que são deslocados como indicado na compensação aproximada.

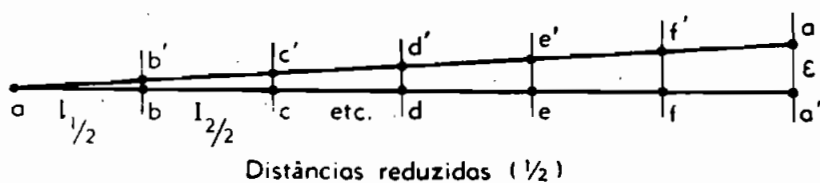


FIG. 74

55 - Desenho da planta. Escalas

Desenhar uma planta é a operação que consiste em traçar no papel uma figura semelhante à do terreno levantado. Os ângulos são desenhados em sua grandeza natural e as distâncias são reduzidas segundo uma razão constante. A esta razão constante entre uma linha (gráfica) do desenho e sua homóloga do terreno (linha natural), dá-se o nome de *escala de redução* da planta. Indica-se a escala por uma fração da forma $\frac{1}{M}$, sendo M o *módulo da escala*.

De um modo geral, se chamarmos de L o comprimento de uma linha natural, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{M} : \text{ donde } l = \frac{L}{M} \text{ e } L = lM$$

Estas relações permitem transformar uma distância medida no terreno na sua homóloga e vice-versa.

A escala chama-se decimal quando o seu denominador M , ou módulo, compõe-se dos algarismos 1, 2 ou 5, seguidos de zeros.

Dá-se preferência às escalas decimais pela sua comodidade, e pela exatidão que elas oferecem na leitura, porque o metro e seus múltiplos são sempre expressos por um número exato de suas subdivisões.

As escalas mais usadas em desenho planimétrico são as seguintes:

EQUIVALENTES GRÁFICOS, NAS ESCALAS DECIMAIS

Escala	1 quilômetro de terreno $l = L/M =$	1 milímetro de desenho $L = l \cdot M =$	1/8 de mm de desenho $L = l \cdot M =$	50 cm de desenho $L = l \cdot M =$
$\frac{1}{500}$	$\frac{1\ 000}{500} = 2,00\text{ m}$	$= 0,50\text{ m}$	$= 0,625\text{ m}$	$= 250\text{ m}$
$\frac{1}{1\ 000}$	$\frac{1\ 000}{1\ 000} = 1,00\text{ m}$	$= 1,00\text{ m}$	$= 0,125\text{ m}$	$= 500\text{ m}$
$\frac{1}{1\ 250}$	$\frac{1\ 000}{1\ 250} = 0,80\text{ m}$	$= 1,25\text{ m}$	$= 0,156\text{ m}$	$= 625\text{ m}$
$\frac{1}{1\ 500}$	$\frac{1\ 000}{1\ 500} = 0,666\text{m}$	$= 1,50\text{ m}$	$= 0,187\text{ m}$	$= 725\text{ m}$
$\frac{1}{2\ 000}$	$\frac{1\ 000}{2\ 000} = 0,50\text{ m}$	$= 2,00\text{ m}$	$= 0,25\text{ m}$	$= 1\ 000\text{ m}$
$\frac{1}{4\ 000}$	$\frac{1\ 000}{4\ 000} = 0,25\text{ m}$	$= 4,00\text{ m}$	$= 0,50\text{ m}$	$= 2\ 000\text{ m}$
$\frac{1}{5\ 000}$	$\frac{1\ 000}{5\ 000} = 0,20\text{ m}$	$= 5,00\text{ m}$	$= 0,625\text{ m}$	$= 2\ 500\text{ m}$

56 — Projeções dos lados e coordenadas dos vértices de uma poligonal

Para traçar a planta do terreno cujo levantamento foi efetuado com auxílio da bússola ou outro qualquer goniômetro, pode-se fazer uso de dois processos: o gráfico e o numérico.

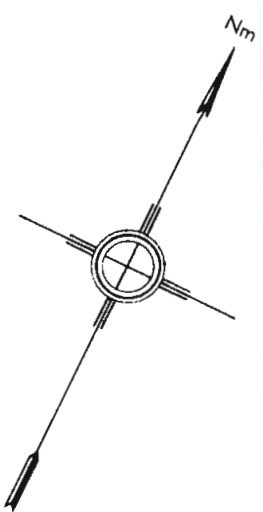
1.º) *Processo gráfico.* Consiste em traçar os alinhamentos reduzidos com uma régua graduada qualquer; e os ângulos empregando um transferidor ou uma tábua de cordas ou de linhas trigonométricas naturais.

2.º) *Processo numérico.* O processo antecedente tem o inconveniente de propagar os erros de vértice para vértice do polígono.

Quando se traçam os azimutes, as retas do desenho são na realidade paralelas ao alinhamento do terreno; porém, quando se traçam no desenho, os ângulos dos alinhamentos em lugar dos azimutes, os erros vão se ampliando proporcionalmente à extensão dos alinhamentos. No método numérico, ao contrário, os vértices do polígono são determinados pelas suas coordenadas, independentemente uns dos outros, de modo que um erro só afetará a posição do vértice onde for cometido.

PLANTA DE UM LEVANTAMENTO A TEODOLITO

PRANCHA II



ESCALA 1: 750

As coordenadas dos vértices ou de quaisquer pontos que tenham sido locados no levantamento, são determinadas geralmente em relação à meridiana magnética, como eixo das ordenadas, e a linha este-oeste como eixo das abscissas. As coordenadas são calculadas pelas projeções dos alinhamentos sobre estes dois eixos.

Chamemos: x , a projeção de um alinhamento sobre o eixo dos X
 y , a projeção do mesmo alinhamento sobre o eixo dos Y

l , o comprimento do alinhamento e

Az , o seu azimute.

Teremos:

$$y = l \cdot \cos Az \quad (38) \quad \text{e} \quad x = l \cdot \sin Az \quad (39)$$

Com efeito, a Fig. 75 (a) dá:

$$y = AY = l \cdot \cos Az \quad \text{e} \quad x = AX = l \cdot \sin Az \quad (\text{azimute } Az > 90^\circ)$$

A Fig. 75 (b) dá:

$$\begin{aligned} \cos Az' &= \cos (180^\circ - Az) = -\cos Az \\ \sin Az' &= \sin (180^\circ - Az) = \sin Az \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} y &= -AY = -l \cdot \cos Az \\ Az' &= -l \cdot (-\cos Az) = l \cdot \cos Az \\ \text{e } x &= AX = l \cdot \sin Az' = l \cdot \sin Az \quad (\text{azimute } Az > 180^\circ) \end{aligned}$$

A Fig. 76 (c) dá:

$$\begin{aligned} \cos Az &= \cos (180^\circ + Az') = -\cos Az' \\ \sin Az &= \sin (180^\circ + Az') = -\sin Az' \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} x &= -AY = -l \cdot \cos Az' = l \cdot \cos Az \\ \text{e } y &= -AX = -l \cdot \sin Az' = l \cdot \sin Az \end{aligned}$$

A Fig. 76 (d) dá:

$$\begin{aligned} \cos Az &= \cos (360^\circ - Az') = \cos Az' \\ \sin Az &= \sin (360^\circ - Az') = -\sin Az' \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} x &= AY = l \cdot \cos Az' = l \cdot \cos Az \\ y &= -AX = l \cdot \sin Az' = l \cdot (-\sin Az') = l \cdot \sin Az \end{aligned}$$

Vê-se portanto que as fórmulas (1) e (2) verificam-se para todos os quadrantes. Os sinais das projeções concordam com os sinais das linhas trigonométricas; no primeiro quadrante x e y são positivos; no segundo x é positivo e y é negativo; no terceiro x e y são negativos; no quarto x é negativo e y positivo.

É fácil de ver que no primeiro quadrante o rumo R é igual ao azimute

$$(R_1 = Az)$$

no segundo o rumo $R = 180^\circ - Az = Az' (R_2)$

no terceiro: $R = Az - 180^\circ = Az' (R_3)$

no quarto: $R = 360 - Az = Az' (R_4)$

As fórmulas (38) e (39) podem então tomar o aspecto seguinte:

$$y = l \cdot \cos R \quad (40) \quad \text{e} \quad x = l \cdot \sen R \quad (41)$$

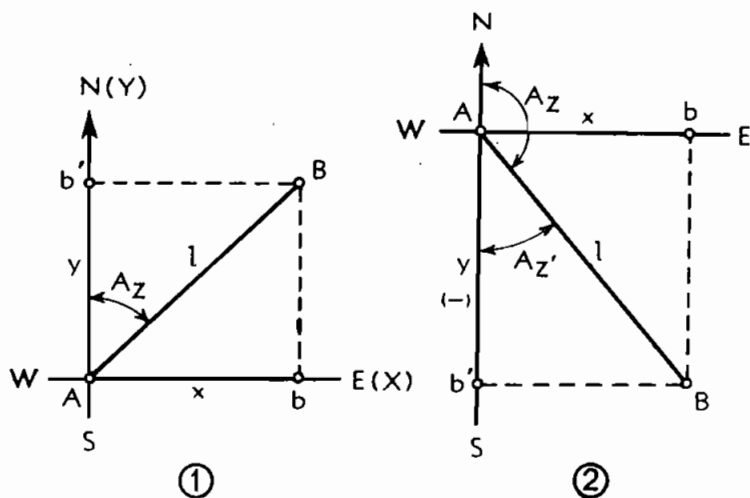


FIG. 75

A projeção y é positiva no 1.º e 4.º quadrantes, isto é, quando o rumo é *norte*; é negativa no 2.º e 3.º quadrantes, isto é, quando o rumo é *sul*.

A projeção x é negativa nos 3.º e 4.º quadrantes, isto é, quando o rumo é *oeste*; é positiva quando o rumo é *este*, isto é, nos 1.º e 2.º quadrantes.

Seja calcular as coordenadas dos vértices do polígono ABCD (Fig. 77).

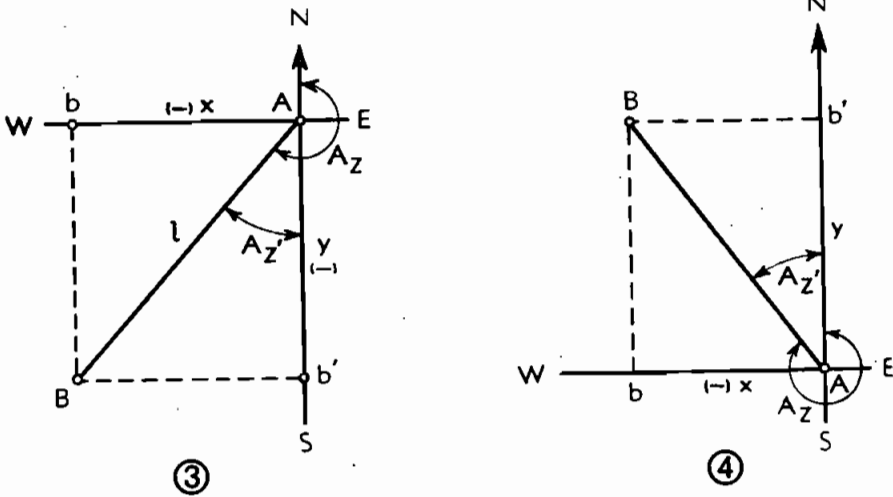


FIG. 76

Coordenadas do vértice B:

$$B \begin{cases} x_1 = l_1 \cdot \text{sen } Az_1 \\ y_1 = l_1 \cdot \text{cos } Az_1 \end{cases}$$

Coordenadas do vértice C:

$$C \begin{cases} x_2 = x_1 + l_2 \cdot \text{sen } Az_2 \\ y_2 = y_1 + l_2 \cdot \text{cos } Az_2 \end{cases}$$

Coordenadas do vértice D:

$$D \begin{cases} x_3 = x_2 + l_3 \cdot \text{sen } Az_3 \\ y_3 = y_2 + l_3 \cdot \text{cos } Az_3 \end{cases}$$

Coordenadas do vértice A:

$$A \begin{cases} x_0 = x_3 + l_4 \cdot \text{sen } Az_4 = 0 \\ y_0 = y_3 + l_4 \cdot \text{cos } Az_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{verificação})$$

Assim como se calculam as coordenadas em função dos alinhamentos e dos azimutes podem-se também determinar estes em função daquelas. Para isso faz-se uso de duas fórmulas de Geometria algébrica, que são

respectivamente a distância de dois pontos, e a tangente do ângulo de uma reta com o eixo das coordenadas:

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \quad (42)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x' - x}{y' - y} \quad (43)$$

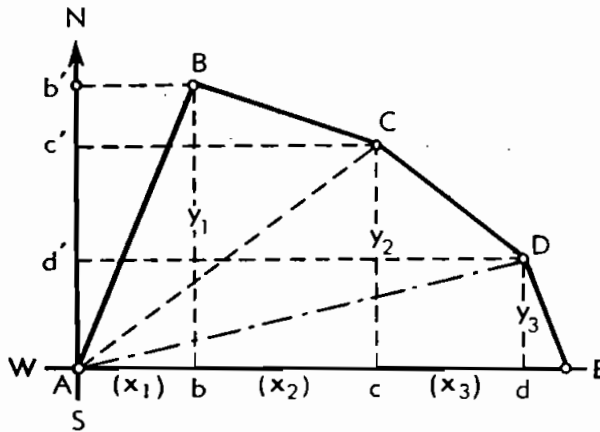


FIG. 77

Por exemplo, o azimute e o comprimento da diagonal AC do polígono $ABCD$ seriam:

$$AC = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(l_1 \cdot \operatorname{sen} Az_1 + l_2 \cdot \operatorname{sen} Az_2)^2 + (l_1 \cdot \cos Az_1 - l_2 \cdot \cos Az_2)^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2}{y^2} = \frac{l_1 \cdot \operatorname{sen} Az_1 + l_2 \cdot \operatorname{sen} Az_2}{l_1 \cdot \cos Az_1 - l_2 \cdot \cos Az_2}$$

57 - Fórmula de Gauss para a avaliação das áreas

Determina-se a superfície do polígono em função das coordenadas retangulares dos seus vértices.

Seja o polígono $ABCDE$ (Fig. 78), $y_a, y_b, \text{etc.}$ e $x_a, x_b, \text{etc.}$ respectivamente, as ordenadas e as abscissas dos seus vértices $A, B, \text{etc.}$ A área do polígono será igual à soma das áreas:

$$A = y_b BC y_c + y_c CD y_d - (y_c ED y_d + y_a AE y_c + y_b BA y_a)$$

Obs.: Nesta igualdade os símbolos $y_b, y_c, \text{etc.}$, designam pontos; nas equações que se vão seguir esses símbolos designam ordenadas.

A área de um trapézio é igual ao produto da altura pela semi-soma das bases.

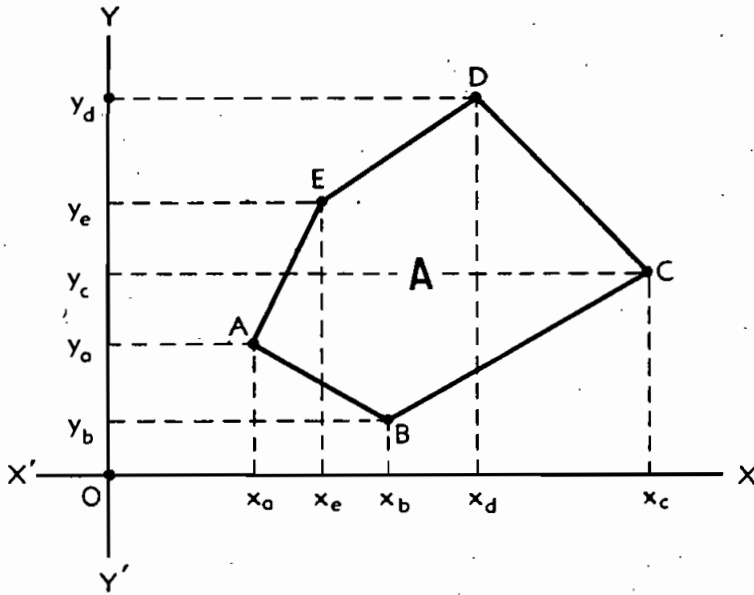


FIG. 78

Ou

$$A = \frac{1}{2} [(y_a - y_b)(x_b + x_c) + (y_a - y_o)(x_o + x_d) - (y_d - y_e) \cdot (x_d + x_e) - (y_e - y_a) \cdot (x_e + x_a) - (y_a - y_b)(x_a + x_b)] \quad (44)$$

Trocando os sinais dos y:

$$A = \frac{1}{2} [(y_b - y_a)(x_a + x_b) + (y_o - y_b)(x_b + x_c) + (y_o - y_c)(x_o + x_d) + (y_e - y_d)(x_d + x_e) + (y_a - y_e)(x_e + x_a)]$$

ordenando:

$$A = \frac{1}{2} [(x_a + x_b)(y_b - y_a) + (x_b + x_c)(y_o - y_b) + (x_o + x_d)(y_d - y_c) + (x_d + x_e)(y_e - y_d) + (x_e + x_a)(y_a - y_e)]$$

ou generalizando:

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_3) + (x_4 + x_5)(y_5 - y_4) + \dots + (x_n + x_1)(y_1 - y_n)]$$

Regra: Multiplica-se a soma das abscissas dos vértices consecutivos tomados dois a dois, pela diferença das ordenadas correspondentes invertidas; e toma-se a metade da soma algébrica desses produtos para valor da área.

Nota: Quando a origem das coordenadas coincide com um dos vértices do polígono, o primeiro, por exemplo, a fórmula simplifica-se, pois nesse caso:

$$A = \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} (x_2 y_2) + (x_2 + x_3) (y_3 - y_2) + \dots + (x_{n-1} + x_n) (y_n - y_{n-1}) - x_n y_n$$

Desenvolvendo a fórmula (44), obtém-se:

$$A = \frac{1}{2} (y_a x_e - y_a x_b + y_b x_a + y_c x_b - y_c x_d + y_d x_c - y_d x_e + y_e x_d - y_e x_a - y_b x_c)$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_e - x_b) y_a + (x_a - x_c) y_b + (x_b - x_d) y_c + (x_c - x_e) y_d + (x_d - x_a) y_e]$$

Também:

$$A = \frac{1}{2} [x_a (y_e - y_b) + (y_a - y_c) x_b + (y_b - y_d) x_c + (y_c - y_e) x_d + (y_d - y_a) x_e]$$

Regra para o cálculo da área de um polígono em função das coordenadas retangulares dos seus vértices.

Multiplica-se a

abscissa		de cada vértice pela diferença
ordenada		

entre as

abscissas		de dois vértices adjacentes (fazendo as diferenças
ordenadas		no mesmo sentido em torno do perímetro)

e toma-se a metade da soma desses produtos para valor da área.

Nota: As fórmulas (3) podem ser deduzidas facilmente, para um polígono de n vértices, pelas seguintes *regras mnemônicas* (45 e 46)

$$x_n \cdot \frac{x_a}{y_a} \frac{x_b}{y_b} \frac{x_c}{y_c} \frac{x_d}{y_d} \frac{x_e}{y_e} \dots \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \frac{x_n}{y_n} \cdot x_a \quad (45)$$

ou

$$y_n \cdot \frac{x_a}{y_a} \frac{x_b}{y_b} \frac{x_c}{y_c} \frac{x_d}{y_d} \dots \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \frac{x_n}{y_n} \cdot y_a \quad (46)$$

Exemplo:

Dados:

$y_a = 552$ metros	$x_a = 100$ metros
$y_b = 300$ metros	$x_b = 761$ metros
Ordenadas $y_c = 771$ metros	Abscissas $x_c = 1\ 121$ metros
$y_d = 1\ 233$ metros	$x_d = 740$ metros
$y_e = 984$ metros	$x_e = 348$ metros

Pode-se adotar o seguinte quadro para disposição dos dados de operações.

Vértices	Ordenadas (y)	Abscissas (x)	Diferenças entre as abscissas alternadas	Duplas áreas (m ²)
A	552	100	— 413	— 227 976
B	300	761	— 1 021	— 306 300
C	771	1 121	+ 21	+ 162
D	1 233	740	+ 773	+ 995 109
E	984	348	+ 640	+ 629 760

$$\begin{aligned} \text{Área de } ABCDE &= \frac{1\ 048\ 755}{2} = && + 1\ 583\ 031\text{m}^2 \\ &= 524\ 377,50\ \text{m}^2 && - 534\ 276 \\ \text{Dupla área} &= 1\ 048\ 755 \end{aligned}$$

O valor acima pode ser verificado pela aplicação da fórmula análoga de projeção sobre o outro eixo.

58 – Levantamento dos detalhes

Junto às poligonais, tanto exteriores, como interiores, há um número maior ou menor de *objetos*, seja naturais ou artificiais, cujo conjunto constitui o *detalhe do levantamento*. Estes objetos devem ser representados no desenho na posição exata que ocupam no terreno e, tanto

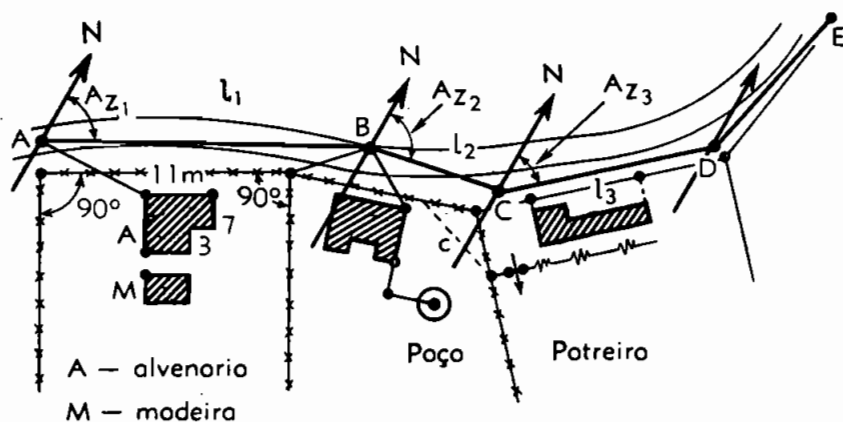


FIG. 79

quanto possível, com as dimensões proporcionais às suas homólogas reais; em escalas pequenas são substituídas por *sinas convencionais*.

É determinada em primeiro lugar a posição dos *pontos principais*, como, por ex., as mudanças de direção das estradas e caminhos, cruza-

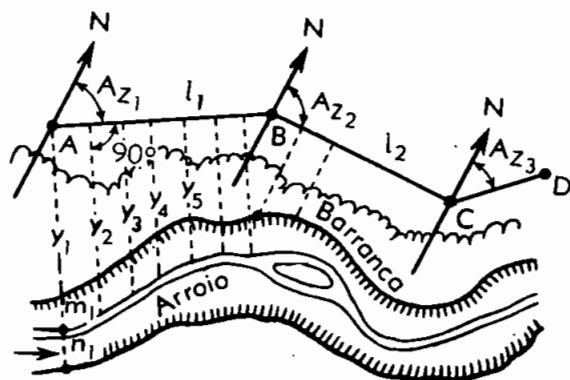


FIG. 80

mentos, casas isoladas, cursos d'água com suas inflexões, etc. Depois se fará a ligação dos *pontos secundários*, que são os verdadeiros elementos do detalhe: ângulos dos muros e paredes, pontos de separação das culturas, cercas divisórias das propriedades, etc.

O primeiro processo que se pode empregar é o de levantamento por *caminhamento*, aplicado às estradas, caminhos, ruas, divisas. Seja levantar os detalhes ao longo da estrada *ABCDEF* (Fig. 79).

Parte-se do ponto *A*, tomando o valor do azimute de *AB* e de *AM*, canto de uma edificação, com medidas das coordenadas polares α e m e assim sucessivamente de todos os detalhes representados na figura.

Outro processo empregado é o desenvolvido na Fig. 80, por *abscissas* e *ordenadas*, executado com trena e um esquadro; empregado também de preferência no levantamento de estradas e de detalhes afastados da poligonal.

Pelas medidas inscritas, no croqui, é fácil compreender a reprodução na planta, em escala; a clareza de anotações favorece o trabalho do desenhista.

B) LEVANTAMENTO REGULAR, A TEODOLITO E TRENA

§ 10 – Teodolitos em geral

Os instrumentos topográficos e geodésicos empregados na medida dos ângulos têm a denominação genérica de *goniômetros*; quando somente medem ângulos horizontais são chamados de *azimutais*, e somente os ângulos verticais de *eclímetros*.

Para a medida simultânea dos ângulos horizontais e verticais temos os goniômetros, também chamados de *teodolitos* (a etimologia do termo é duvidosa, pois alguns autores dizem ser de origem *grega*: de *thealstai*, ver, e *dolichos*, longe; e outros do artigo inglês *the* com a palavra árabe *alhidade*). No ano de 1571 é que se encontra menção, pela primeira vez, na obra *Geometrical practice – Pantometria*, de Leonard Digges, o termo *Theodelitus*.

Fazem parte ainda dos goniômetros os *esquadros graduados*, as *bússolas* ou goniômetros magnéticos, os *sextantes* ou goniômetros de reflexão e ainda os *goniógrafos*, que embora sem círculos graduados, dão as direções pelas quais graficamente são avaliados os ângulos.

O teodolito originariamente constitui instrumento universal, pois é empregado na medida dos ângulos das operações topográficas, geodésicas, ligadas, também, às operações de base ou *astronômicas*.

Em seus princípios gerais, o teodolito geodésico não difere do topográfico senão pela maior precisão de seus elementos, como a aproxima-

ção dos verniers ou dos microscópios micrométricos, a grandeza dos círculos, a sensibilidade dos níveis, a potência das lunetas, etc.

A estrutura e a forma difere com a casa construtora, bem como variam os processos de leitura e de manuseio, mas os conceitos geométricos fundamentais são os mesmos.

Os teodolitos, na sua generalidade, são *concêntricos*, isto é, têm a luneta passando pelo centro do instrumento, e raros são os teodolitos *excêntricos*, de fabricação antiga ou especial.

Os teodolitos, como veremos adiante, também são *reiteradores* ou *repetidores*, com lunetas giratórias ou *reversíveis* completamente, ou somente no lado da ocular.

Entre os teodolitos, destacamos os *teodolitos-trânsito* ou somente *trânsitos* (do inglês *transit*, passar) de procedência *norte-americana*, tipos Gurley, Keuffel & Esser e Berger, que são sólidos e de fácil manejo. Os mais importantes construtores europeus de instrumentos topográficos são: Wild e Kern, na *Suíça*; Zeiss, Fennel e Breithaupt, na *Alemanha*; Galileo e Salmoiraghi, na *Itália*; Morin em *França*; Watts, Cooke Troughton e Stanley, na *Inglaterra*, para citar somente os mais conhecidos entre nós. O *Japão* lançou no mercado aparelhagem idêntica, porém mais leve do que alguns modelos norte-americanos, fabricados por Fuji Sokuryoki de Tóquio. Em nosso país, em São Paulo, os fabricantes D. F. Vasconcellos e Rosenhain S.A. constroem aparelhagem acessória, e mesmo bons níveis de luneta e teodolitos, dos quais daremos detalhes adiante.

59 — Trânsito de precisão Gurley

Na Fig. 81 é representado em vista um trânsito de precisão GURLEY, modelo "Standard", com círculo vertical completo (*V*) de 5 polegadas (127 mm) de diâmetro e limbo horizontal (*H*) de 6 1/4 polegadas (159 mm), ambos com vernier e 1 minuto de aproximação direta ou 30" por estima. A luneta direta ou terrestre (*L*) tem 10 polegadas ou 254 mm de comprimento e uma objetiva de 35 mm de diâmetro com uma amplificação ou aumento de 22 diâmetros. Uma bússola central (*B*), impermeável, de rumos, com agulha magnetizada de 4 polegadas (102 mm) e tampa de cristal, permite a leitura fácil da orientação magnética dos alinhamentos.

Nesse trânsito, como aliás em todo o teodolito, encontram-se as seguintes partes componentes principais:

Um *suporte* (*S*) munido de três ou quatro *parafusos calantes* (*C*); um *limbo horizontal*, cujo diâmetro 0°-180° ou 0°-200° tem o nome de *linha de fé*; uma *alidade* concêntrica ao limbo, geralmente com 2

verniers diametralmente opostos, para a leitura das frações complementares do limbo; o limbo pode ser fixo ou, então, é suscetível de girar em torno do eixo principal do aparelho, juntamente com a alidade; uma luneta (*L*) cujo eixo de rotação descansa em dois *montantes* (*M*) solidários com a alidade; a luneta, nos trânsitos, faz uma rotação completa em torno do eixo secundário; razão do próprio nome do aparelho; um *limbo vertical*, com vernier, solidário com o eixo de rotação da luneta e destinado à medida das inclinações ou ângulos verticais.

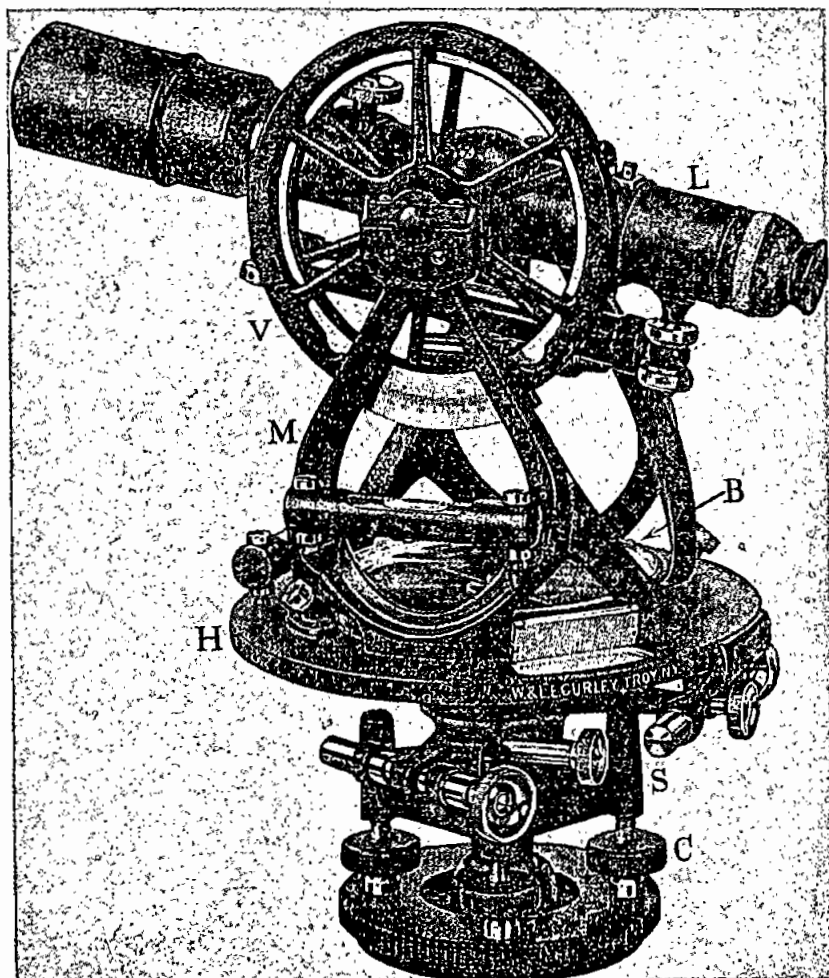


FIG. 81 — Trânsito Gurley "Standard"

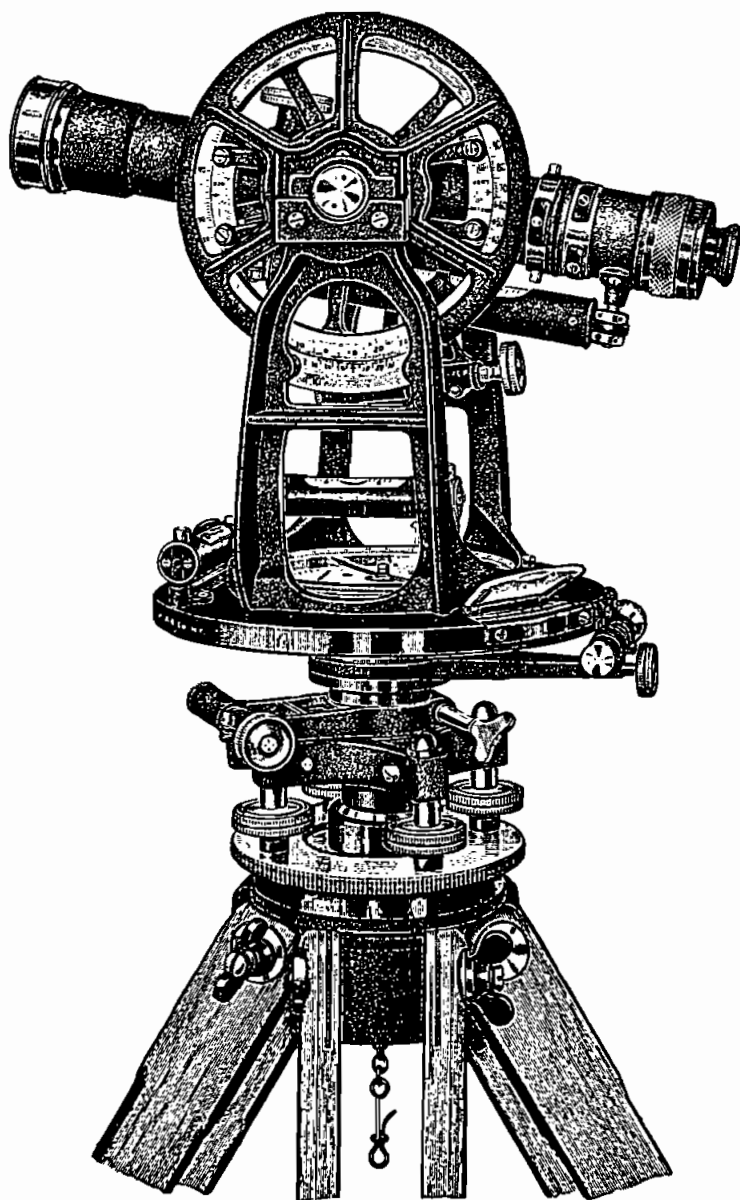
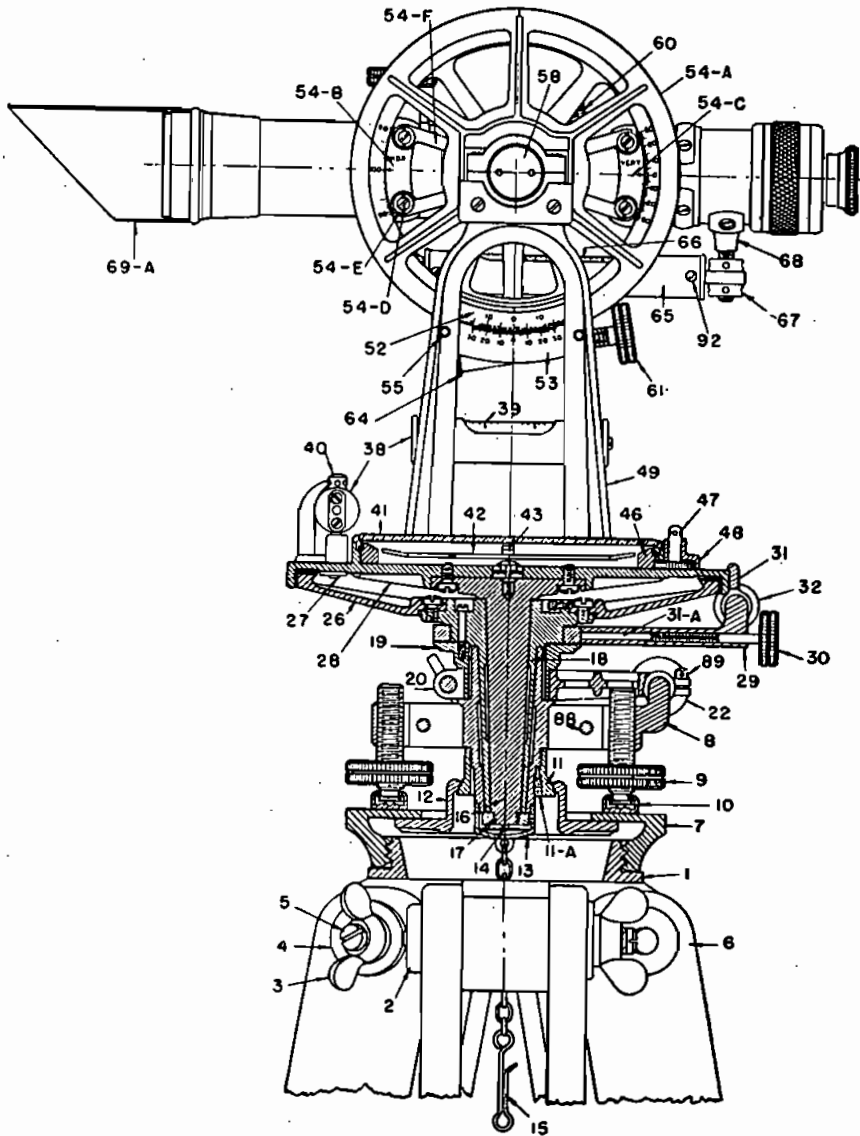


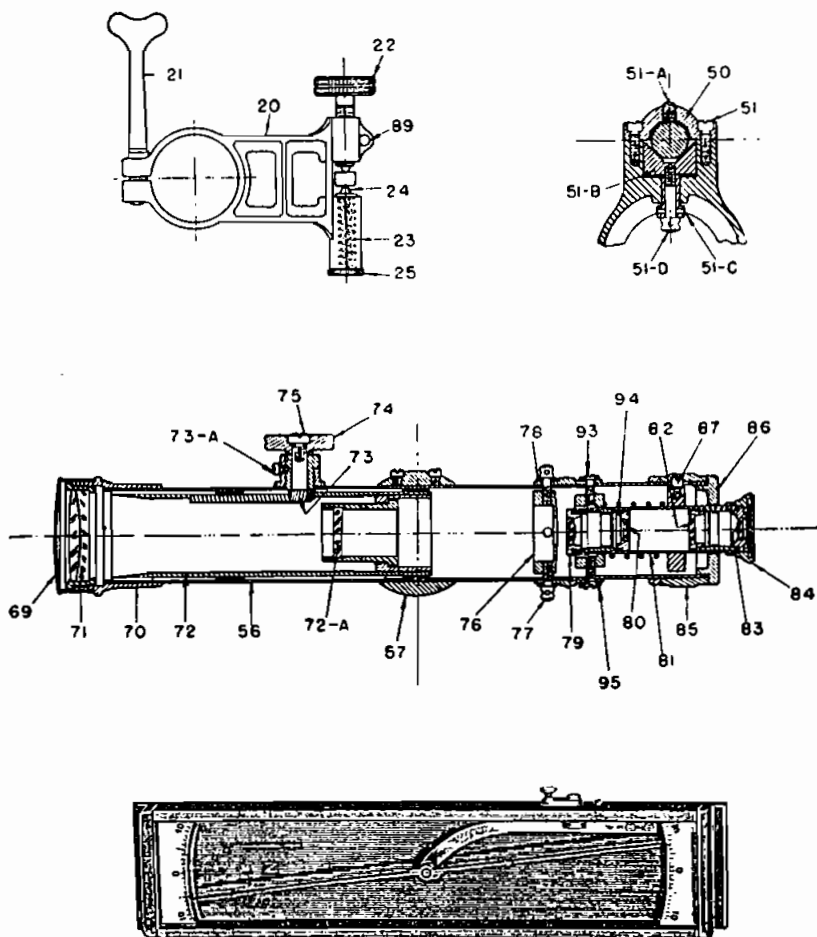
FIG. 82 — Tránsito Keuffel & Esser
a) Vista



b) Corte

60 – Trânsito Keuffel & Esser

Na Fig. 82 são representados os cortes de um trânsito *taqueométrico*, Keuffel & Esser, de focagem interna, com aumento de 24 diâmetros, stadimétrico, dotado de arco *Beaman*, com bússola central, aproximação de um minuto nos limbos horizontal e vertical, graduados de 0 a 360°, nos dois sentidos, sólido, relativamente leve e resistente, bem como detalhes da luneta e acessórios.



c) Detalhes

Nomenclatura. Tratando-se de um instrumento bastante usado em Topografia, julgamos útil (para maior familiaridade de qualquer teodolito) dar a nomenclatura das partes componentes principais do trânsito representado nos cortes da Fig. 82:

Peça	Nome	Peça	Nome
1	Cabeçote do tripé	49	Montante da luneta
2	Parafuso de ligação do tripé	52	Círculo vertical
7	Base do tripé	53	Nônio do círculo vertical
9	Parafuso calante	54-B	Indicador horizontal taquimétrico
10	Sapata do parafuso calante	54-C	Indicador vertical taquimétrico
12	Base móvel de ajustagem	55	Parafuso de ajustagem do nônio
15	Gancho e corrente do prumo	58	Tampão da extremidade do eixo da luneta
18	Cônico exterior	60	Nível da luneta
26	Limbo horizontal	67	Parafuso e ajustagem do nível da luneta
27	Nônio (vernier)	70	Tubo porta objetiva
28	Placa do nônio	71	Objetiva e sua montagem
30	Parafuso de pressão da alidade	72-A	Lente de focagem interna
32	Parafuso diferencial da alidade	76	Reticulos
38	Nível da placa de nônio	79-80	Lentes (I a IV) da ocular e sua
41	Tampa de vidro da bússola	82-83	montagem
42	Trava da agulha da bússola		
46	Limbo graduado da bússola		

61 — Teodolito de círculo duplo KERN-DKM, "Construção Dr. Wild"

Os teodolitos de círculo duplo *DK* com as últimas criações do Dr. Heinrich Wild, foram fabricados com exclusividade pela Casa Kern & Cia. (Aarau — Suíça), nos seguintes tipos principais:

DK₁ — pequeno teodolito do engenheiro civil.

DK₂ — teodolito-taqueômetro, para poligonação, taqueometria e trabalhos de piquetagem;

DKR — teodolito-taqueômetro anto-redutor (desenvolvido neste curso);

DKM₁ — pequeno teodolito de triangulação, com micrômetro óptico;

DKM₂ — teodolito de triangulação, para triangulação de 3º e 4º ordem.

Os instrumentos *DK*, sem micrômetro óptico (*DK₁*, *DK₂*, *DKR*, etc.), oferecem rapidez e comodidade de operação e boa precisão. A leitura

pode se fazer de um único golpe de vista; cada leitura dá automaticamente a média aritmética de duas regiões diametralmente opostas do limbo, com leituras ditas de *coincidência*.

A imagem do limbo é bastante simplificada; tem-se sobre cada limbo duas escalas circulares de *intervalos diferentes*, dirigidas com o auxílio do campo de um microscópio à ocular comum disposta ao lado da luneta (ver Fig. 83).

A designação de *teodolito de círculo duplo* provém precisamente dessas duas graduações transportadas sobre cada limbo. Uma das escalas, a *divisão grosseira serve de índice* para a graduação propriamente dita ou *graduação fina*. Esta disposição dá, pela clareza da imagem do limbo, maior rapidez de leitura possível sem auxílio de micrômetro ou vernier.

Pode-se ler o *meio-minuto* sexagesimal ou *minuto* centesimal nos pequenos instrumentos (DK_1), e o $1/10$ min. sex. ($0,1'$) ou o $1/2$ min. cent. ($0,5$) nos modelos grandes (DK_2 , DKR , etc.).

Os instrumentos DK , com *micrômetro óptico* (DKM_1 , DKM_2 , etc.) utilizando a mesma disposição dos limbos, atingem a precisão do *segundo*. Para tal aproximação, vê-se no campo do microscópio uma graduação dupla, em vez de uma escala simples. Dois traços justapostos pertencem a duas graduações diferentes e provém de regiões opostas do limbo.

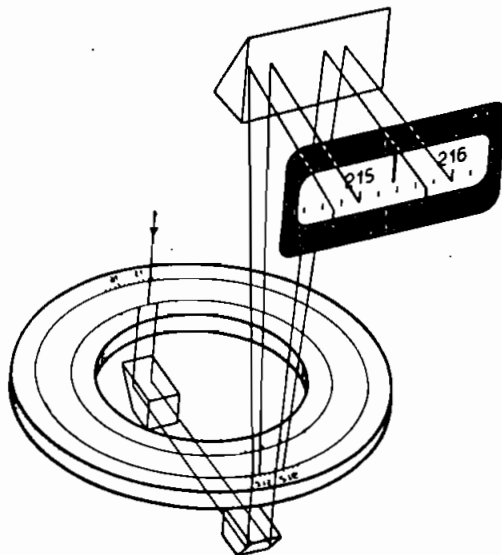


FIG. 83 — Representação esquemática da escala dupla

A observação das duas escalas, com o micrômetro óptico, dá a média aritmética das duas regiões opostas do limbo, pela ajustagem do índice sobre o eixo médio. Uma particularidade comum aos teodolitos DK é seu *novo sistema de eixos verticais* (Fig. 84), que substitui o eixo vertical propriamente dito. O novo sistema é constituído de duas superfícies de rolamento rigorosamente planas e de esferas de aço retificadas e controladas, assim como de um porta-esferas apropriado. Tal forma de eixos é menos sensível às variações de temperatura e de viscosidade do lubrificante.

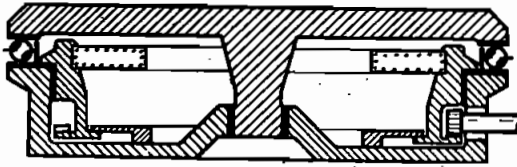


FIG. 84 -- Eixo vertical (esquemático)

O teodolito de triangulação DKM_2 (Kern) (Fig. 85) é um *teodolito de segundos*. É particularmente indicado para a taqueometria, observações astronômicas, levantamentos de detalhes em geral, e para a triangulação complementar. A observação dos limbos é feita com *leitura direta* do segundo, servindo-se do mesmo micrômetro óptico para os dois círculos; as leituras são feitas sucessivamente nos dois limbos: *não é necessário* levar o micrômetro a zero antes da leitura.

Em cada limbo existem duas escalas com intervalos de $10'$ (ou $20'$), uma só sendo numerada. Um traço de cada graduação é conduzido por um sistema óptico a ser visto *paralelo e ao lado* do que lhe é diametralmente oposto na outra escala; no campo do microscópio aparecem como traços duplos (exemplo da leitura da Fig. 85b).

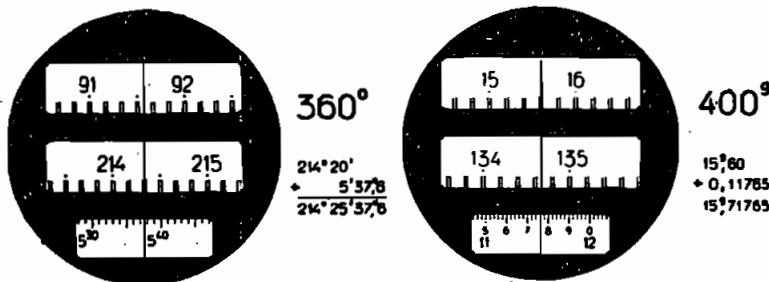
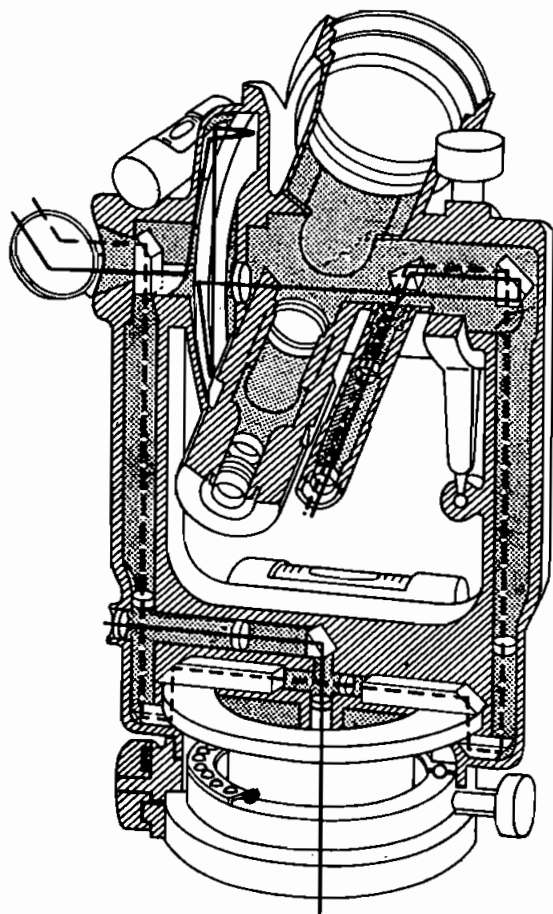


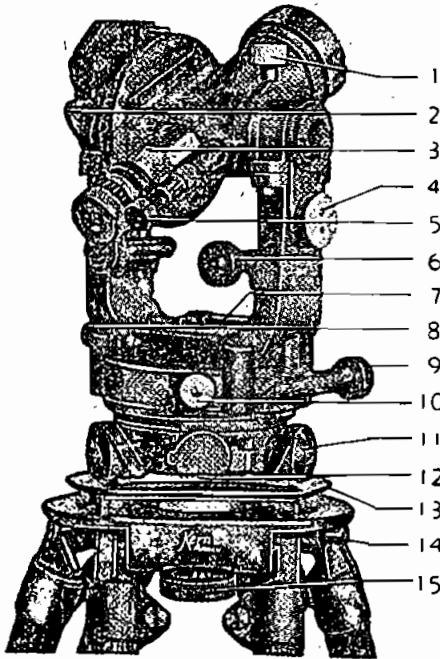
FIG. 85
Círculo horizontal
Círculo vertical
a) Exemplo de leitura dos limbos



b) Corte

Os traços duplos são deslocados no plano da imagem por um micrômetro óptico até serem vistos simetricamente com relação ao índice fixo. A leitura é feita nesta posição, lendo os graus (ou grados) inteiros e as dezenas de minutos sexagesimais (ou os 2') no índice fixo. O tambor do micrômetro é dividido com intervalos de 1'' (ou 2''), permitindo a avaliação, por estima, das frações de segundo.

No *campo visual do microscópio*, vêm-se simultaneamente três escalas. A superior representa sempre o limbo vertical, a média sempre o limbo horizontal (*Az*) e a inferior, o tambor do micrômetro.

Nomenclatura do DKM₂

- 1 – Parafuso de pressão da luneta
- 2 – Espelho de iluminação
- 3 – Anel de focagem
- 4 – Comando do micrômetro
- 5 – Microscópio de leituras
- 6 – Parafuso tangencial
- 7 – Nível de bôlha horizontal
- 8 – Prumo óptico
- 9 – Parafuso de chamada
- 10 – Parafuso de pressão
- 11 – Parafuso de calagem
- 12 – Comando de orientação do limbo
- 13 – Suporte da base
- 14 – Parafuso de fixação
- 15 – Parafuso de ancoragem

c) Vista
DKM₂ (Kern)

As características, ópticas e mecânicas do teodolito DKM₂ são as seguintes:

1. Aumento da luneta	30 ×
2. Abertura da objetiva	45 mm
3. Mínimo foco	1,7 m
4. Diâmetro do limbo graduado	
vertical	70 mm
horizontal	75 mm
5. Precisão de leitura do limbo – 360°	
direto	1"
por estima	0,1"
Idem – 400g	
direto	2 cc
por estima	1 cc
6. Nível de bolha (2 mm)	
horizontal	20"
vertical	20"
7. Altura do instrumento	15,5 cm

(Placa da base-eixo basculante)

8. Pesos:		
do instrumento	3,6 kg	
do tripé	5,5 kg	
9. Constantes:		
estadimétrica	100 ×	
instrumental	zero	

62 — Teodolito Zeiss, IV

O progresso técnico na construção da aparelhagem topográfica moderna se acentuou extraordinariamente nos últimos anos, e fábricas como a Zeiss, na Alemanha, Wild e Kern, na Suíça, e outras, iniciaram uma nova linha de aparelhos, com inovações e aperfeiçoamentos notáveis, preenchendo novas condições, tais como: maior precisão nas leituras, diminuição de retificações, dimensões menores e conseqüente menor peso dos aparelhos, sem prejuízo da resistência e solidez, rapidez nas observações e outros fatores.

Entre os muitos aparelhos, destacaremos alguns, tanto nos levantamentos comuns, como nos taqueométricos, que têm aprovado integralmente em nosso país, em uso eficiente em muitas repartições, tanto públicas como particulares, com reais proveitos, tanto em precisão, como rapidez de execução e economia de operação.

O *teodolito Zeiss IV* (Fig. 86) é um instrumento simples, estável, de rendimento elevado, graças à clareza, precisão e facilidade de instalação e leituras, ótimo no levantamento de poligonais e de detalhes taqueométricos de precisão, bem como nos trabalhos de triangulação secundária.

Seus característicos mais importantes são:

Redução de retificações, limitada principalmente a níveis de bolha, pois a mecânica de precisão ao micro, a gravação de graduações e escalas sobre vidros, o uso de prismas de alta precisão engastados em tubos, o uso de material resistente, simplificaram extraordinariamente o instrumento;

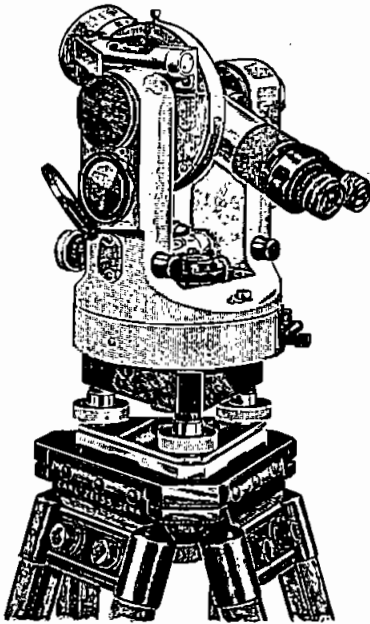


FIG. 86

Redução de dimensões e peso, pois a luneta de 28 diâmetros de aumento com uma objetiva de 35 mm de abertura, tem apenas 18 cm de comprimento; seu peso total, sem tripé, é de 4 kg e 700 g, e seu estojo de metal tem 26 x 17 cm de diâmetro;

Ocular de leituras do teodolito (Fig. 87) para os dois círculos ao lado da ocular da luneta;

Campos de leitura visíveis simultaneamente sobre os dois limbos horizontal e vertical;

Microscópio de escala, permitindo uma leitura direta dos graus e minutos e uma *estima* dos décimos de minutos.

Modo de leitura muito exato e seguro.

Iluminação dos campos de leitura para os dois limbos por janela única, com espelho sobre o montante da luneta;

Iluminação noturna, com uma lâmpada de bolso comum ou anti-grisu, em observações mineiras;

Centragem com fio a prumo, bastão-prumo, ou prumo óptico preferível, pois permite uma centragem rápida e precisa, qualquer que seja a intensidade do vento.

Para aumento de eficiência e precisão, *simplificação do serviço de campo*, aceleração das operações, o teodolito é ainda acompanhado de peças acessórias, tais como: *Bússola* superposta com lupa prismática ou *declinatória* tubular, dispositivo óptico *Diméss* para serviço taquométrico de precisão até 150 metros, prismas para objetiva e oculares e outras.

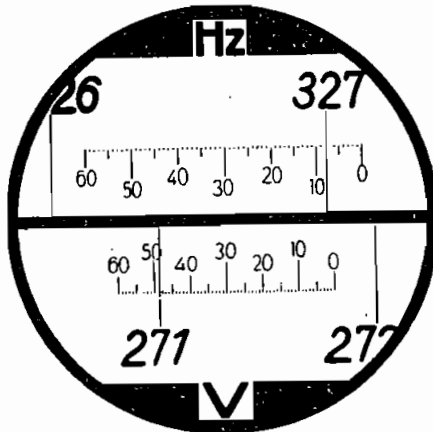


FIG. 87 — *Campo visual*, visto na ocular de leitura (divisão 360°). Leitura no limbo horizontal: 327°07'8. Leitura no limbo vertical: 271°48'6.

Na (Fig. 88), o instrumento é visto de frente e junto são dadas a *nomenclatura* de suas partes essenciais e os principais característicos ópticos e mecânicos.

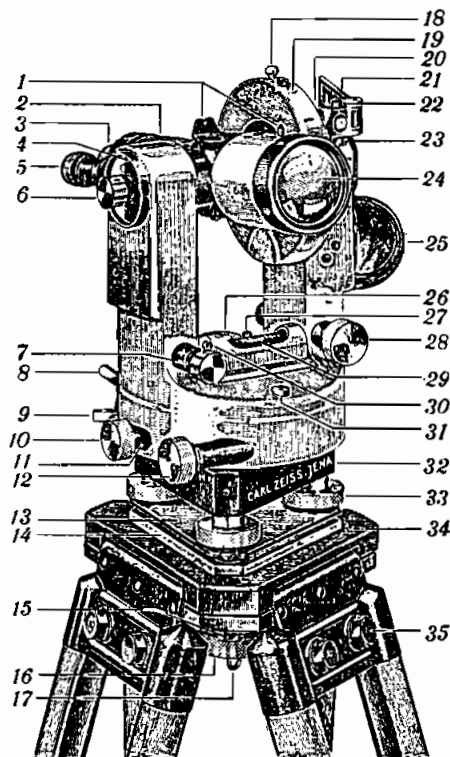


FIG. 88 — Zeiss IV

NOMENCLATURA

- | | |
|--|--|
| 1. Visor da luneta (alça e ponto de mira) | 13. Placa flexível de ligação do instrumento com o tripé |
| 2. Anel de focagem da luneta | 14. Placa-suporte do embasamento triangular |
| 3. Ocular com divisão em diotrias para a focagem do retículo | 15. Parafuso para regular o jogo das pernas do tripé |
| 4. Anel para o encaixe da bússola | 16. Parafuso de centragem para a fixação do instrumento ao tripé |
| 5. Ocular dos microscópios de leitura dos limbos | 17. Gancho de suspensão do fio de prumo |
| 6 e 7. Parafusos de fixação e ajustagem do movimento vertical | 18. Engate da bússola ao limbo |
| 8 e 9. Alavancas de repetição | 19. Cáter do limbo vertical |
| 10 e 12. Parafusos de fixação e ajustagem do movimento lateral | 20. Nível de índice dos ângulos verticais |

	CARACTERÍSTICAS ÓPTICAS E MECÂNICAS	
21. Espelho do nível de índice	Aumento da luneta	28 vezes
22 e 23. Parafusos de retificação do nível do limbo	Abertura livre da objetiva	35 mm
24. Objetiva da luneta	Distância focal total	210 mm
25. Espelho de iluminação dos limbos	Campo visual	1°40'
26. Nível esférico para a calagem provisora (verticalização aproximada)	Mínimo foco	1,80 m
27. Parafuso de retificação do nível esférico	Diâmetro do limbo (Az)	90 mm
28. Parafuso de ajustagem do nível (20)	Diâmetro do limbo (V)	70 mm
29. Nível cilíndrico para a calagem precisa	Intervalo de divisão	1° (360°)
30. Parafuso de retificação do nível (29)	Idem, idem	(400°) 1"
31. Chumaceira de fixação no estôjo	Aumento do microscópio de leitura	33 vezes
32. Embasamento triangular	Leituras: direta	1'
33. Parafuso calante (nivelante)	(360°) por estima	1/10'
34. Base do tripé	Idem: direta	2"
35. Parafusos de fixação das pernas do tripé	(400°) por estima	1/5'
	Sensibilidade dos níveis	30"/2 mm
	Peso do instrumento	4,7 kg
	Peso do tripé	5,3 kg
	Diâmetro do círculo da bússola	90 mm
	Aumento do prumo óptico	5 vezes
	Dimensões do estojo de metal:	
	altura	26 cm
	diâmetro	17 cm

O teodolito IV ainda pode ser dotado de equipamento para poligonometria de precisão.

Para o transporte é dotado o instrumento de excelente *estojo* de metal, útil até para o transporte do aparelho montado dentro da mata; e, para viagens, ainda pode ser dotado de uma *caixa* suplementar (Fig. 89).

Aparelhagem Wild. A Casa Wild, de Heerbrugg, na Suíça, é a que fabrica uma série completa de aparelhos, que são o T0, T1, T2, T3, e T4 com as características seguintes:

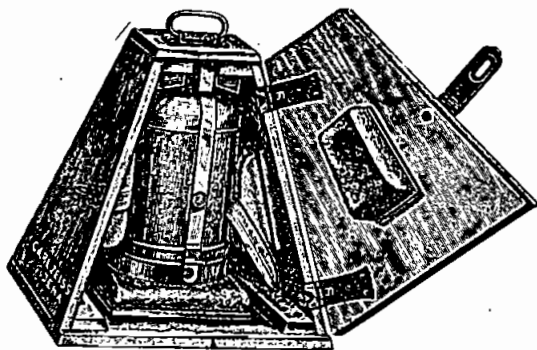


FIG. 89 — Caixa transporte

Wild T0 – Teodolito bússola, destinado a trabalhos simples de levantamento e com os ângulos diretamente orientados com relação ao norte-sul, mas obtidos com a *aproximação do minuto*;

Wild T1 – Pela sua importância é estudado com mais detalhe, logo a seguir;

Wild T2 (universal) – Destina-se a trabalhos de poligonação de precisão, de triangulação topográfica e, mesmo, geodésica de 3.^a ordem e a observações astronômicas;

Wild T3 – Destina-se a todos os trabalhos de triangulação geodésica e também a trabalhos especiais de Engenharia civil (estudo de *deformações de obras*), em que é necessário medir os ângulos horizontais com grande precisão;

Wild T4 (astronômico) – Destina-se a todas as observações geodésicas e astronômicas de alta precisão.

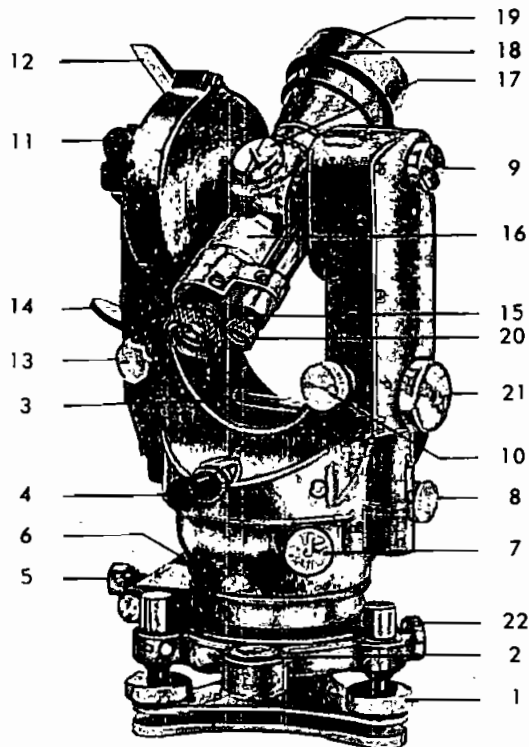


FIG. 90 — Wild T1

63 - Teodolito repetidor Wild, T1

O teodolito T1 é repetidor e destina-se a todos os trabalhos de levantamento clássico, inclusive a poligonação. Os limbos são observados num só ponto e a ocular, junto à luneta, é comum aos dois microscópios, avaliando-se as frações da menor divisão com o mesmo micrômetro óptico.

A (Fig. 90) representa o novo teodolito-taquímetro Wild T1, empregado correntemente em Topografia e, principalmente, em poligonais e taqueometria, é de fácil manejo, peso reduzido, com leitura dos limbos rápida e segura e de construção simples.

NOMENCLATURA

1. Parafuso calante (nivelante)
2. Nível esférico
3. Nível tubular de verticalização
4. Ocular do prumo óptico
- 5 e 6. Parafusos de fixação e ajustagem do limbo horizontal
- 7 e 8. Idem, idem, da alidade
- 9 e 10. Idem, idem, do movimento vertical
- 11 e 12. Nível do limbo vertical e espelho

13. Parafuso de ajustagem do nível do limbo vertical
14. Espelho de iluminação dos limbos
15. Ocular da luneta
16. Anel de focagem da luneta
17. Botão de regulagem da iluminação do retículo
18. Visor
19. Objetiva da luneta
20. Ocular dos microscópios de leitura dos limbos
21. Botão do micrômetro óptico
22. Parafuso de fixação do aparelho à base.

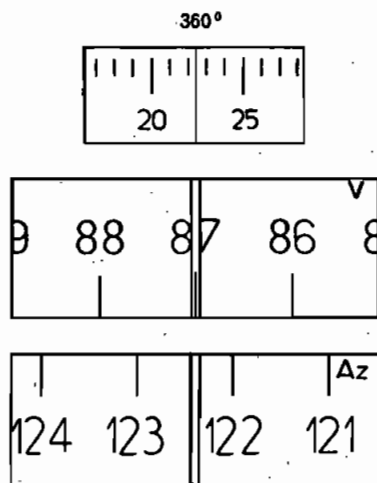


FIG. 91 - Leituras
Leitura do círculo vertical: $87^{\circ}22',4$

A luneta tem lente de focagem interna. O sistema de centragem óptica é ligado à alidade, permitindo a verificação por inversão de 180° . Dois eixos cilíndricos independentes, duas pinças com parafusos de chamada, do limbo e da alidade, destinam-se à medida dos ângulos pelo método de repetição ou para obter qualquer leitura do limbo com uma pontaria da luneta. O instrumento é separável de sua base de parafusos calantes: uma pinça assegura a centragem automática do instrumento ou dum sinal de pontaria sobre a base.

A leitura do limbo é a mais simples possível e efetua-se numa só posição.

As imagens dos dois limbos e o tambor do micrômetro aparecem no microscópio da luneta (Fig. 91).

Lêem-se os minutos diretamente e os décimos por estima. Uma bússola simples e elevada colocada no suporte do teodolito, com a luneta podendo girar completamente, dá a orientação magnética dos alinhamentos.

Para a medida muito precisa das poligonais o instrumento pode ser acompanhado de 3 tripés, um próprio e 2 para os sinais, de ré e de frente, dotados de centragem óptica e sinais com iluminação elétrica para serviços em minas e observações noturnas.

Para visadas zenitais, adaptada no lugar da ocular ordinária, pode-se usar uma *ocular em cotovelo*.

As principais características ópticas e mecânicas do teodolito são:

Diâmetro do limbo horizontal de cristal — 78 mm

Diâmetro do limbo vertical de cristal — 70 mm

Diâmetro da objetiva — 40 mm

Comprimento da luneta — 145 mm

Aumento da luneta — 28 vezes

Distância mínima — 1,3 m

Constante estadimétrica — 100

Constante instrumental — 0

Sensibilidade dos níveis (para 2 mm) — 30"

Peso do instrumento — 4,850 kg

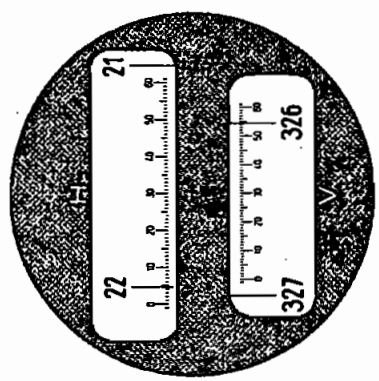
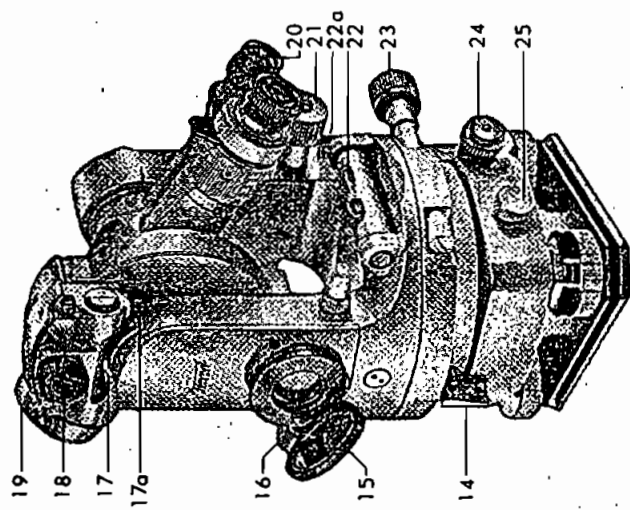
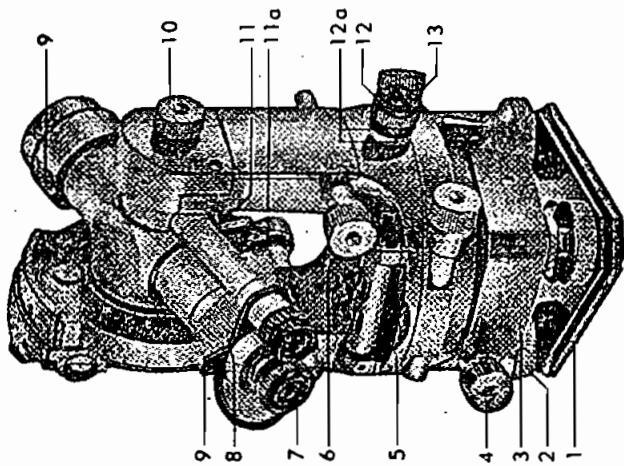
Peso do estojo metálico — 1,700 kg

64 — Teodolito taqueométrico Fennel, "FT1"

A importante fábrica alemã de instrumentos topográficos e geodésicos *Otto Fennel Söhne K. G. Kassel* lançou há poucos anos uma linha nova de teodolitos, níveis e taqueômetros, que têm aprovado integralmente, pelo esmerado acabamento, precisão, praticabilidade e leveza. Teodolitos excelentes são o "FTS", especial para construção e levantamentos comuns, o "FT1", que detalharemos a seguir, o "FT2" para triangulações e levantamentos de precisão, com aproximação de segundo, o teodolito de suspensão para galeria de minas e mais três tipos para levantamentos taqueométricos auto-redutores.

O teodolito "FT1" é universal, pois pode ser usado em poligonizações, triangulações de 3.^a e 4.^a ordem, taquimetria, marcações de obras, orientação geodésica e astronômica.

As suas características construtivas (Fig. 92) são as de um instrumento moderno e de grande capacidade. A leitura dos círculos graduados, no microscópio, é feita com facilidade e rapidez.



Escalo, 360°
 Circulo horizontal
 22° 04' 36"
 Circulo vertical
 326° 54' 24"

c

Fig. 92 — Teodolito Fennel

a

b

A centralização é feita com prumo óptico na parte superior do instrumento. O sistema de eixos cônicos independentes permite repetição dos ângulos com precisão.

Damos abaixo a *descrição dos elementos construtivos* (nomenclatura) e os *característicos ópticos e mecânicos* do teodolito acima figurado.

NOMENCLATURA

- | | |
|---|---|
| 1. Chapa da base | 14. Fixação do limbo |
| 2. Parafuso calante | 15. Refletor para iluminação |
| 3. Base de apoio do teodolito | 16. Parafuso micrométrico da alidade vertical |
| 4. Parafuso de ajustagem do limbo | 17. Nível da alidade vertical |
| 5. Parte superior | 17-A. Parafuso ajustador do (17) |
| 6. Nível de bolha esférico | 18. Prisma do nível (17) |
| 7. Ocular com anel dióptrico | 19. Objetiva |
| 8. Anel de focagem | 20. Ocular microscópica |
| 9. Visor | 21. Parafuso do microscópio |
| 10. Parafuso de fixação do basculamento da luneta | 22. Nível horizontal |
| 11. Nível da luneta | 22-A. Parafuso de ajustagem (22) |
| 11-A. Parafuso ajustador do nível | 23. Parafuso micrométrico de ajustagem da alidade |
| 12. Fio de prumo (óptico) | 24. Dispositivo para soltar a contramola |
| 12-A. Parafuso ajustador do prumo óptico | 25. Dispositivo de fixação. |
| 13. Fixação da alidade | |

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

<i>Luneta</i>		<i>Círculo vertical</i>	
Luneta analítica com lente de focagem interna, reversível em ambos os sentidos, com lentes aperfeiçoadas.		Diâmetro	70 mm
Comprimento da luneta	160 mm	Divisão (360° ou 400°)	1° ou 1'
Aumento	28 x	Leitura direta	1' ou 1"
Diâmetro da objetiva	36 mm	Avaliação	0,1' ou 0,1"
Mínimo foco	1,2 m	<i>Ângulo de desvio do nível para 2 mm de deslocamento da bolha</i>	
Constante de adição	zero	Nível esférico	8'
Constante de multiplicação	100	Nível tubular, horizontal e vertical	40"
		Nível tubular de reversão	30"
<i>Círculo horizontal</i>		<i>Pesos</i>	
Diâmetro	90 mm	Instrumento	5 kg
Divisão (360° ou 400°)	1° ou 1'	Estojo metálico	4 kg
Leitura direta	1' ou 1"	Tripé com pernas extensíveis	7 kg
Avaliação	0,1' ou 0,1"		

65 — Teodolito repetidor TV-M1 com bússola, de fabricação nacional — D. F. Vascellos — São Paulo

Inteiramente manufaturado no Brasil, foi há poucos anos lançado no mercado um tipo de teodolito, o TV-M1, adequado aos levantamentos topográficos comuns, sólido, com óptica de primeira ordem, bússola central de verificação e limbos graduados em escalas em preto com graduações em branco, muito visíveis e sem reflexos.

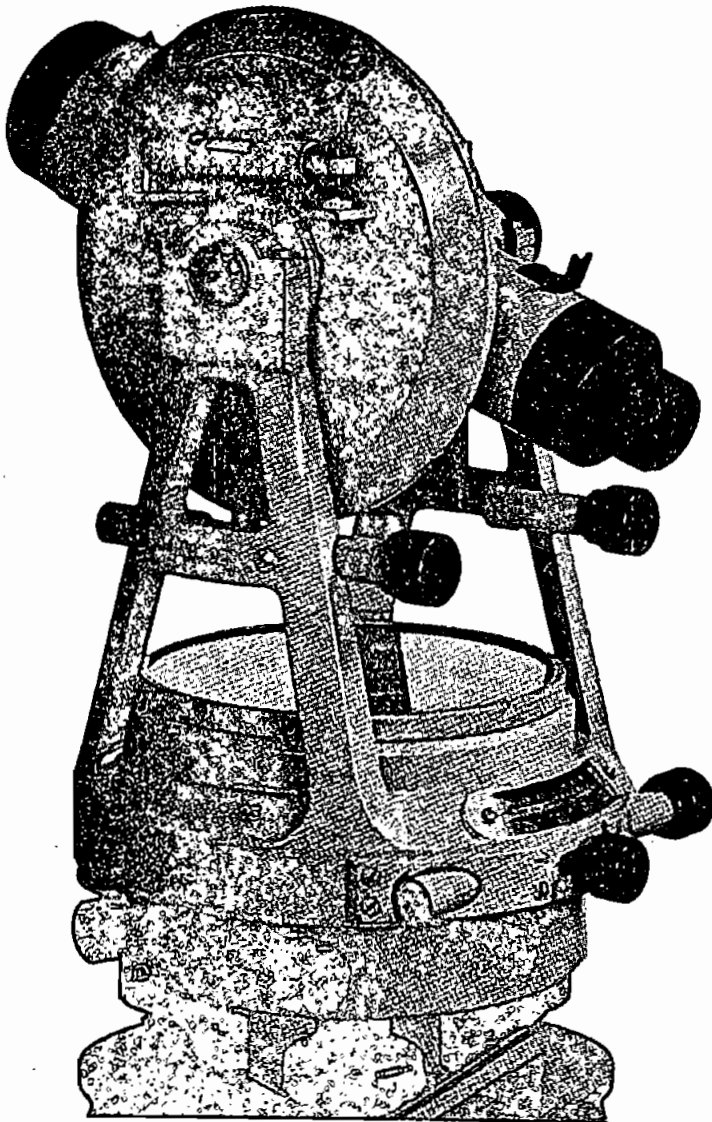


FIG. 93 - Teodolito Vasconcellos

O 2.º modelo fabricado, o TV-M2 apresenta apreciáveis modificações que melhoram as condições de retificação.

Trata-se de um instrumento de fácil manejo e de preço acessível, que satisfaz, como dissemos, aos levantamentos topográficos comuns, que não exigem grande precisão.

A seguir, transcrevemos as especificações e características do fabricante, que são criteriosas.

TEODOLITO REPETIDOR com bússola (TV-M1)

ESPECIFICAÇÕES

Aumento da luneta	28 vezes
Diâmetro da objetiva	40 milímetros
Constante de multiplicação	100
Constante de adição	Zero
Leitura dos ângulos horizontal e vertical	1 minuto
Diâmetro do círculo da bússola	100 milímetros
Sensibilidade dos níveis de prato	80 segundos
Sensibilidade do nível da luneta	30 segundos
Sensibilidade do nível do nônio	30 segundos
Peso do teodolito	3,400 kg
Peso do teodolito com estôjo, c/ acessórios	5,700 kg
Peso do tripé	5,000 kg

Características. O limbo horizontal é graduado de 0 a 360º nos dois sentidos e a escala é inclinada de 45º para maior comodidade de leitura.

O limbo do círculo vertical é graduado em 4 quadrantes de 0º a 90º permitindo a leitura direta do ângulo de elevação ou depressão.

A escala é inclinada de 30º para maior comodidade de leitura. O nônio de limbo vertical é ajustável mediante um nível, permitindo medir ângulos verticais isentos dos erros causados pelo nivelamento rápido do prato.

O círculo da bússola é dividido em quatro quadrantes, de 0 a 90º e de meio em meio grau.

Todas as escalas são pretas com graduações em branco, isentas de reflexos e fáceis de serem lidas.

A luneta é de imagem direta e a focalização se faz por meio de botão que se encontra no prolongamento do eixo vertical do instrumento, permitindo operar o enfoque sem tocar na luneta.

O nivelamento se faz com rapidez, mediante 3 parafusos calantes e dois níveis cruzados. Os parafusos calantes são facilmente ajustáveis de qualquer folga da rosca.

As lentes da luneta são revestidas com película anti-refletora (lentes azuis).

§ 11 – Detalhes das peças componentes de um teodolito. Eixos

66 – Níveis de bolha de ar

Os níveis de bolha de ar são destinados a calar um plano, de modo que seja horizontal, ou um eixo, de modo que seja vertical.

Consiste um nível (Fig. 94) em um tubo cintrado em forma de toro, fechado nas extremidades, o qual se enche previamente com um líquido, deixando um pequeno vazio, chamado a bolha de ar; esta é formada de ar ou de vapores do líquido. Na parede exterior do tubo existe traçada uma graduação simétrica em relação a um ponto central. O tubo do nível é abrigado contra os choques, por uma guarnição de latão, deixando apenas visível a parte graduada.

Como o nível de bolha é um aparelho muito sensível, seus dispositivos devem permitir colocá-lo em posição normal, quando se tiver afastado dela acidentalmente; para isso a guarnição de latão é ligada ao suporte, de um lado por uma charneira e do outro por um parafuso de pressão que permite ao mesmo tempo retificar o nível.

O líquido empregado não é a água, que é suscetível de congelação; usa-se álcool ou éter, ou ainda uma mistura desses dois líquidos. A bolha não deve ser muito curta, porque a capilaridade paralisaria os seus movimentos, tornando-a preguiçosa; dão-se-lhe comumente de 2 a 6 cm de comprimento. O diâmetro do tubo pode variar de um a um e meio centímetros.

A sensibilidade do nível é a medida da facilidade com que a bolha se desloca para uma pequena inclinação. A sensibilidade é proporcional ao raio de curvatura do toro. Este raio, nos aparelhos precisos, é de 20 a 30 m, o que produz um deslocamento unitário de 5 a 6" de inclinação. O eixo do nível de bolha é a tangente que passa pela parte mais elevada do toro do nível; deve ser horizontal, posto que na realidade ela seja inclinada, quando o aparelho não está retificado ou horizontalizado.

É importante, na prática, conhecermos o raio de curvatura e sensibilidade dos níveis de bolha do teodolito com que vamos operar, para saber até que grau de precisão devemos levar a calagem e leituras, a fim de atingir um desejado grau de precisão.

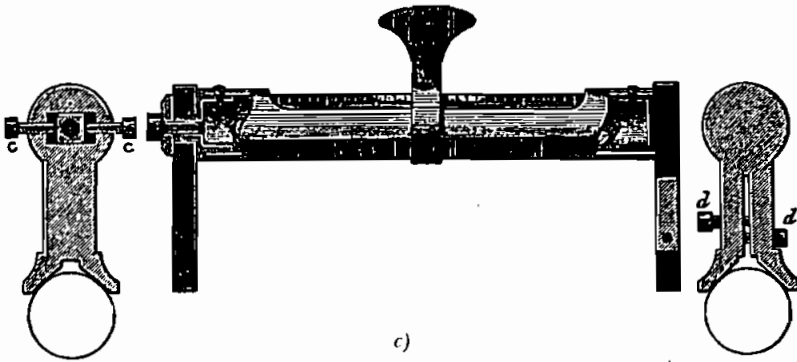
Seja (Fig. 95) d o comprimento de uma divisão de nível (2 mm) de um teodolito, instalado num ponto à distância D de uma régua graduada. Seja C o centro de curvatura do tubo; O o ponto central das divisões; a tangente em O vai interceptar a mira num ponto B . Dá-se à bolha, por meio dos parafusos calantes, um deslocamento máximo de n divisões; o ponto central, tendo percorrido também um arco igual a n divisões, irá ocupar a posição A , isto é, $OA = nd$; a tangente



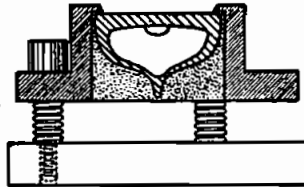
a)



b)



c)



d)

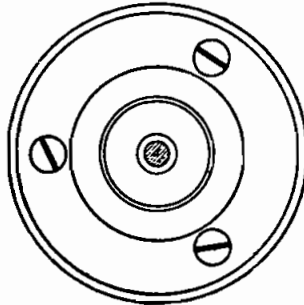


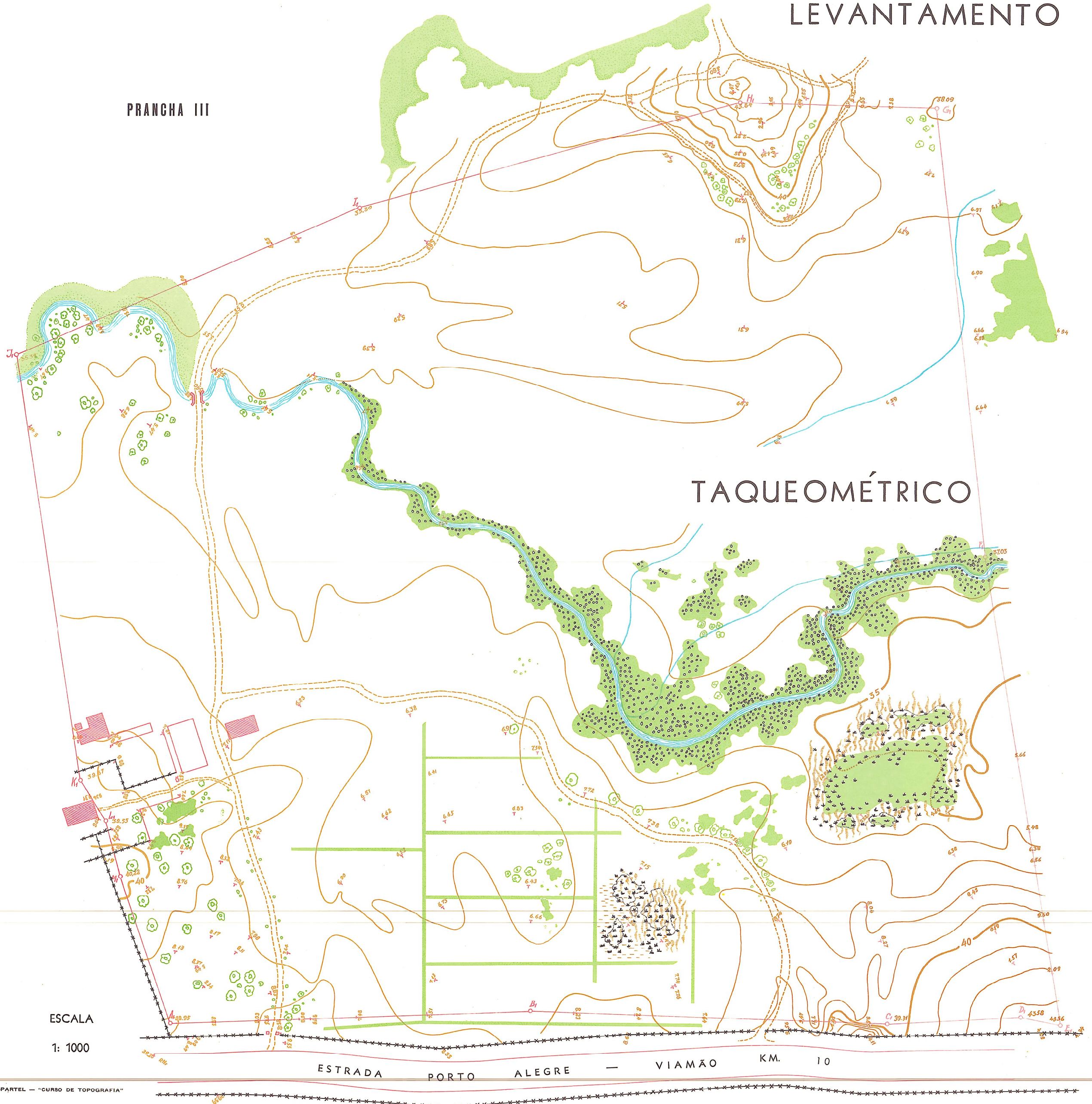
FIG. 94

a) Nível de régua
b) Nível de alidade

c) Nível de cavalete
d) Nível esférico

LEVANTAMENTO

PRANCHA III



TAQUEOMÉTRICO



ESCALA

1: 1000

ESTRADA PORTO ALEGRE — VIAMÃO KM. 10

em A cortará a mira em um ponto E e formará uma inclinação φ com relação à primeira tangente. Na prática, o deslocamento da bolha deve ser máximo: AA' , em lugar de AO .

Dos triângulos AOC e EBO , obtemos:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{BE}{BO} \quad \text{ou} \quad \frac{nd}{R} = \frac{h}{D} \quad \text{e} \quad R = \frac{nd}{h} D \quad (47)$$

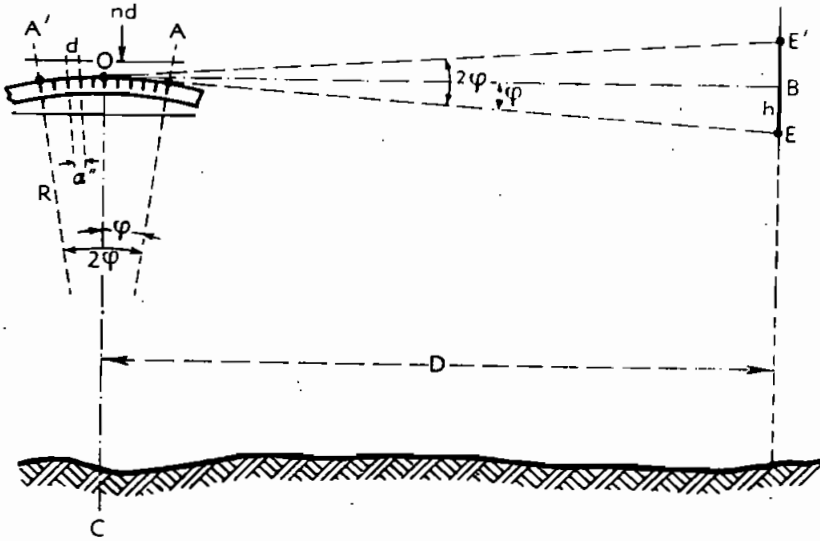


FIG. 95 — Determinação do raio de curvatura do nível

O valor de h é obtido pela diferença das leituras feitas através da luneta numa mira ou régua graduada, ou ainda em qualquer superfície, uma parede, por exemplo.

O ângulo central φ terá para valor:

$$\varphi = \frac{nd}{R} \quad \text{ou} \quad \varphi'' = \frac{nd}{R \cdot \text{arc } 1''}$$

ainda:

$$\varphi'' = \frac{206\,265 \cdot nd}{R} \quad (48)$$

O valor angular de uma divisão será:

$$\alpha'' = \frac{206\,265}{R} d$$

ou, como $d = 2$ mm, na maioria dos aparelhos

$$\alpha'' = \frac{412\,530}{R \text{ (mm)}} \quad (49)$$

A sensibilidade do nível (δ) é dada por um sensível afastamento da bôlha, geralmente de amplitude 1 mm, e, assim:

$$\delta'' = \frac{206\,265}{R \text{ (mm)}} \quad (50)$$

Num nível de raio $R = 15 \text{ m} = 15\,000 \text{ mm}$,

$$\delta'' = \frac{206\,265}{15\,000} = 13'',75$$

O erro resultante do afastamento de 1 mm (meia divisão do tubo) da sua posição média, para uma visada de 100 m, será:

$$\begin{aligned} e &= 100 \times \text{tg } 13'',75 \\ \log \cdot e &= \log \cdot 100 + \log \text{tg } 13'',75 = 3,823\,66 \\ e &= 0,006\,67 \text{ m.} \end{aligned}$$

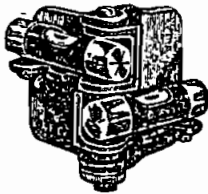


FIG. 96 - Nível para mira

Além dos níveis tubulares, existem ainda os circulares, esféricos, não só para calar aproximadamente os limbos de aparelhos de precisão, mas também verticalizar as miras (Fig. 96) para leitura correta.

O nível reversível (Fig. 97) com duas superfícies de *toro* ou *tonel* opostas, tem dois eixos tangentes que se supõem praticamente *paralelos* entre si.

O pequeno ângulo que formam se chama *ângulo de convergência*. A mecânica óptica moderna constrói níveis reversíveis tão perfeitos, que seus ângulos de convergência são *desprezíveis*. A *Casa Kern*, por ex., adota a tolerância de apenas 0,2'' para a falta de paralelismo dos eixos de um nível reversível, empregado principalmente nos níveis de luneta, pois simplifica as retificações.

Com o objetivo de facilitar a leitura da posição relativa dos extremos da bolha com relação ao ponto normal de tangência, a parte superior do tubo (Fig. 98) tem uma série de traços transversais, equidistantes entre si e dispostos à direita e à esquerda do ponto médio, como detalhado nos modelos dados.

Nos aparelhos modernos estes traços distam entre si de 2 mm, e nos antigos de 2,26 mm (linha de Paris); nos aparelhos de procedência inglesa ou americana, $1/12''$ ($\sim 2,12$ mm).

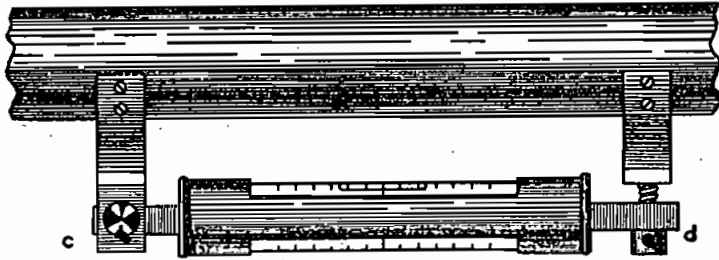


FIG. 97 — Nível reversível

Diz-se que a *bolha* de um nível está *centrada*, ou que o nível está centrado, quando o ponto médio de bolha coincide com o ponto de tangência central. Caso contrário, o nível está *descentrado*, com o eixo elevado para o lado do desvio da bolha.

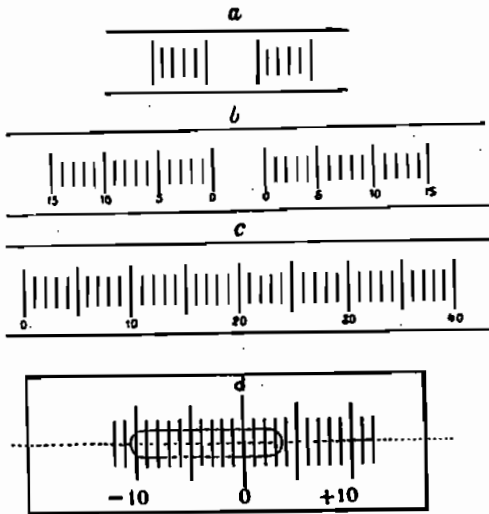


FIG. 98 — Modelos de divisão

67 — Lunetas

a) *Generalidades.* A luneta empregada em Topografia é geralmente a luneta astronômica ou de imagem invertida; a luneta terrestre ou de imagem direta é usada também em muitos aparelhos, principalmente norte-americanos e ingleses. Uma luneta consta essencialmente de dois sistemas de lentes convergentes. O primeiro é destinado a dar uma imagem real de um objeto observado, e denomina-se a *objetiva*; o segundo sistema óptico, chamado a *ocular*, serve de lupa em

relação à imagem fornecida pela objetiva, isto é, aumenta as suas dimensões, proporcionalmente à potência do instrumento.

A fim de permitir a precisão das visadas, a luneta possui ainda um diafragma anular ou um disco no qual estão distendidas ou gravadas linhas, uma horizontal e outra vertical, que constituem o *retículo*; os fios do retículo são de teia de aranha ou de platina, ou, principalmente, traços sobre o vidro. A ocular, o retículo e a objetiva constituem, pois, a luneta de um teodolito. As oculares podem ser simples, dando

imagens invertidas, ou compostas, dando imagens normais. As oculares simples são classificadas em positivas ou de RAMSDEN e são as mais usadas, e em negativas ou de CAMPANI, ditas também de HUYGHENS.

A *objetiva* é uma lente dupla, composta de uma lente biconvexa de *crow-glass* e outra côncavo-convexa de *flint-glass*, justapostas exatamente, produzindo assim, por seus poderes dispersivos diferentes, o que se chama uma *lente acromática*.

As lunetas dos instrumentos antigos são constituídos de 3 tubos: um porta-ocular, um porta-retículo e o terceiro porta-objetiva, deslizando um dentro do outro com atrito suave. Os inconvenientes de tal dispositivo, tais como desgaste, poeira, umidade, são anulados nos aparelhos modernos com o emprego das

b) *Lunetas de focagem interna* (Fig. 99). São constituídas de uma só peça, tendo num dos extremos a objetiva e no outro a ocular. A

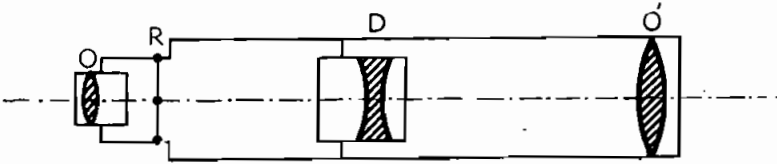


FIG. 99 — Luneta de foc. interna

focagem é conseguida com um pinhão que move o tubo ajustado com a lente de focagem interna.

Além disso, ainda são tais lunetas dispostas de tal modo que as observações feitas com os fios estadimétricos dão as distâncias *referidas diretamente ao centro do instrumento*, sem a necessidade do acréscimo de constantes, conforme é estudado na parte de *Taqueometria*.

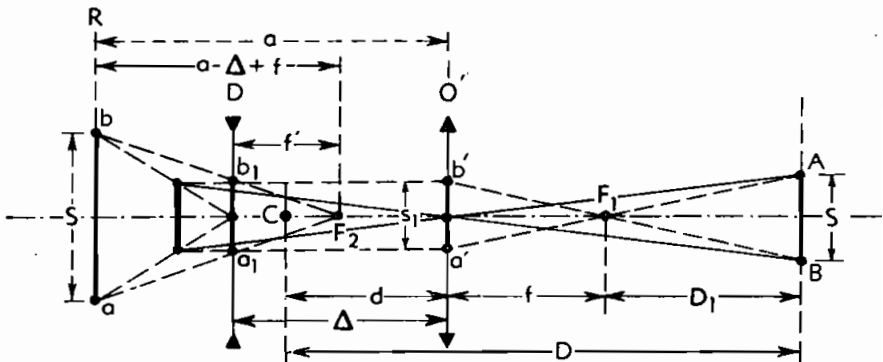


FIG. 100

As lunetas descritas têm o inconveniente de conduzirem a alterações na posição do eixo óptico pelos contínuos deslocamentos do tubo porta-retículo, razão da preferência em toda a aparelhagem topográfica moderna, da luneta de *focagem interna*, com deslocamentos de uma lente divergente (Fig. 100) que funciona como lente *analítica* (taqueometria). Com efeito, da semelhança dos triângulos ABF_1 e $a'b'F_1$ de um lado e abF_2 e $a_1b_1F_2$ de outro se deduz

$$D_1 = \frac{f}{s_1} S \quad \text{e} \quad \frac{s}{s_1} = \frac{a - \Delta + f'}{f'}$$

donde

$$D_1 = \frac{f(a - \Delta + f')}{f's} S$$

Designando por Δ_∞ o valor de Δ correspondente a $D_1 = \infty$ teremos

$$\Delta = \Delta_\infty + \delta$$

e

$$D_1 = \frac{f(a - \Delta_\infty + f')}{f's} S - \frac{\delta f S}{f's}$$

Finalmente a distância entre o centro c do instrumento e a mira será:

$$D = D_1 + f + d = \frac{f(a - \Delta_\infty + f')}{f's} S - \frac{\delta f S}{f's} + f + d = K \cdot S + c \quad (51)$$

em que K é a constante de multiplicação, igual a 100 e c um valor que dentro da precisão taqueométrica pode considerar-se nulo para determinadas características da luneta, estudadas pelos construtores de aparelhagem moderna.

c) Ocular. A ocular empregada nas lunetas pode ser a ocular positiva de Ramsdem ou a ocular negativa de Huyghens.

A ocular positiva (Fig. 101) compõe-se de duas lentes plano-convexas de raio igual, distantes entre si de um intervalo igual aos dois terços de sua distância focal. Esta ocular é chamada positiva porque permite a formação da imagem real ab , aquém do seu foco principal F , e, depois, ampliando esta imagem ab , fornece uma imagem vertical $a'b'$, invertida em relação ao objetivo AB . A lente L_2 é chamada lente ou vidro de campo.

A ocular negativa (Fig. 102) consta de duas lentes plano-convexas, tendo a convexidade voltada para a objetiva e dispostas de tal modo que a imagem ab venha formar-se entre elas. A lente L_2 impedindo a formação dessa imagem, a substitui por uma imagem real e menor,

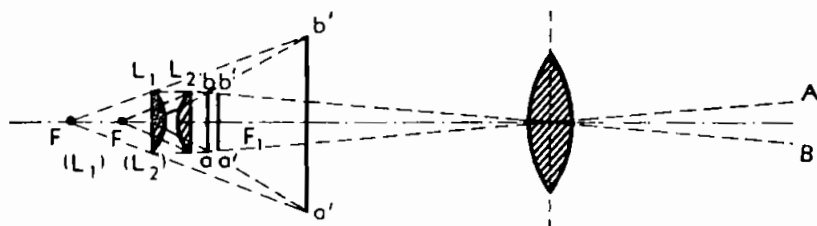


FIG. 101

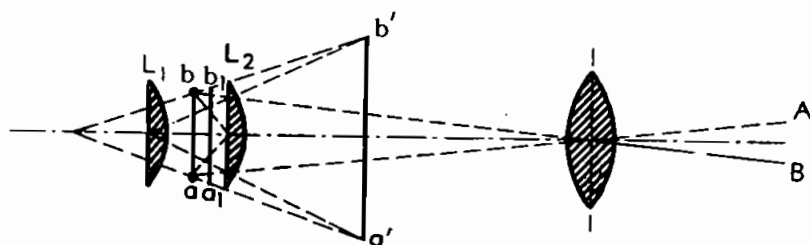


FIG. 102

a_1b_1 , da qual a lente L_1 dá, por sua vez, uma imagem virtual ampliada, $a'b'$, e invertida em relação ao objeto AB . O fato de a lente L_2 impedir a formação da imagem ab dá a esta ocular a denominação de negativa. A ocular de Huyghens fornece uma ampliação da imagem de AB menor do que a que se obtém com a ocular de Ramsden e, por esse motivo, dá à luneta que a possui um campo maior.

d) *O retículo.* O retículo é um diafragma anular munido de dois fios cruzados em ângulo reto. O retículo permite determinar na imagem do objeto ou sinal observado, um ponto que define a linha de visada, quando o plano vertical que contiver os fios coincidir com o plano da imagem dada pela objetiva, ou por outra, quando os fios se encontrem no plano focal comum à objetiva e à ocular. O retículo propriamente dito pode ser constituído por uma placa de vidro tendo os traços gravados a diamante, ou então por fios de platina ou de aranha presos ao diafragma D (Fig. 103), que está ligado ao tubo porta-retículo, por parafusos (p_1p_1, p_2p_2) , denominados parafusos de correção do retículo. O fio vertical (V_1V_1) é chamado fio colimador, o horizontal (H_1H_1) denomina-se fio nivelador. Os parafusos (p_1p_1) dão movimento ao diafragma D no sentido horizontal, deslocando somente o fio vertical (V_1V_1) ; os parafusos (p_2p_2) movem o diafragma no sentido vertical e deslocam portanto o fio horizontal (H_1H_1) .

e) *A objetiva.* Com o fim de anular os efeitos das aberrações de refrangibilidade, as objetivas das lunetas topográficas são acromáticas.

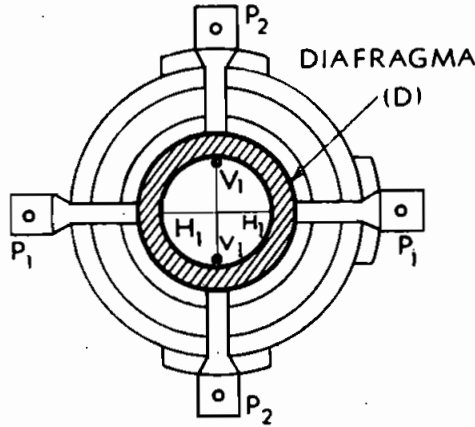


FIG. 103

Constam de duas lentes desigualmente refrativas; a primeira O_1 divergente colocada no interior da luneta, e a segunda O_2 convergente orientada para o exterior (Fig. 104).

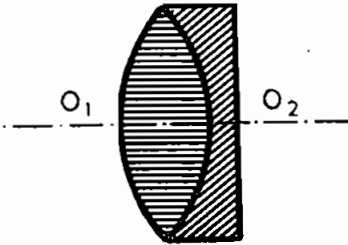


FIG. 104

f) *Focar a luneta.* Focar a luneta é a operação que tem por fim fazer a coincidência do plano do retículo e do plano da imagem do objeto visado com o plano focal comum à objetiva e à ocular. É fácil de ver que esta operação divide-se em duas partes.

g) *Focalização do retículo.* Com o auxílio do botão de cremalheira que está colocado geralmente do lado direito da luneta dá-se um pe-

queno deslocamento no sentido longitudinal ao tubo porta-ocular (aparinhos antigos) até que se consiga distinguir com perfeita nitidez pelo olhal da ocular os fios do retículo.

h) *Focalização do objeto.* Tendo obtido a focalização do retículo faz-se uma pontaria para o objeto, e desloca-se o tubo porta-objetiva por meio do respectivo botão de cremalheira, até distinguir bem nítida a imagem do objeto ou sinal. Deve-se em seguida verificar ou retificar, se for necessário, a focalização do retículo; para isso, visando pelo olhal desloca-se o olho de movimentos diferenciais, nos sentidos vertical e horizontal, e verifica-se se os fios do retículo parecem também deslocar-se sobre o objeto focado; caso afirmativo, deve-se concluir que existe

uma paralaxe óptica que impossibilita as visadas corretas. Seria necessário retificar então a focalização da ocular.

i) *Eixo óptico.* O eixo óptico, ou linha de visada, ou ainda linha de colimação, é a reta que une o ponto de cruzamento dos fios do retículo ao centro óptico da objetiva. Uma luneta está correta quando existe a coincidência da linha de colimação com o eixo, geométrico e com a reta que une o centro da ocular com o centro da objetiva.

j) *Aumento linear da luneta.* Chama-se aumento linear da luneta a relação entre o diâmetro aparente da imagem observada na luneta e o diâmetro do objeto visto a olho nu.

Seja (Fig. 105) AB o diâmetro aparente de OAB , $a'b'$ a imagem e $a''b''$ a imagem virtual.

Teremos por definição:

$$A = \frac{a''O'b''}{AOB}$$

Mas $a''O'b'' = 2a'O'p'$ e $AOB = 2a'O'p'$.

Por conseguinte:

$$A = \frac{a'O'p'}{a'O'p'}$$

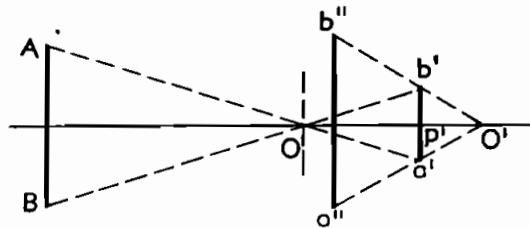


Fig. 105

Estes aumentos sendo muito pequenos, podemos substituir os arcos pelas tangentes; neste caso:

$$\operatorname{tg} a'O'p' = \frac{a'p'}{p'O'p} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} a'O'p' = \frac{a'p'}{p'O}$$

Então:

$$a = \frac{p'O}{p'O'} \quad (52)$$

Ora, $p'O$ difere muito pouco da distância focal principal da objetiva, e $p'O'$ também é sensivelmente igual à focal da ocular. Se fizermos $p'O = F$ e $p'O' = f$ e substituirmos em (1), teremos para expressão do aumento:

$$A_i = \frac{F}{f} \quad (53)$$

Esta expressão dá o limite inferior ou aumento mínimo, porque $p'O$ é sempre maior que F , e $p'O'$ sempre menor que f . Este aumento é chamado aumento linear; o aumento superficial é o quadrado do aumento linear.

$$A_s = \left(\frac{F}{f} \right)^2 \quad (54)$$

k) *Campo da luneta.* Chama-se campo da luneta o espaço angular no qual estão compreendidos todos os pontos visíveis através da ocular. O campo é limitado por uma superfície cônica tendo para vértice o centro óptico da objetiva e para base a abertura do diafragma reticular. O diafragma interceptando os raios muito inclinados em relação ao eixo óptico, tem por fim diminuir as aberrações de esfericidade. Dá-se geralmente ao diafragma um diâmetro muito pequeno:

$$d = \frac{1}{2} f; \text{ sendo } f \text{ a distância focal da ocular.}$$

Chamando F a distância focal da objetiva e C o campo da luneta, teremos por definição:

$$C = \frac{d}{F} = \frac{1}{2} \frac{f}{F} \text{ ou, em graus:}$$

$$\frac{f}{2F \cdot \text{arc } 1^\circ}; \text{ sendo arco de } 1^\circ \cong \frac{1}{57,6} \text{ teremos:}$$

$$C = \frac{57,6f}{2F} = 30 \cdot \frac{f}{F} \text{ (aproximadamente)} \quad (55)$$

A relação $\frac{f}{F}$ representa o inverso do aumento linear da luneta,

isto é, $\frac{f}{F} = \frac{1}{A}$; substituindo em (53), teremos para expressão aproximada do campo da luneta, em função do aumento:

$$C^\circ = \frac{30}{A} \quad (56)$$

l) *Clareza da luneta.* A clareza de uma luneta é a relação existente entre a quantidade de luz recebida pela retina, quando se observa um objeto, através duma luneta, e a quantidade de luz recebida quando se observa a olho nu.

O fenômeno da absorção da luz pela atmosfera e pelas lentes da luneta, diminui a clareza destas.

Por esta razão as lunetas munidas de ocular compound ou de imagem direta (4 lentes), são menos claras que as lunetas de ocular simples (2 lentes). Uma outra causa da diminuição da clareza das lunetas consiste na substituição dos fios do retículo (fios de platina ou fios de teia de aranha) por um disco suplementar de vidro, onde são gravados a diamante os fios reticulares. Alguns construtores obviam este inconveniente, gravando o retículo na face plana da lente de campo da própria ocular (ocular positiva de Ramsden).

m) *Ponto ocular e anel ocular.* Os raios luminosos refratados que penetram na luneta, tendo atravessado a objetiva, podem considerar-se como emanados de pontos luminosos contidos na face anterior da própria objetiva; e do conjunto desses raios aqueles que encontram a ocular, emergem desta, concorrendo em pontos que serão os conjugados dos primeiros. É claro, portanto, que a ocular formará sempre uma imagem da objetiva, a qual consiste em um pequeno disco muito brilhante que ficará situado a uma distância d da ocular, fora da luneta, quando a ocular for positiva, e no interior da luneta quando a ocular for negativa.

Vamos supor (Fig. 106) em O o centro óptico da objetiva, e em O_1 , o centro óptico da ocular que, para simplificar, admitiremos constituída de uma só lente. Vamos chamar F e f as distâncias focais das lentes; $AB = R$ a semi-abertura ou raio da objetiva e $ab = r$ o raio do anel ocular. Supondo a luneta acomodada para a visão telescópica, a distância OO_1 ou $BO_1 = F + f = D$ e a distância $bO_1 = d$ sendo conju-

gado de D , teremos:
$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}.$$

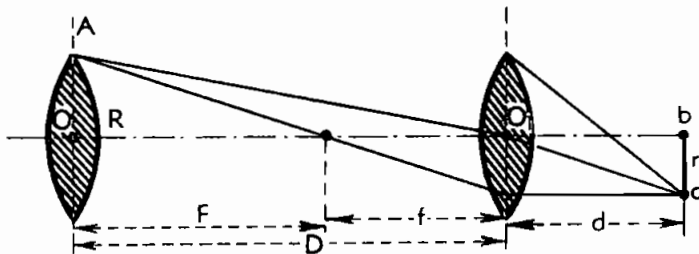


FIG. 106

Os triângulos semelhantes ABO_1 e abO_1 dão: $\frac{r}{R} = \frac{d}{D}$.

Do primeiro tira-se $d = \frac{Df}{D-f}$.

E do segundo tira-se: $r = \frac{R \cdot d}{D} = R \cdot \frac{f}{D-f}$.

Porém $D = F + f$ portanto:

$$d = f \cdot \frac{F+f}{F} \quad (57) \quad r = R \cdot \frac{f}{F} \quad (58)$$

Ao ponto b (?), conjugado de B , dá-se o nome de *ponto ocular* ou *lugar do olho*, e ao disco de raio r , imagem da objetiva, chama-se *circulo, anel* ou *disco ocular*.

n) *Posição do olho e medida do aumento*. A relação (57) pode ser posta sob esta forma:

$$d = f \left(1 + \frac{f}{R} \right)$$

Mas f sendo sempre muito pequeno em relação a F , poderemos desprezar a fração $\frac{f}{F}$ e escrever:

$$d = f \quad (59)$$

Esta igualdade mostra que o lugar do olho coincide sensivelmente com o segundo foco principal da ocular. A fórmula (58) dá:

$$\frac{R}{r} = \frac{F}{f} = A$$

Porém $\frac{F}{f}$ sabemos que mede o aumento A da luneta, portanto:

$$\frac{R}{r} = A \quad (60)$$

Quer dizer que o aumento normal da luneta é igual a relação entre os raios da objetiva e do anel ocular.

O diâmetro $2R$ pode ser facilmente medido, ao passo que a medida de $2r$ é muito difícil. Acomodada a luneta para a visão telescópica

e orientada para a luz difusa, o observador colocando o olho a uma distância de 22 cm, — distância média da visão distinta, verá o disco ocular como um círculo muito brilhante, do qual poderá calcular o diâmetro, recebendo-o sobre um anteparo micrométrico. Ramsden construiu um aparelho a que chamou *dinâmetro*, destinado a avaliação deste diâmetro nas lunetas de ocular positiva. Quando a luneta tiver ocular negativa, o anel ocular fica situado no interior da luneta, e neste caso será necessário recorrer a um dinâmetro especial, o de Troughton and Simms, por exemplo; o aumento normal da luneta sendo também dado pela relação F/f , um segundo meio para medir consiste em avaliar as distâncias focais dos sistemas objetiva e ocular, o que se pode obter aproximadamente desmontando as duas lentes e apresentando-se sucessivamente aos raios solares e recebendo as imagens do Sol num anteparo. Mede-se depois as distâncias do anteparo às lentes.

o) *Clareza das lunetas*. Vamos admitir que o diâmetro do anel ocular seja pelo menos igual ao diâmetro da pupila do olho do observador, de modo que toda luz que tenha atravessado a objetiva será recebida pela retina. Ora, pela definição de *clareza*, a razão que a representa é igual à relação entre a superfície da objetiva e a superfície da pupila; sendo assim, temos:

$$\text{Clareza } C_l = \frac{R^2}{p^2}$$

Porém, sendo A^2 aumento superficial da luneta, a superfície da imagem retiniana na visão através do instrumento será A^2 vezes maior do que na visão a olho nu, de modo que:

$$C_l = \frac{R^2}{p^2 \cdot A^2} = \left(\frac{R}{p \cdot A} \right)^2$$

Vimos também que: $A = R/r$, portanto:

$$C_l = \frac{R^2}{p^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{r}{p} \right) \quad (61)$$

Ora, r sendo sempre menor de que p , ou no máximo igual a p , segue-se que a clareza será sempre inferior ou, no máximo igual à unidade, ou *clareza natural*; quer isto dizer que o objeto visto através da luneta apresenta menos brilho do que visto a olho nu.

Quando o diâmetro aparente do objeto, visto a olho nu ou através da luneta, é nulo, a sua imagem pode ser considerada como um ponto. Neste caso, a clareza é a relação simples entre as quantidades ou fluxos

da luz, recebidos pela retina através da luneta e pela visão a olho nu, ou a relação entre as superfícies da objetiva e da pupila, isto é:

$$C_i = \frac{R^2}{p^2} \quad (62)$$

R sendo sempre maior do que p , segue-se que a clareza neste caso será sempre maior do que a clareza natural. É por esta razão que com o auxílio da luneta nós podemos observar estrelas invisíveis a olho desarmado.

Pelo exposto, vê-se que uma luneta diminui a clareza do objeto, e isso tanto mais quanto maior for o número de lentes empregadas. Abstração feita dessa causa de diminuição da luz (absorção), é preciso satisfazer ainda a uma condição essencial relativa ao *aumento*. Com efeito, vimos ser necessário que a semi-abertura eficaz da objetiva ($R = p \cdot A$) seja menor ou pelo menos igual à sua semi-abertura real.

Porém a abertura real da objetiva deve ser pequena em relação aos raios das superfícies que a limitam, ou em relação a focal F . Suponhamos esta abertura real igual a $n \cdot F$, sendo n um coeficiente

muito pequeno; deve-se ter $2R < nF$; $2pA < nF$; $2p \frac{F}{f} < nf$

$$\text{Donde: } f > \frac{2p}{n}$$

O coeficiente n depende da execução mecânica do vidro e sobretudo da sua composição física e química; varia de 1/10 a 1/14, e geralmente menos. Para fixar idéias, suponhamo-lo igual a 1/12; dando ao raio da pupila o valor médio de 1,5 mm, devemos ter:

$$f > 2p/n \quad \text{ou} \quad f > 36 \text{ mm}$$

Qualquer que seja a importância desse valor numérico aproximado do limite ocular, limite além do qual a clareza seria menor com a luneta do que sem o seu auxílio, não é menos exato que ele existe, e que por conseguinte, o aumento, cuja expressão é F/f , não pode aumentar indefinidamente por uma diminuição indefinida de f , sem prejudicar sensivelmente a clareza.

p) Limite do aumento. O aumento do numerador faz crescer F/f , produzindo, porém, o inconveniente de alongar a luneta. É claro, com efeito, que o comprimento da luneta sendo igual a $F + f$, pode, sensivelmente, ser considerado igual a F . Vejamos qual será o aumento possível de uma luneta de comprimento dado. Vimos que para obter o

máximo de clareza, será necessário que $f = 2p/n$; porém $f = F/A$, de modo que

$$F/A = 2p/n, \text{ donde } F = 2Ap/n; \text{ ou } A = nF/2p$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} n &= 1/12 \\ p &= 1,5 \text{ mm} \\ F &= 300 \text{ mm} \end{aligned}$$

O limite do aumento será: $A = 300/24 \times 1,5 = 18\frac{3}{4}$

Convém observar que estes números nada têm de absolutos; dependem sobretudo do valor do coeficiente n , isto é, da qualidade da objetiva e também da circunstância, que pode ser útil em certos casos, de perder clareza ganhando aumento, o que é justificado pelas considerações que se seguem.

q) *Envólucro da luneta e diafragmas.* Pode parecer estranho que a clareza dos objetos não seja aumentada por intermédio das lentes da luneta astronômica, quando se observa praticamente maior nitidez nos contornos.

Este fato é devido a duas causas diferentes:

1.^a) a imagem do objeto considerado fica colocada na distância da visão distinta, distância em que a nitidez é máxima;

2.^a) a objetiva e a ocular ficam encerradas em um tubo enegrecido interiormente, de modo que o olho não percebe senão uma pequena extensão de espaço e nenhum raio estranho vem distrair a retina como acontece na visão sem o auxílio da luneta. Pode-se verificar facilmente a grande influência sobre a visualidade das causas estranhas que contrariam, no aparelho ocular, o efeito de um objeto, observando-o sucessivamente a olho nu e com um tubo enegrecido no interior. Os diafragmas também têm por fim deter os raios extremos dos cones luminosos, justamente os que têm maior influência sobre as observações da esfericidade.

r) *Relação entre o aumento linear, o campo e a clareza das lunetas.* Vimos que:

$$\begin{aligned} \text{Aumento } A &= F/f = R/r \\ \text{Campo } C^o &= 30/A \\ \text{Clareza } C_l &= \left(\frac{R}{p \cdot A} \right)^2 = \left(\frac{r}{p} \right)^2 \end{aligned}$$

Resulta que o campo e a clareza são inversamente proporcionais ao aumento. Dado o aumento, para obter o máximo de clareza, isto é, $C_l = 1$, deve-se aumentar o raio da objetiva de modo que $R/p \cdot A = 1$, fazendo $p = 1 \text{ mm}$, teremos:

$$R \text{ (mm)} = 1,5 A$$

O que mostra que para obter o máximo de clareza deve-se fazer o raio da objetiva igual a uma vez e meia o número que exprime o aumento. Vimos anteriormente que a abertura da objetiva ($2R$) deve ser igual a nF (valor médio do $n:1/12$); portanto:

$$\frac{nF}{2} = 1,5 A$$

Donde $F = \frac{3A}{n}$, ou $F = 72$ cm, para um aumento $A = 20$ diâmetros. E a luneta deveria ter um comprimento de mais de 72 cm.

Em relação ao *aumento* e ao *campo*, vê-se que para:

tem-se $A = 10 \times \left| \begin{array}{c} 20 \times \\ 1^{\circ}30' \end{array} \right| 30 \times \left| \begin{array}{c} 40 \times \\ 0^{\circ}45' \end{array} \right| \text{ etc.}$
 $C^{\circ} = 3^{\circ} \quad \left| \begin{array}{c} 20 \times \\ 1^{\circ}30' \end{array} \right| 1^{\circ} \quad \left| \begin{array}{c} 40 \times \\ 0^{\circ}45' \end{array} \right| \text{ etc.}$

s) *Sensibilidade da retina e acuidade natural da vista.* A grandeza mínima da imagem necessária para a visão distinta, varia com o olho do observador, com a cor e com a intensidade de iluminação do objeto e do fundo sobre o qual este se projeta. Além de uma certa distância, a sensação experimentada pela retina é muito fraca e não permite a apreciação das dimensões do objeto: este aparece no campo da luneta como se fora simplesmente um ponto iluminado. As estrelas, por exemplo, aparecem como pontos luminosos, e a distinção em grandeza que nós fazemos das mesmas refere-se ao seu brilho aparente. Um objeto convenientemente iluminado, pode ser visto sob um ângulo de $30''$ e ainda menos, quando se projeta sobre um fundo escuro, ao passo que, projetado sobre um fundo claro, necessita para ser visto de um ângulo

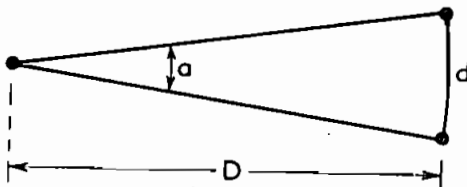


FIG. 107

de $2'$, pelo menos. O valor mínimo do ângulo formado por linhas de visão, além do qual essas linhas se confundem e dão uma sensação única, constitui o limite da sensibilidade para a *separação*, ou *acuidade natural da vista*.

Este elemento, varia com o objeto observado, e, segundo experiências de Holmheitz, o seu valor pode estar compreendido entre $51'',6$ e $147'',6$; outros experimentadores, entre os quais Ferrari e Jadanza, indicam o valor médio de 1 minuto sexagesimal.

t) *Dimensões mínimas do objeto.* A colocação do objeto tem muita influência em relação ao fundo sobre o qual o mesmo se projeta.

Quando o objeto se projeta no céu, as cores melhores são o branco e o vermelho. Vamos fazer abstração dessas condições assim como as condições de iluminação e chamemos:

d – dimensão mínima de um objeto

D – distância do objeto ao olho

a – acuidade natural da vista

O ângulo a sendo muito pequeno, podemos escrever:

$$a = \frac{d}{D} \quad (a'' = 60'')$$

$$a'' = \frac{206265 d}{D}; \quad \text{donde: } d = 0,00029 D \quad (63)$$

u) *Capacidade ou sensibilidade da luneta.* Para uma luneta, cujo aumento fosse igual a A e cuja clareza fosse igual à natural, a dimensão mínima seria:

$$d = 0,00009 \frac{D}{A}$$

A acuidade da vista através da luneta seria:

$$\alpha = \frac{d}{D \cdot A}$$

ou em segundos de arco:

$$\alpha'' = \frac{206265 d}{D \cdot A} \quad (64)$$

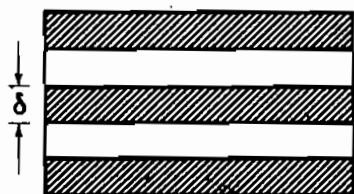


FIG. 108

A este valor de α chamaremos de *capacidade* da luneta com clareza máxima.

A fórmula (64) não pode, entretanto, ser aplicada às lunetas topográficas cuja clareza é sempre inferior à clareza natural; e ainda mais, devemos notar que chegamos a estabelecer a referida fórmula, admitindo que fossem verificadas praticamente

as condições teóricas indicadas anteriormente à capacidade de uma luneta.

Salmoiraghi indica o seguinte processo: Desenhe-se uma escala de traços iguais, brancos e negros; cola-se a escala a uma haste na altura da luneta disposta horizontalmente, e vai se afastando gradativamente a haste da luneta. Observa-se que, à maneira que o afastamento vai aumentando, os traços vão se avizinhandos até que se torna impossível fazer a *separação* entre eles.

Isto significa que as linhas de visada que passam pelos extremos de dois traços sucessivos, vão se aproximando até que chegam a confundir-se. Chamando δ a espessura dos traços e L a distância da escala ao centro óptico da objetiva, a sensibilidade ou capacidade da luneta será:

$$\alpha = \frac{\delta}{L} \quad \text{ou} \quad \alpha'' = \frac{206265 \cdot \delta}{L} \quad (65)$$

Salmoiraghi mostra que, a medida da capacidade da luneta por esse processo é lógica e exata para as pequenas distâncias, ao passo que para grandes distâncias, o efeito da absorção de luz pela atmosfera que, aliás, nada tem que ver com a qualidade da luneta, e, por conseguinte, com a sua sensibilidade, prejudica a exatidão dos resultados obtidos, podendo conduzir a uma apreciação errônea do valor da luneta. Convém advertir que a sensibilidade da luneta depende da potência visual do observador, a qual é relativa; por conseguinte: *Quem melhor vê, melhor visa.*

Exemplo:

$$\begin{aligned} \delta &= 0,002 \text{ m} & \alpha'' &= \frac{206265 \cdot 2}{100000} = 4'',12 \\ L &= 100,00 \text{ m} \end{aligned}$$

v) *Espessura dos fios do retículo.* A espessura dos fios do retículo subtende, no centro óptico da objetiva, a um ângulo muito pequeno que oculta parte do campo da luneta e, por conseguinte, parte do objeto colimado (parte que é variável com a distância do objeto a objetiva). Resulta daí, a necessidade de dar aos fios do retículo um diâmetro muito reduzido, ou melhor, um diâmetro proporcional à eficiência da luneta.

Chamando α a sensibilidade da luneta, o valor de α representa o erro provável da colimação, e este valor não deverá ser ultrapassado pelo ângulo subtendido pelos fios do retículo, a fim de que o instrumento seja harmonicamente sensível nos seus órgãos. Chamemos ω esse ângulo, e a espessura dos fios, f a focal da objetiva. O ângulo ω sendo muito pequeno, poderemos escrever:

$$\omega = \frac{e}{\text{arc } 1'' \cdot f} \quad (66)$$

Pelo que vimos o máximo valor de ω'' deve ser α'' ; portanto, substituindo em (66), e tirando o valor de e , teremos

$$e = \alpha'' \cdot f \cdot \text{arc } 1''$$

$$e = \frac{\alpha'' \cdot f}{206265} \quad (67)$$

Exemplo:

$$\alpha'' = 4'',12 \quad f = 300 \text{ mm} \quad e = \frac{4,12 \times 300}{206265} = 0,006 \text{ mm}$$

Quer dizer, que a espessura dos fios deve ser, no máximo, de 1/167 mm.

w) *Indicações para reconhecer a qualidade das lunetas.*

1.^a) *Verificar se as lentes que compõem a objetiva estão bem centradas.* Pode-se usar do seguinte processo indicado por Wollaston: Tira-se a ocular da luneta e coloca-se no seu lugar a chama de uma vela e visa-se pela objetiva, colocando o olho a 30 ou 40 cm desta; as várias imagens produzidas pelas superfícies das duas lentes devem aparecer em linha reta, se a objetiva estiver centrada.

Este outro processo indicado por Fraunhofer é ainda melhor, pois permite também:

2.^a) *Verificar-se o sistema óptico da luneta é aplanético e acromático.* Desenha-se, a nanquim, em uma folha de papel branco, algumas figuras geométricas regulares, tais como circunferências de 2 a 5 cm de diâmetro ou quadrados de 3 a 5 cm de lado, e visa-se com a luneta a uma distância de 50 a 100 m. A regularidade das figuras não deve ser alterada e os contornos devem ser bem definidos e sem coloração.

x) *Recordações de alguns princípios de óptica.* Chama-se eixo de uma lente, a reta que une as superfícies esféricas que formam suas faces.

O *centro óptico* de uma lente é o ponto de seu eixo pelo qual passam os raios luminosos, sem mudar de direção, embora experimentando uma translação paralela se são oblíquos com relação ao eixo.

Estes raios oblíquos se denominam *raios principais*. Os raios luminosos, que caem na lente, paralelamente ao eixo principal depois de refratados passam por um ponto que se chama *foco*, levando por esta razão o nome de *raios focais*.

Traçando estes raios e os principais, se pode construir a imagem *real A'B'* de um objeto *AB* que se acha além do foco principal *F* (Fig. 109). Se se chama a distância focal *OF* de *f*, a distância do

objeto de a e a da imagem de b da figura se deduzem as relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{f}{b-f}, \text{ das quais se deduzem: } a(b-f) = b \cdot f$$

$$\text{ou } a = \frac{b \cdot f}{b-f} \quad \frac{1}{a} = \frac{b-f}{b \cdot f} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \text{ e finalmente:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (68) \text{ que é a equação dos focos conjugados.}$$

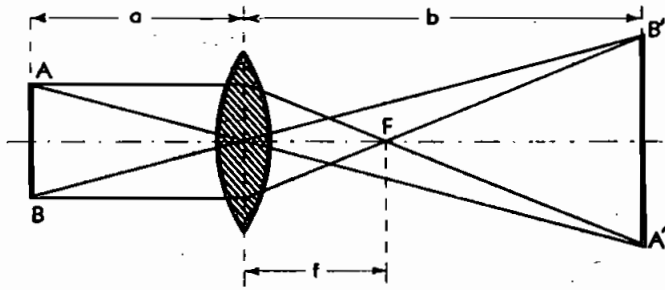


FIG. 109

A (Fig. 110) indica como atua uma lente convergente usada como *microscópio simples* ou *lupa*.

O objeto AB , colocado entre a lente e o foco, produz uma imagem virtual $A'B'$, e afastando ou aproximando a lente do objeto, se consegue

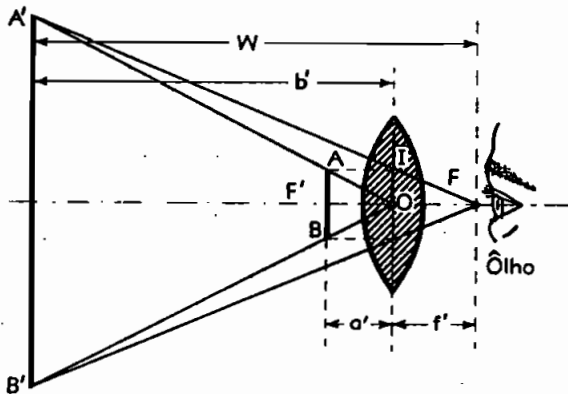


FIG. 110

que esta imagem se forme a distância de 20 a 35 cm, que é a distância de visão distinta para um olho normal.

Esta imagem resulta maior do que o objeto. Mediante os mesmos símbolos se deduz a fórmula:

$$\frac{AI}{OF} = \frac{a'}{f'} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{b' - a'}{b'} = 1 = \frac{a'}{b'}$$

$\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'}$ (69), que relaciona as distâncias focais, do objeto e de sua imagem.

A amplificação v do microscópio simples, quer dizer, a relação dos ângulos segundo os quais se vê o objeto diretamente ou através da lente, se obtém, supondo o olho colocado próximo ao foco.

$$v = \frac{A'B'}{AB} = \frac{w}{f}$$

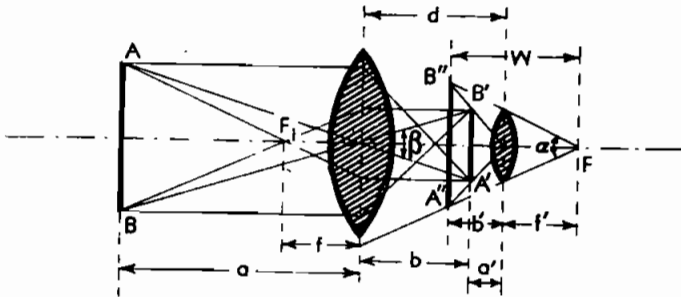


FIG. 111

y) *Luneta astronômica ou de Kepler.* A luneta mais simples consiste em uma lente objetiva L , de uma grande distância focal, e uma lente ocular de foco curto L' , ambas estão adaptadas em um tubo de modo que coincidam seus eixos formando o que se chama *eixo óptico* da luneta.

A lente objetiva forma uma imagem reduzida, real e invertida do objeto e por meio da ocular, que atua como microscópio simples, a vê o observador cujo olho está em F' , aumentada e também invertida. Se se designa por f a distância focal de L , e a de L' se chama f' , assim como a e b , a' e b' as distâncias do objeto e imagens às lentes, se obtém como distância entre ocular e objetiva:

$$d = b + a' \quad (70)$$

Da equação (68) tiramos:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b} = \frac{a-f}{af}$$

e

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{f}{\frac{a-f}{a}} = \frac{f}{1 - \frac{f}{a}} \quad (71)$$

Da equação (69), também tiramos:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{b'}$$

porém $b' + f' = w$ e
 $b' = w - f'$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a'} &= \frac{b' - f'}{f'(w - f')} = \frac{w - f' + f'}{f'(w - f')} = \frac{w}{wf' - f'^2} \\ a' &= \frac{wf' - f'^2}{w} = f' - \frac{f'^2}{w} \end{aligned} \quad (72)$$

Assim resulta pela substituição dos valores de b (71) e a' (72), na equação (70)

$$d = \frac{f}{1 - \frac{f}{a}} + f' - \frac{f'^2}{w} \quad (73)$$

Como indica a equação (73), a longitude d da luneta depende não só da distância w , de visão distinta, como também da distância a do objeto, de tal modo que quando esta distância aumenta, d diminui, e em consequência se deve encurtar a longitude do tubo e reciprocamente, para poder modificar esta distância. Ambas as lentes vão nos extremos de dois tubos metálicos, dos quais o menor que leva a ocular, pode correr mediante um pinhão e uma cremalheira para "focar" a imagem do objeto. Para grandes distâncias a , especialmente, quando se pode considerar o objeto a distância infinita, se deduz da relação (73).

$$d = f + f' \quad (74)$$

z) *Aumento da luneta.* A ampliação v da luneta (Fig. 111) é a relação dos ângulos α e β , levando em conta que ambos são muito pequenos, resulta aproximadamente:

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{A''B''}{w}}{\frac{A'B'}{b}} = \frac{b'b}{a'w} \quad (75)$$

Da equação $\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{f'}$, tiramos:

$$a' = \frac{b'f'}{b + f'} = \frac{b'f'}{w} \text{ que substituindo em (75), dá:}$$

$$v = \frac{b'b}{\frac{b + f'}{w}} = \frac{b}{f'}$$

Porém, como se vê pela equação (68), b é quase igual a f e por conseguinte:

$$v = \frac{f}{f'} \quad (76)$$

Isto é, o aumento da luneta astronômica é quase igual à relação das distâncias focais da objetiva e da ocular.

$$\text{Precisão de pontaria: } \mu = \pm \frac{4''}{\sqrt{v}} a \frac{3''}{\sqrt{v}} \quad (77)$$

68 - Limbos ou círculos graduados

A leitura dos ângulos é feita num círculo metálico ou de cristal, chamado *limbo* (horizontal e vertical); a graduação é feita com traços finos numa coroa presa ao mesmo e quase sempre, nos metálicos, constituída de uma liga de prata. No ano de 1924, o engenheiro suíço Henri Wild conseguiu construir na Casa Zeiss (Jena), e, mais tarde, nas oficinas de Heerbrugg (Suíça) *círculos graduados sobre vidro*, com divisões obtidas por processo fotográfico e, depois, com máquina de dividir. Somente os *graus* ou *grados* e subdivisões são lidas diretamente no limbo, pois as frações menores, *minutos* e *segundos* o são no *vernier*, no *micrómetro*, ou na *escala micrométrica*, que acompanha o movimento da luneta. A divisão do limbo pode ser feita em dois sistemas: o sexagesimal e o centesimal.

No primeiro sistema, a circunferência do limbo é dividida em 360° , o grau em $60'$ e o minuto em $60''$. No sistema centesimal, divide-se o limbo em 400 grados (400^g), o grado em 100 minutos centesimais (100^c ou $100'$) e o minuto em 100 segundos centesimais (100^{cc} ou $100''$) ou miligrados.

Se um ângulo, expresso em grados, é medido por n^g , o seu valor x° , em graus sexagesimais, será:

$$x^\circ = 9/10 n^g, \text{ ou, vice-versa, } n^g = 10/9 x^\circ$$

Na divisão sexagesimal, usada preferencialmente entre nós o limbo do teodolito metálico é dividido em meios graus, terços, quintos e até duodécimos de graus, como nos aparelhos Kern.

Há ainda uma terceira divisão da circunferência utilizada em certos aparelhos, em uso na artilharia, que é a divisão em *milésimos de radiano* (1 m visto a 1 000 m); como a circunferência tem 2π radianos, isto é, 6,283 milésimos, considera-se, para simplificar, dividida em 6 000 ou em 6 400 *milésimos*.

O sistema de gradação pode ser o de *azimute*, isto é, de 0 a 360° , num e noutro sentido; de *trânsito*, de 0 a 180° nos dois sentidos; de *bússola*, de 0 a 90° , nos dois sentidos, a partir dos extremos da linha de fé, como nas bússolas de rumos.

Os limbos dos trânsitos tem na sua maioria duas gradações, uma de azimute e outra de trânsito ou de rumo, ou as duas de azimute nos dois sentidos; os limbos dos teodolitos europeus, na sua maioria, tem uma gradação de azimute, no sentido direto.

69 - Verniers ou nônios

Nos instrumentos goniométricos, as dimensões dos limbos metálicos não permitem, à simples vista, a avaliação exata de divisões inferiores a 10 ou 5 minutos. Um dos meios de obter a fração complementar de menores divisões do limbo é com o uso do *nônio* ou *vernier*.

Vejam os princípios em que se baseia sua construção.

Suponhamos, por exemplo, que o limbo seja dividido em meios graus, ou 30 minutos (Fig. 112) e que se queira fazer a leitura de um ângulo com a aproximação de 1 (um) minuto.

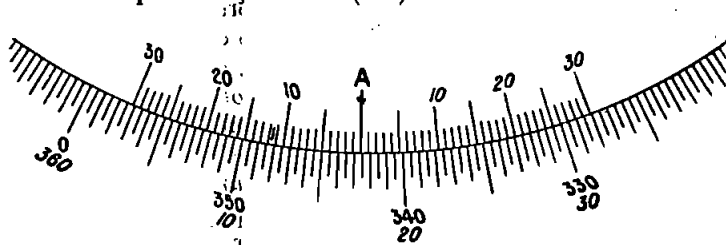


FIG. 112
Vernier (apr. 1')

Marca-se sobre a alidade, a partir do índice A e, nos dois sentidos de graduação, para a direita e para a esquerda, um arco cuja amplitude iguale a 29 divisões do limbo e divide-se o intervalo em 30 partes iguais. Cada uma dessas partes vale $29/30$ do meio grau. O arco, assim dividido constitui o vernier.

Vejamos como se faz uso dele.

Seja, por exemplo, o vernier da esquerda, que acompanha o sentido direto de graduação do limbo, com o movimento em azimute da luneta.

O índice A cai entre os traços que marcam $342^{\circ}30'$ e 343° . Procuremos a fração complementar x que se deve somar ao menor destes números. As divisões do vernier, sendo menores do que as do limbo, o intervalo compreendido no limbo, do 343° e o traço 1 do vernier será menor do que x , e o intervalo será ainda menor se se considerar as duas divisões correspondentes que se seguem: este intervalo irá sempre diminuindo até que se encontrem dois traços, um do vernier e outro do limbo, que estejam sensivelmente um no prolongamento do outro. Suponhamos que existe a coincidência para o traço 5 do vernier e, por conseguinte, para o traço 345 do limbo. É fácil deduzir dessa leitura o valor aproximado de x .

Chamando E o afastamento das menores divisões do limbo e E' o das divisões do vernier, teremos:

$$E' = 29/30 E; \quad E - E' = 1/30 E$$

O arco $342^{\circ}30' - 345^{\circ}$ pode ser contado sobre o limbo e sobre o vernier; no primeiro caso, vê-se que este é medido por 5 vezes a divisão E ($5E$); e no segundo caso será medido por x mais 5 vezes a divisão do vernier ($x + 5E'$).

Estas duas amplitudes sendo iguais:

$$x + 5E' = 5E, \text{ donde } x = 5(E - E') = 5/30E$$

O valor de E sendo 30 minutos,

$$x = 5/30 \cdot 30 = 5'$$

e a leitura definitiva será:

$$342^{\circ}30' + 5' = 342^{\circ}35'$$

Na graduação externa do limbo, no sentido inverso dos ponteiros de um relógio e no vernier à direita, do mesmo sentido, leremos

$$17^{\circ} + 25' = 17^{\circ}25'$$

Quando a coincidência dos traços não é perfeita parecendo que o prolongamento se daria entre dois traços contíguos, a média das leituras obtidas pelos mesmos traços dará a leitura por *estima* ou seja aproximação dupla; no caso do vernier em apreço, em lugar de 1 minuto, podemos ter a aproximação de 30 segundos.

Assim, de um modo geral, quando se quer obter um vernier de aproximação n^a , o vernier deverá ter o comprimento de $n - 1$ divisões do limbo e dividida em n partes iguais.

Assim, as fórmulas do vernier serão:

$$\text{Fórmula geral: } nE' = (n - 1)E \quad (78)$$

$$\text{Aproximação do vernier: } E - E' = \frac{E}{n} \quad (79)$$

$$\text{Número de divisões do vernier: } n = \frac{E}{E - E'} \quad (80)$$

$$\text{Valor angular de uma divisão do vernier: } E' = \frac{E(n - 1)}{n} \quad (81)$$

$$\text{Fração complementar do limbo: } x = m \frac{E}{n} \quad (82)$$

onde

E = comprimento das menores divisões do limbo,

E' = comprimento das divisões do vernier,

m = número de divisões do vernier, até a coincidência,

n = número de divisões do vernier (total),

x = fração complementar a somar ao menor número lido no limbo.

70 - Microscópios para leitura dos limbos

O vernier ainda usado em muitos aparelhos de medidas angulares, apresenta desvantagens, tais como tempo perdido na identificação dos traços coincidentes, engano de leituras, emprego de lupas e outras causas que fazem preferir o emprego de microscópios de leitura, máxime nos instrumentos de precisão, onde a leitura é direta e imediata, facilitando a execução mais rápida dos levantamentos de campo.

Distinguem-se diversos tipos de microscópios, de menor ou maior precisão, abaixo enumerados e que detalharemos, a seguir:

- a - microscópio de traços (por estíma)
- b - microscópio de escala
- c - microscópio de vernier
- d - microscópio de parafuso micrométrico
- e - microscópio com micrômetro óptico
- f - microscópio com justaposição de imagens em zonas opostas do limbo.

a) *Microscópio de traços.* É constituído por um microscópio, cujo aumento varia de 15 a 20 vezes, solidário à alidade, com o eixo sensivelmente normal ao limbo e munido de um retículo com um traço paralelo aos traços de graduação e servindo de índice, gravado numa

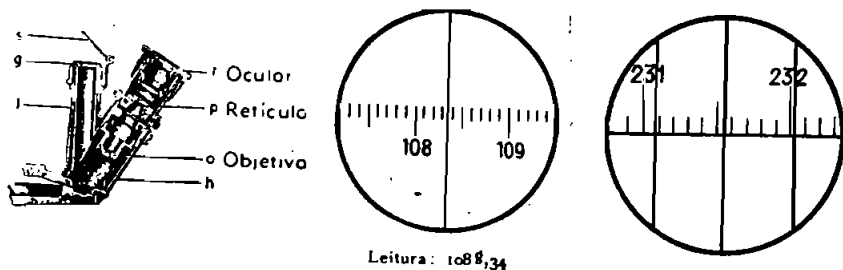


FIG. 113

pequena placa de cristal; nos primitivos instrumentos a imagem era dada por um fio fino de teia de aranha.

A aproximação do minuto é feita por estima (Fig. 113); nalguns instrumentos os fios eram três e, pela média, obtinha-se maior aproximação; essa inovação não logrou êxito, por não ser prática.

Admite-se o erro *máximo* de leitura em *um minuto sexagesimal*.

b) *Microscópio de escala*. No campo visual do microscópio de escala observa-se, em vez do retículo, uma escala do comprimento igual a uma divisão do limbo, gravada sobre uma lâmina de cristal. Está graduada, a partir do índice *O*, em sentido contrário ao da graduação do limbo, e com inscrições dos minutos para facilitar as leituras. A

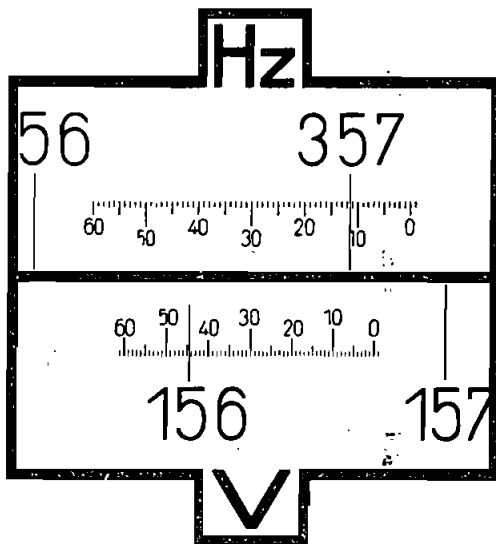


FIG. 114

Fig. 114 representa os limbos horizontais ou azimutal (*HZ* ou *AZ*) e vertical (*V*) do teodolito Zeiss IV e pelas leituras dadas na figura vê-se quão fácil e rápida é a operação.

As imagens dos dois limbos são transportadas por um sistema de prismas até à ocular do microscópio situado junto à luneta, o que é bastante cômodo.

Em aparelhos antigos a escala *s* é mais simples, porém menos precisa (Fig. 115).

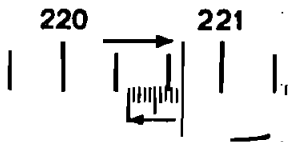


FIG. 115

Na escala antiga, existe um vernier gravado na lâmina de cristal, o que implica em abranger maior número de divisões do limbo (Fig. 116).

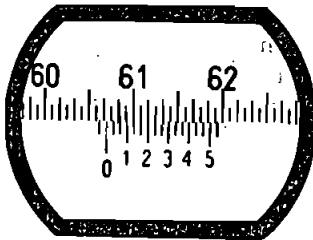


FIG. 116

Fig. 117 é representado no campo do microscópio uma fração do limbo, com divisões menores de 10; o tambor é dividido em 60 partes, estando numeradas as unidades de *minuto*; assim podem-se ler comodamente as dezenas de *segundos* e por estima os segundos.

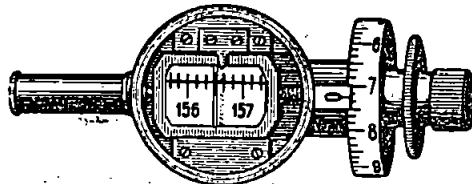


FIG. 117

Os traços de divisão do limbo terminam em pontas finas, o que facilita a leitura. Na escala lê-se diretamente os *minutos duplos* e os minutos simples são avaliados por estima.

c) *Microscópio de vernier*. Este microscópio se diferencia do anterior de escala somente porque em lugar da escala graduada,

Nesse microscópio o vernier aparece completo o que permite ler mais rapidamente e com menor possibilidade de engano.

d) *Microscópio de parafuso micrométrico*. No teodolito dotado de microscópio com parafuso micrométrico se executa a medida pelo deslocamento que é preciso dar aos traços do retículo ou marca-índice, com o auxílio de um parafuso de rosca fina ligado a um tambor graduado, onde se lêem as frações.

Este sistema permite atingir grande precisão, o que exige cuidados especiais na sua utilização.

Foi empregado e ainda o é, especialmente em aparelhos ingleses de alta precisão, construídos por Troughton, Repsold, Watts.

e) *Microscópio com micrômetro óptico*. Neste dispositivo, baseado nos anteriores, mede-se a fração complementar do grau (Fig. 118) deslocando os traços de graduação do retículo a coincidirem com uma divisão inteira do limbo ($361^{\circ},40$), por intermédio de uma lâmina de faces paralelas e visível no campo do microscópio, e, então, é feita a leitura completa.

$$361^{\circ},40 + 8^{\circ},80 = 361^{\circ},4880^{\circ}$$

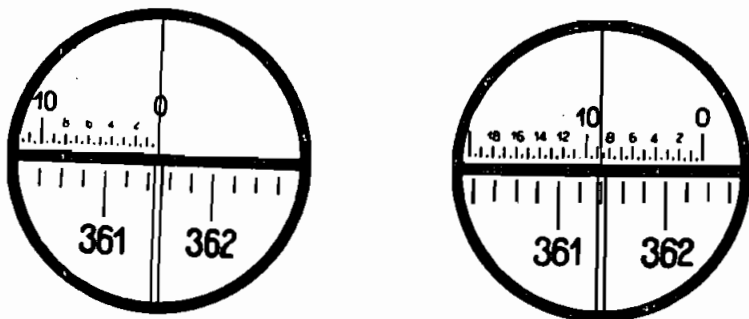


FIG. 118

O deslocamento é medido pelo ângulo de rotação da lâmina transmitida a um tambor graduado de cristal.

Este sistema é usado nos aparelhos Otto Fennel mais precisos, que tem o microscópio junto ao limbo e também em aparelhos Wild T1 ver (Fig. 90) com a ocular do microscópio junto à luneta, fazendo-se o transporte das imagens dos dois limbos, horizontal e vertical, e do tambor comum através de um conjunto de prismas.

f) *Microscópio com justaposição de imagens em zonas opostas do limbo*. No estudo dos erros cometidos na medida dos ângulos horizontais e verticais chega-se à conclusão de que uma das causas de erro é o da centragem dos limbos, razão que levou os construtores a imaginar um novo dispositivo, que é o de fazer leituras em zonas diametralmente opostas; este processo já foi usado, mesmo nos aparelhos antigos de vernier. No azimutal astronômico de Bamberg as leituras eram feitas em oito verniers dispostos a 45° um do outro, em torno dos grandes limbos de metal.

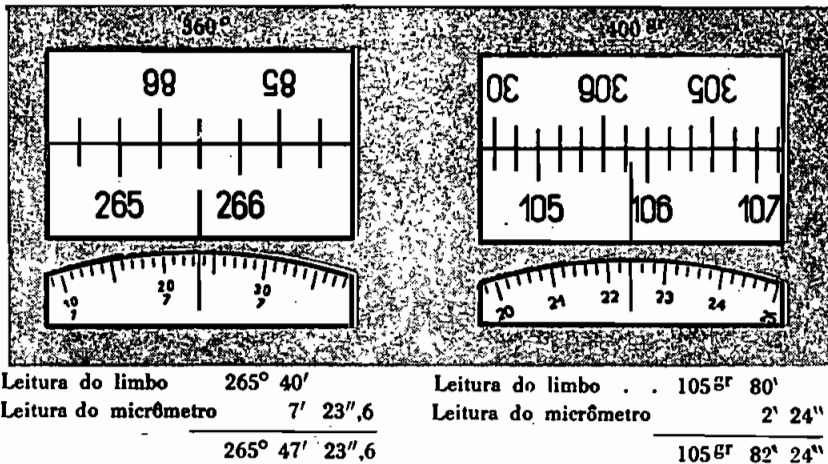


FIG. 119

Nos aparelhos modernos, com limbos de *crystal*, a duplicidade de leituras é feita por um sistema de prismas, que justapõe as imagens e permite obter diretamente o valor médio das leituras (Fig. 119) diametralmente opostas do limbo.

71 — Acessórios

Em todo teodolito ou trânsito, encontram-se as seguintes peças acessórias:

Três ou quatro *níveis de bolha de ar*, sendo dois fixos ao limbo, um à luneta e um ao círculo vertical, principalmente nos teodolitos europeus, para ajustar a coincidência dos zeros e verificar o erro de zênite instrumental.

Parafusos de pressão e diferenciais ou de *chamada*, para prender, total ou parcialmente, o instrumento numa direção determinada, sendo a coincidência ou calagem da linha de visada com o ponto visado feita com os parafusos de chamada.

Um *fio a prumo*, *prumo bastão* ou *prumo óptico*, fixado na parte inferior da peça cônica da alidade, permite fazer com que a projeção do centro do instrumento coincida com o ponto da estação ou vértice do ângulo a medir.

Um *suporte de madeira* ou *tripé*, onde se instala o instrumento.

Lupas, *microscópios* ou *refletores*, para facilitar a leitura dos limbos e alidades.

Uma *bússola* de rumos ou azimutes, circular ou em tubo, *declinatória* (Fig. 120) para medida das orientações; diversas chaves, agulhas de retificação, óleo especial de lubrificação, etc.

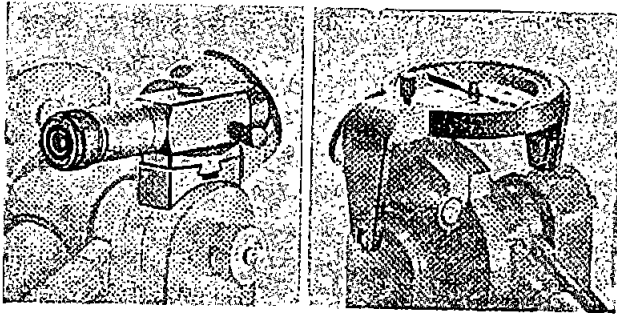


FIG. 120

72 – Eixos principais de um teodolito

Se conservarmos fixo o limbo horizontal, isto é, a parte inferior do teodolito, pode-se fazer com que os dois *montantes*, *luneta* e *alidada*, isto é, a parte superior, gire em torno do *eixo principal do instrumento*: o eixo horizontal de rotação da luneta é denominado *eixo secundário*; o eixo que passa pelo cruzamento dos fios do retículo da luneta e centro óptico da objetiva é o *eixo óptico* ou *linha de colimação*.

Esses eixos devem ser perpendiculares entre si e o primeiro deve ser vertical; o ponto de encontro desses eixos é o centro do teodolito.

§ 12 – Manejo e verificações de um teodolito. Correções e retificações

73 – Estaciamento, calagem e colimação do teodolito

Para medir com exatidão um ângulo *horizontal*, de uma direção projetada, bem como o ângulo *vertical*, correspondente, emprega-se o instrumento clássico, um teodolito, que deve ser convenientemente verificado e, se necessário, retificado em todos os seus órgãos para que as indicações obtidas satisfaçam plenamente.

Previamente, o instrumento é retirado da caixa de madeira ou estojo metálico e fixado ao tripé com o parafuso central ou com a rôska de fixação.

Se as condições do teodolito já foram verificadas e julgadas satisfatórias, dentro das tolerâncias admitidas, pode a *instalação* ser feita dire-

tamente no ponto ou vértice de estação da poligonal topográfica. Em terreno aproximadamente plano, as pernas do tripé devem ficar equidistantes do vértice e bem cravadas no terreno; o afastamento deverá ser maior ou menor, de acordo com a altura do operador, que deve fazer as leituras com facilidade, sem se socorrer das pontas dos pés, para corrigir a altura exagerada de instalação.

Com o disco ou a base do tripé em posição sensivelmente horizontal, proceder-se-á à centralização com o fio a prumo. Com os teodolitos dispondo de prumo óptico ou prumo rígido de nível esférico que permitem melhor centragem, principalmente em dias de vento, não se deve dispensar a primeira operação com o fio a prumo simples, que facilita a posterior coincidência.

Durante esta operação deve-se tomar cuidado em não girar o instrumento, porque isto corresponderia a inutilização do eixo de colocação aproximado já obtido. Uma vez o teodolito bem centrado, deve-se apertar novamente e com cuidado o parafuso de fixação geral.

Para a *calagem* ou horizontalidade do prato do *limbo* e *alidade* da luneta do teodolito, com o auxílio de um ou dois níveis de bôlha tubulares e, nos aparelhos modernos, com mais um nível esférico auxiliar, assim se deverá proceder:

a) *Com um nível tubular e quatro parafusos calantes.* Coloca-se o eixo do nível, mais ou menos, paralelo a um par diagonal de parafusos calantes e centra-se a bolha, com a leitura zero no limbo; solta-se a alidade e luneta, com o limbo fixo, desloca-se de 180° o índice e verifica-se a posição da bôlha, que deve ser a mesma, se o instrumento estiver retificado; caso contrário a calagem deve ser precedida da retificação, como indicamos adiante nas correções.

b) *Com dois níveis tubulares e quatro parafusos calantes.* A operação de calagem é mais facilitada, pois pode-se com cada par diagonal de parafusos calantes, dispostos a 90° , centrar as bolhas dos níveis, horizontalizando ao mesmo tempo dois eixos perpendiculares do prato do limbo e, por conseguinte, tornando-o horizontal.

c) *Com um nível tubular e três parafusos calantes.* O sistema de três parafusos calantes usado em quase todos os aparelhos modernos, embora menos rígido que o de quatro, oferece inegáveis vantagens, quanto à precisão e manejo.

Para a calagem, deve-se colocar o eixo do nível de bôlha aproximadamente paralelo a qualquer lado formado por dois parafusos, dispostos dois a dois no triângulo da base, centrando após a bôlha do nível tubular. Girando o mesmo até nova posição, perpendicular à primeira e segundo à mediana do triângulo, centra-se novamente a bôlha do nível, e repete-se a operação até que em qualquer posição a bôlha fique sempre centrada; só não se verifica esta centragem, se o nível de bôlha

de ar estiver desretificado, o que obrigará, antes da calagem, à respectiva correção.

d) *Com dois níveis tubulares e três parafusos calantes.* Os dois níveis tubulares facilitam a calagem, feita directamente nas posições perpendiculares, agindo, independentemente em cada nível de bolha, o que é rápido, cómodo e preciso.

Quase sempre um dos níveis é montado no prato do limbo e, às vezes, é esférico, para uma calagem aproximada do aparelho, e o outro adaptado num montante da luneta, mas o processo de calagem é idêntico.

Para a *focagem* ou *colimação* do teodolito assim se procede:

Cada observador terá que proceder a focagem da ocular sobre o plano da imagem definida pelos fios do retículo ou cruz de mira de acordo com a sua própria visão, a fim de evitar erros devidos à paralaxe (visão dupla). Para isso deve mover o parafuso porta-ocular ou girar o anel dióptico, conforme o tipo de teodolito, até que a cruz apareça nitidamente sobressaindo contra um plano claro de observação, como o azul do céu, por exemplo.

Para visar um alvo qualquer, utiliza-se em primeiro lugar o visor para a primeira orientação. Com os zeros do limbo e alidade (índice) coincidentes, ajustados, com lupas ou através do microscópio de leitura, por intermédio dos parafusos *diferenciais* ou de *chamada*, faz-se pontaria com a luneta para o alvo ou piquete cravado no solo, com o parafuso de pressão solto, até a perfeita coincidência da cruz de mira com o ponto visado.

Prende-se com cuidado o parafuso de pressão, verifica-se e corrige-se a pontaria e leituras de coincidência e pode-se então soltar a alidade e luneta para nova pontaria, à qual deve-se dispensar idênticos cuidados e assim sucessivamente. Cada teodolito tem seus característicos ópticos e mecânicos distintos, que devem ser conhecidos previamente, ao proceder à focagem e leitura dos ângulos.

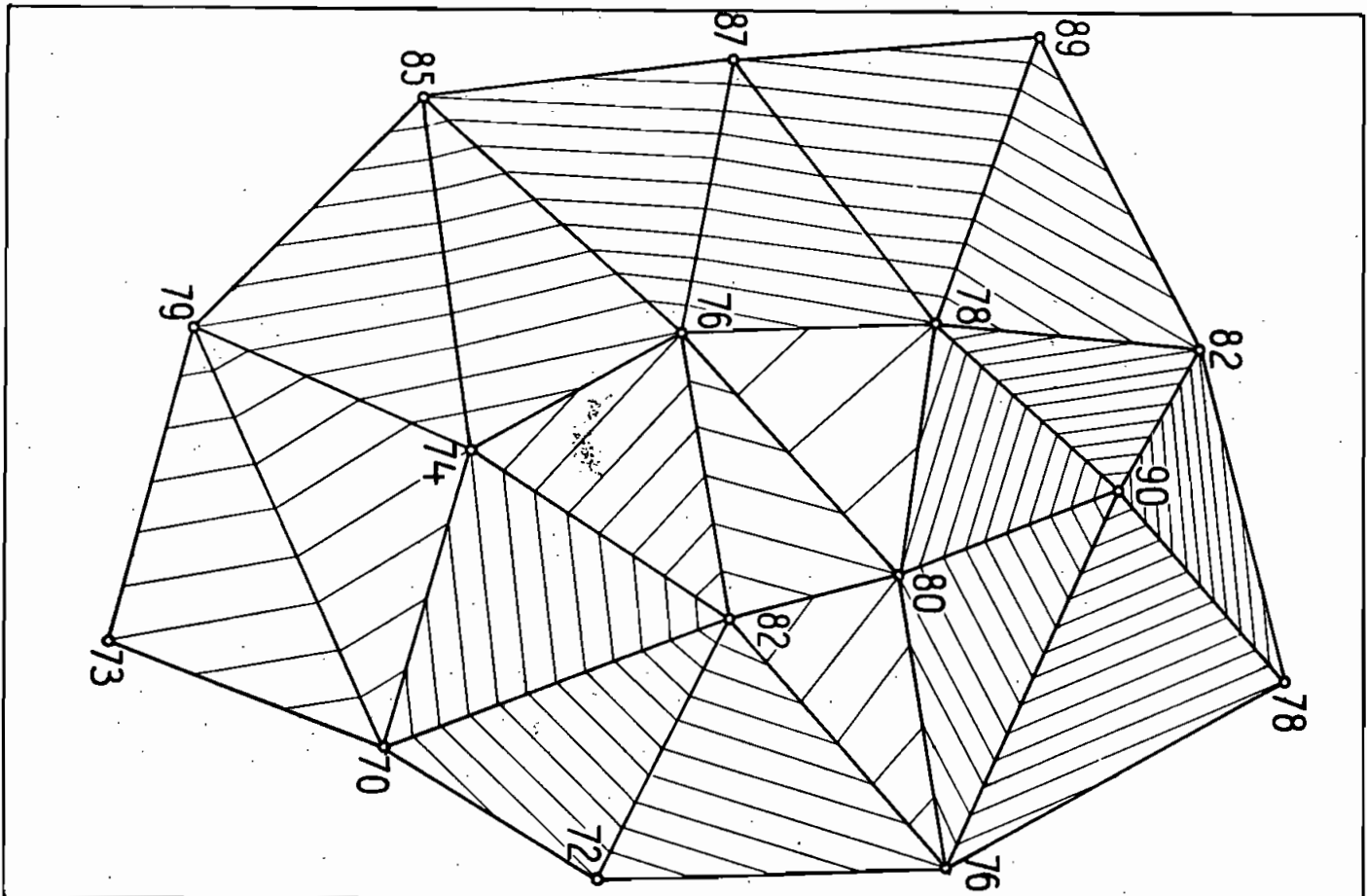
74 — Verificações e retificações de um teodolito

As *observações horizontais* destinam-se a medir os ângulos horizontais das direções, das quais são deduzidos os ângulos, que elas formam com a linha meridiana do lugar, chamados *azimutes* e por isso se emprega também a designação de *observações azimutais*.

Se utilizarmos o teodolito munido de bússola podem ser lidos directamente os *azimutes magnéticos*.

O eixo principal do teodolito ou o eixo de rotação da alidade, *por construção*, é normal ao plano horizontal do limbo e deve passar pelo seu centro, o que exige gradação certa; o eixo óptico da luneta

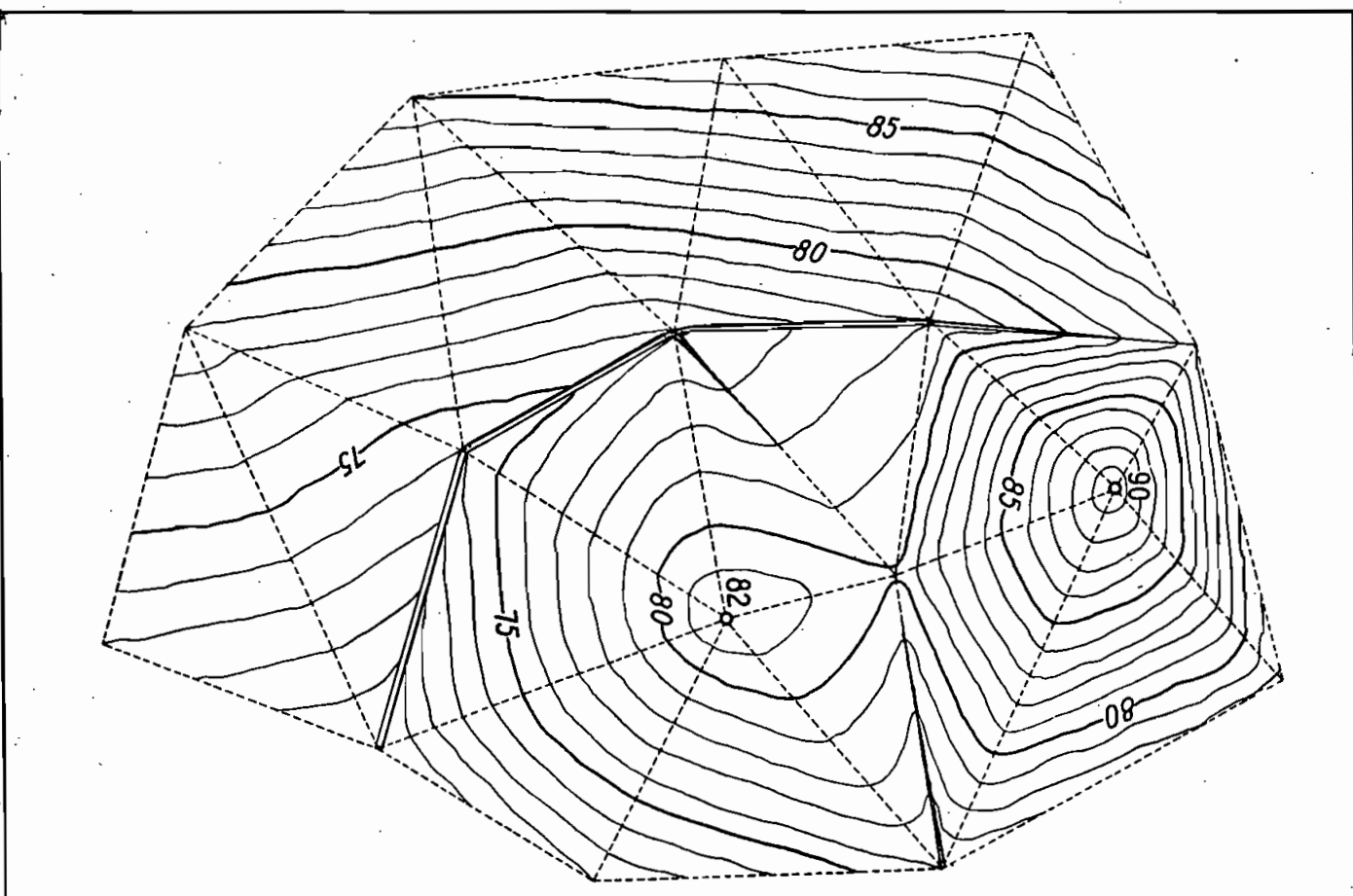
a) TRAÇADO DE RETAS DE NIVEL SOBRE UM PLANO COTADO



ESCALA 1:1000

PRANCHA IV

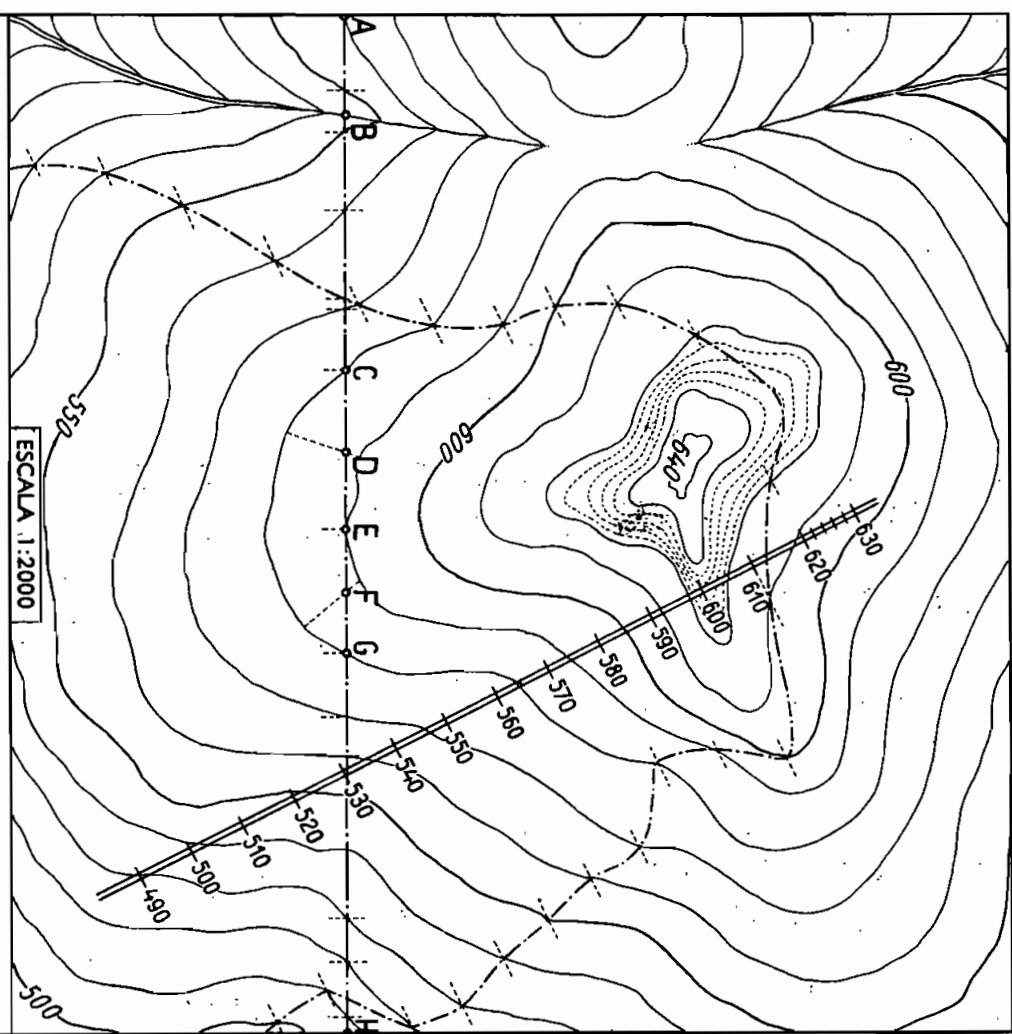
b) TRAÇADO DE CURVAS DE NIVEL SOBRE UM PLANO COTADO



ESPARTILHAMENTO - "CURSO DE TOPOGRAFIA"

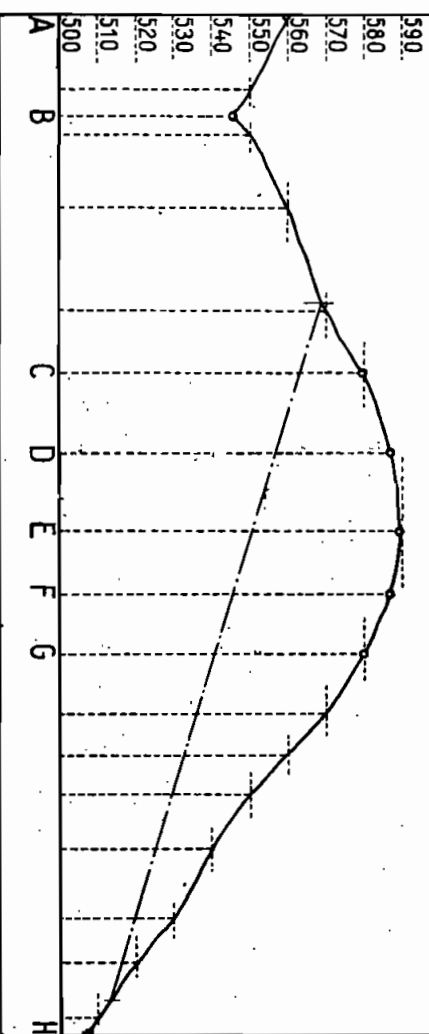
ESCALA 1:1000

c) INTERSECÇÃO DO TERRENO COM UM PLANO DADO



ESCALA 1:2000

Perfil sobre o alinhamento A H



ou linha de colimação deve interceptar o eixo principal ou coincidir com o mesmo na posição vertical da luneta.

As condições de retificação são as seguintes:

1.^a — O eixo principal deve ser vertical ou, o que é o mesmo, o limbo deve ser horizontal.

2.^a — O eixo óptico deve ser normal ao eixo de rotação da luneta.

3.^a — O eixo de rotação da luneta (eixo dos munhões) deve ser ou normal ao eixo principal, ou horizontal.

4.^a — O eixo óptico deve ser horizontal, quando estiver centrada a bolha do nível fixado ao limbo vertical (índice zero ou 90°).

Se todas estas condições se verificarem e se o eixo principal passar pelo vértice da estação, o eixo óptico, com o basculamento da luneta, gera os planos verticais dos diedros, cujas projeções são os ângulos a medir.

Nos teodolitos modernos, a 3.^a condição acima se obtém por construção, e daí se conclui não ser rígida a classificação dada, que só é integralmente válida para teodolitos de modelo antigo.

1.^a — *Horizontalidade do prato do limbo.* Em topografia, calar um plano é a operação que consiste em fazer com que o mesmo ocupe a posição horizontal. Vejamos como se pode calar um plano com auxílio do nível de bôlha de ar. Proponhamo-nos em primeiro lugar tornar uma reta horizontal. Suponhamos (Fig. 121a) uma régua *MN* repousando pelas extremidades em dois parafusos calantes v_1 e v_2 que permitem fazer variar a sua inclinação. Coloquemos o nível sobre esta régua e por meio dos parafusos v_1 e v_2 , centremos a bolha $a - a$. Se o nível estiver retificado, a base *PQ* será paralela ao eixo do nível $n - n$ e à régua *MN*; não estando, formará com a mesma um ângulo α . Dando agora ao nível uma rotação de 180° (Fig. 121b) a bolha deslocar-se-á, e o novo ângulo β , obtido pelo deslocamento do centro da bolha, medirá o duplo do erro e, assim, a correção a fazer terá para valor $\alpha = \beta/2$.

Para corrigir este erro, bastará levar o centro da bolha ao meio *m* do arco *oo'*, com auxílio do parafuso cabrestante ou de correção de nível *v*; finalmente para tornar horizontal a reta *MN*, centra-se a bolha novamente com os parafusos calantes v_1 e v_2 .

Dito isto, vejamos agora como é feita a 1.^a retificação de calagem do limbo ou verticalidade do eixo de rotação do prato do limbo.

Instala-se o teodolito no tripé;

Gira-se o prato do limbo até que cada eixo do nível de bôlha seja paralelo a um par de parafusos calantes opostos;

Centra-se pelos parafusos calantes as bôlhas dos dois níveis; dá-se uma rotação ao limbo de 180° em torno de seu próprio eixo; se se

tiver de início feito a coincidência dos zeros do limbo e vernier, essa operação torna-se mais fácil e mais exata.

Nota-se de quanto as bolhas se afastaram dos respectivos centros;

Introduz-se nos orifícios dos parafusos cabrestantes dos níveis, pinos de retificação, trazendo os centros das bolhas para frente ou para trás da metade do deslocamento havido;

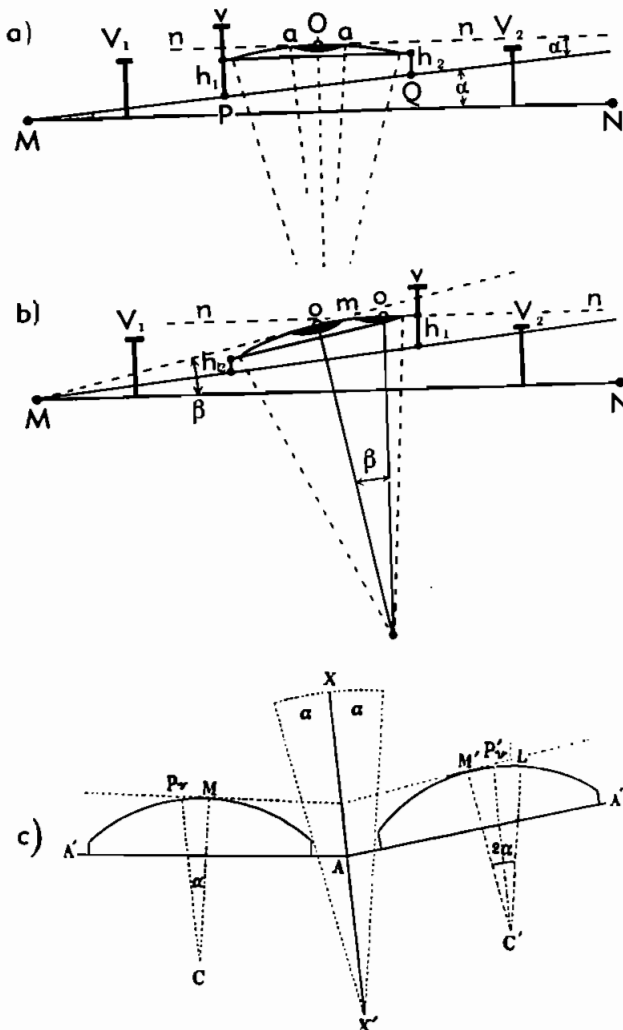


FIG. 121

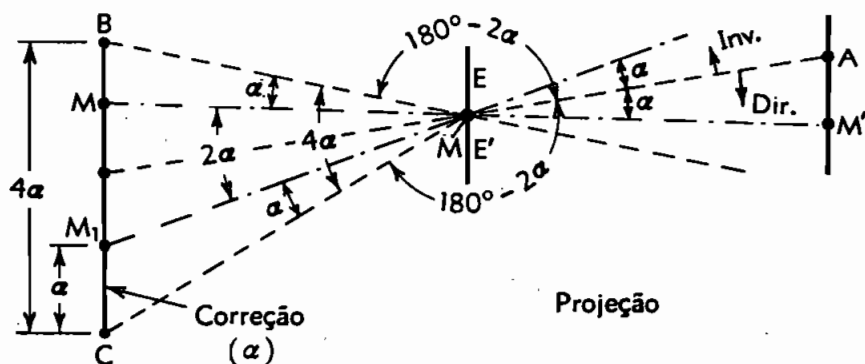
Nivela-se novamente e repete-se a operação até que em qualquer posição do limbo, os níveis estejam bem centrados.

Com esta retificação também o *eixo principal* do teodolito, por construção, torna-se vertical.

2.^a — *Perpendicularismo do eixo óptico sobre o eixo rotação da luneta.* Instala-se o teodolito num ponto central M , em terreno aproximadamente plano (Fig. 122).

Visa-se a 100 ou 150 metros um ponto A bem definido com o fio vertical do retículo e o aparelho fixo;

Gira-se a luneta em torno do seu próprio eixo e marca-se um ponto B aproximadamente na mesma distância e elevação do ponto A ;



(Quádruplo do erro)

FIG. 122

Deixa-se a luneta invertida, dá-se uma rotação em azimute ao limbo de 180° e procura-se visar novamente o ponto A ;

Gira-se novamente a luneta, trazendo-a à posição normal e marca-se um novo ponto C ;

Havendo, na 1.^a visada, uma colimação α , na 2.^a será 2α e no final 4α , que corresponde ao ângulo BMC ;

Marca-se um novo ponto E a um quarto da distância de B a C ;

Com o auxílio dos parafusos horizontais de deslocamento do fio vertical do retículo, faz-se a coincidência do mesmo com o ponto E ;

Novamente visa-se A e repete-se a operação até que ambos os pontos B e C coincidam com D , ocasião em que haverá o perpendicularismo desejado.

3.^a — *Horizontalidade do eixo de rotação da luneta.* Instala-se o teodolito próximo a um ponto elevado e visa-se, assim, um ponto A (Fig. 123);

Projeta-se com a luneta esse ponto num outro, B , próximo, em frente do instrumento;

Gira-se horizontalmente o instrumento de 180° e inverte-se a luneta; Com a luneta em posição invertida, procura-se visar novamente o ponto *B*;

Eleva-se a luneta e toma-se nota de um outro ponto *C* (se o instrumento estiver desretificado);

Levanta-se ou abaixa-se um dos muñões da luneta, com o respectivo parafuso de correção, até que o cruzamento dos fios do retículo passe por *D*, ponto médio entre *A* e *C*.

Quando não há um ponto elevado a visar, pode-se recorrer a um cordão ou fio a prumo próximo do instrumento e procura-se visá-lo em toda a sua extensão, corrigindo qualquer afastamento extremo, se houver.

As três retificações dadas são as principais e necessárias para qualquer levantamento planimétrico; para levantamento altimétrico ainda é necessário a verificação da horizontalidade do eixo óptico.

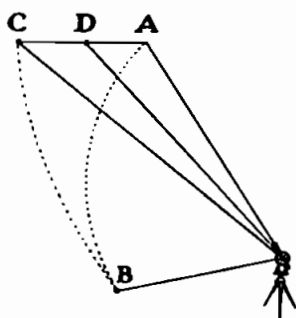
4.^a — Paralelismo e horizontalidade dos eixos do nível de bolha e óptico da luneta.

4.^a — Paralelismo e horizontalidade dos eixos do nível de bolha e óptico da luneta.

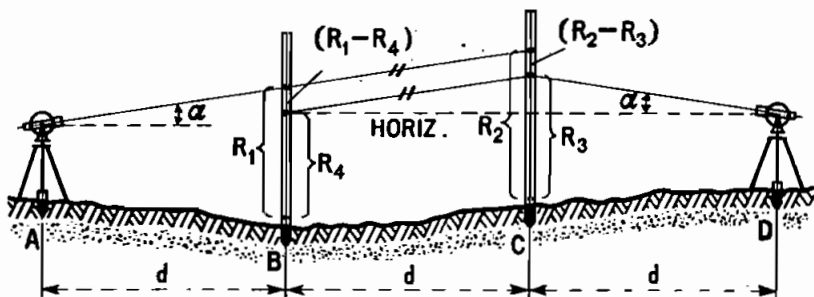
Método dos quatro pontos. (Outros métodos serão desenvolvidos no nivelamento trigonométrico.)

Antes — Verifica-se se o nível de bolha solidário com a luneta está retificado; caso contrário proceda-se do mesmo modo como dado na 1.^a retificação, para ajustá-lo convenientemente.

Depois — Crava-se quatro estacas *A*, *B*, *C* e *D*, em linha reta e equidistantes, de 25 ou de 50 metros (Fig. 124);



(3.^a Ret.)
FIG. 123



$$R_1 - R_4 = R_2 - R_3 \quad \text{e} \quad R_4 = R_1 + R_3 - R_2$$

(4.^a Ret. — 4 pontos)

FIG. 124

Instala-se o aparelho no 1.º ponto *A* e centra-se o nível de bolha; Faz-se numa régua ou mira instalada em *B* e *C* as leituras R_1 e R_2 respectivamente;

Muda-se o teodolito ou trânsito para o ponto *D*;

Centrando a bolha do nível, faz-se na régua ou mira em *C* uma nova leitura R_3 ;

Pelo paralelismo, obteremos: $R_1 - R_4 = R_2 - R_3$ e desta relação, o valor da incógnita R_4 :

$$R_4 = R_1 + R_3 - R_2 \quad (83)$$

que é o valor exato da leitura que deve ser feita na mira levada para *C*:

Se a leitura feita em *C* for diferente de R_4 , com a agulha ou pino de retificação modifica-se a posição do fio nivelador ou horizontal do retículo até conseguir-se essa leitura;

São necessárias novas leituras para verificar a exatidão das leituras anteriores e a perfeita horizontalidade do eixo óptico;

Por fim verifica-se se o zero do círculo vertical coincide com o índice do respectivo vernier;

Caso contrário, ajusta-se o vernier, deslocando-o levemente pelos parafusos que o prendem à armação do limbo vertical.

75 — Verificações e ajustes do teodolito repetidor Wild T1

1 — *Nível de verticalidade* (3). Neste parágrafo, na 1.ª retificação de um teodolito, modelo antigo, são indicadas as operações necessárias para a correção deste nível de bolha do limbo, que comanda a verticalidade do eixo principal. Só existe um parafuso de ajustagem numa extremidade e na outra uma mola. Gira-se dito parafuso com um pino de correção, no sentido direto, e a bolha desloca-se na direção do parafuso: a verticalidade é conseguida quando na rotação completa, a bolha se mantiver centrada.

2 — *Ajuste do dispositivo de centragem (prumo óptico)*. Fixa-se o teodolito no tripé. No solo, no centro do tripé, numa estaca de topo aplainada, marca-se um sinal, desenhando, por exemplo, com um lápis uma cruz, que se faz coincidir com o centro do círculo vermelho (retículo) existente no campo do dispositivo óptico de centragem.

Girando-se a alidade de 180º, se houver deslocamento do retículo com relação à cruz, corrige-se o desvio; metade por um ligeiro deslocamento e a outra metade como segue:

Retiram-se os dois parafusos polidos que se encontram aproximadamente quatro centímetros à direita e à esquerda da ocular do dispositivo de centragem. Então, introduz-se uma chave de parafuso nos orifícios

agora abertos até atingir os parafusos de ajustagem. Dirigido para o centro desses dois últimos se encontra uma mola de apoio, que permite corrigir a posição do retículo, ao aparafusar ou afrouxar os ditos dois parafusos. A última rotação de cada parafuso de ajustagem se fará sempre no sentido da marcha dos ponteiros de um relógio.

Terminada a ajustagem, volta-se a recolocar os dois parafusos polidos, com o maior cuidado e limpeza.

3 — *Verificação do erro de colimação do eixo óptico.* A primeira parte é a mesma dada para os teodolitos comuns de vernier, na 2.^a retificação, até a determinação do quadrúpulo do erro. A correção é feita neste teodolito do seguinte modo: Três parafusos comuns estão colocados ao redor da montagem do retículo da luneta, um horizontalmente no lado oposto ao microscópio de leitura, e os outros dois obliquamente acima e abaixo do microscópio. Se, por exemplo, tem que mover-se o retículo em direção ao círculo vertical, se desaparafusam primeiro os dois parafusos oblíquos dando-lhes a cada um o mesmo número de voltas e se aperta logo com moderação o parafuso horizontal. Deve-se repetir a operação até que o erro quádruplo de colimação quando se emprega uma mira disposta horizontalmente a 100 m do instrumento, não ultrapassar 20 mm, o que corresponde a um erro de colimação simples de, aproximadamente, 10".

4 — *Verificação do nível do círculo vertical.* Visa-se com o traço horizontal da luneta, e na posição direta do teodolito (círculo vertical à esquerda) um ponto bem distinto e anota-se a leitura A_1 . Repetir-se a mesma operação na posição inversa do teodolito (círculo vertical à direita) e faz-se a nova leitura A_2 .

A leitura média será:

$$A = \frac{(360^\circ - A_2) + A_1}{2} \quad (84) \quad (\text{para a divisão sexagesimal})$$

com os ângulos contados a partir do zênite.

Repete-se a visada novamente na posição direta da luneta e gira-se o tambor do micrômetro até obter na escala respectiva os minutos da leitura A . Desloca-se após a divisão que corresponde à leitura média marcada por dois traços paralelos, por meio do parafuso de coincidência (13) do nível do círculo vertical.

Finalmente, fazem-se coincidir as imagens da bolha do nível movendo o parafuso especial de correção. Repetem-se as operações para diminuir qualquer erro residual. As verificações dos níveis devem ser feitas com o instrumento na sombra.

5 — *Ajuste dos parafusos calantes e dos de coincidência.* Os parafusos calantes não devem ter nunca folga, pois a mesma seria prejudi-

cial à estabilidade do instrumento. Cada parafuso calante é dotado de um parafuso de ajuste com cabeça perfurada, o que permite regular seu movimento; idênticos parafusos possuem também os de coincidência dos níveis, para acerto das bolhas.

6 – *Verificação do tripé.* Deve-se verificar após trabalhos longos as uniões entre metal e madeira, que devem ser ajustadas para que não tenham jogo.

Os parafusos de pressão das pernas do tripé devem ser convenientemente apertados e ajustados.

76 – Retificação do teodolito repetidor com bússola, Vasconcellos, (modelo TV-M1)

1 – *Níveis do prato.* Estes níveis são ajustados de fábrica e são engastados no limbo, de modo a não carecerem de retificação; no entanto, caso, houver deslocamento da bolha, o que é de presumir, podem ser desmontados, operação trabalhosa pela situação dos mesmos abaixo da bússola central e visíveis através de uma tampa de vidro, e sua retificação se processa como já explicado na 1.^a retificação.

2 – *Nível da luneta.* Procede-se como indicado no item 4 do Wild T1; retifica-se o nível por meio de suas porcas de ajustagem.

3 – *Nível do círculo vertical.* Aponta-se a luneta, em 1.^a posição, para um sinal distante, e faz-se a leitura do círculo vertical com o nível do nônio ajustado. Repete-se a pontaria e a leitura, em 2.^a posição. As duas leituras devem ser iguais em valor absoluto.

Havendo diferença esta representa o dobro do erro do nível, que deve ser corrigido. Agindo no parafuso tangencial do nônio e deslocando após a bolha do nível que deve ficar no centro, se completa a retificação. Repete-se este controle e retificação até que as duas leituras sejam iguais ou de diferença desprezível.

4 – *Linha de visada.* A verificação e retificação, se necessária, obedece ao que já dissemos anteriormente.

5 – *Eixo transversal.* Antes desta retificação, o instrumento deve estar perfeitamente horizontalizado e isento de erro de linha de visada, cuja retificação foi indicada no parágrafo anterior.

Visa-se um ponto elevado (ponto *P*), por exemplo, a quina do telhado de uma casa, distante 15 a 25 metros do aparelho, de modo a obter um ângulo de elevação superior a 30°.

Em seguida, girando apenas a luneta em depressão, aponta-se sobre uma escala graduada em milímetros, colocada abaixo do ponto visado e que esteja em posição horizontal.

Faz-se a leitura sobre essa escala (que pode ser uma régua de desenho) e anota-se. Repete-se a operação em 2.^a posição e faz-se nova leitura sobre a escala. As duas leituras devem ser iguais. Se houver diferença, existe erro do eixo transversal, o qual se retifica como segue:

A média aritmética das duas leituras é a leitura correta. Aponta-se a luneta sobre a escala, na graduação correta e, em seguida, girando-se a luneta em elevação, visa-se o ponto P , o qual deve aparecer deslocado do centro do retículo.

Por meio dos dois parafusos contrastantes, que se encontram na extremidade do mancal fendido da luneta, leva-se o retículo a colimar exatamente com o ponto P . Verifica-se a retificação, colimando sucessivamente o ponto P e a escala, até que, em 1.^a e 2.^a posição, a leitura da escala seja a mesma.

77 — Influência dos erros residuais das retificações na medida dos ângulos

1 — *Erro de colimação do eixo óptico (c)*. Este erro se verifica quando a linha de colimação, OP (Fig. 125) não é perpendicular ao eixo secundário ou transverso de rotação da luneta, HH' , formando, porém, os ângulos $90^\circ + c$ e $90^\circ - c$ com OP ; a posição correta do eixo de colimação seria OC e não OP .

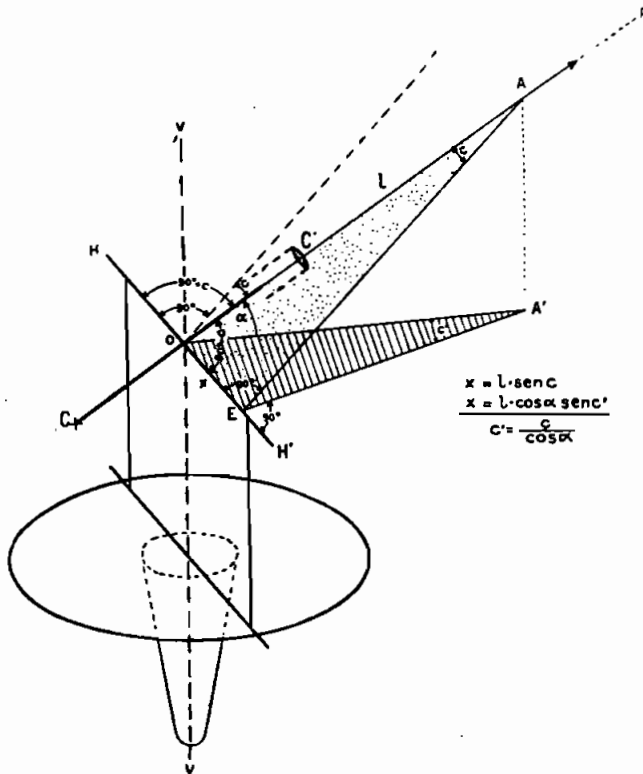


FIG. 125

As projeções correspondentes de ambas as posições, OS e OA' , que, no caso de não existir erro, deveriam coincidir, formam entre si o ângulo c' , projeção do ângulo c .

Tomemos um ponto qualquer, A , sobre OP , projetemo-lo em A' sobre um plano horizontal passando por HH' , e tracemos um plano perpendicular, $AA'B$, ao eixo de rotação da luneta fazendo $OA = l$ e $OB = x$, obtemos

$$OB = x = l \cdot \text{sen } c = l \cos \alpha \text{ sen } c' \quad (85)$$

donde $\text{sen } c = \cos \alpha \text{ sen } c'$

sendo c e c' muito pequenos, ainda $c' = \frac{c}{\cos \alpha} = c \text{ sen } \alpha \quad (86)$

quer dizer, o erro projetado c' é sempre maior que o próprio erro de colimação c e igual a êle para $\alpha = 0$ e variando no mesmo sentido que α .

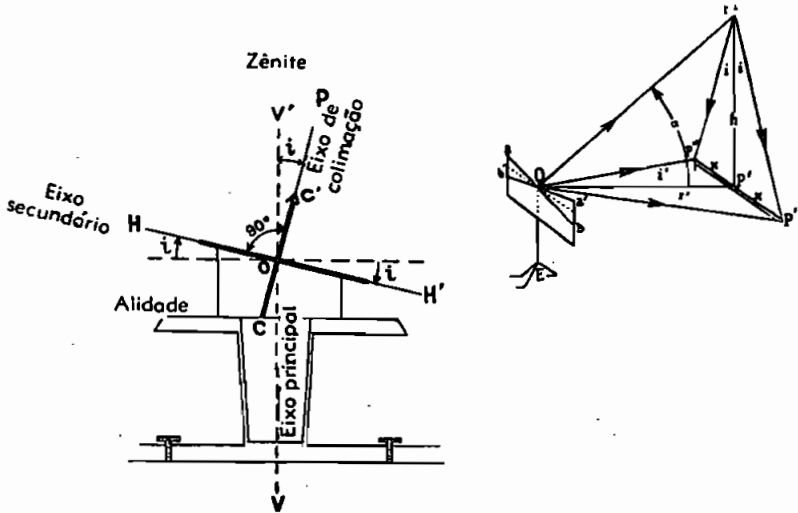


FIG. 126

2 – Erro de inclinação do eixo secundário ou de rotação da luneta (*i*). Devido à falta de horizontalidade do eixo HH' , que desloca a posição do eixo principal VV' , origina-se o erro i de inclinação do eixo secundário (Fig. 126) e que ocasiona um desvio angular i' na projeção na linha de visada OP sobre o plano paralelo ao do limbo.

Dos triângulos PP_1P' e OP_1P' , que são retângulos em P' , obtemos:

$$P_1P' = PP' \operatorname{tgi} = OP' \operatorname{tgi}'$$

e do triângulo OPP' :

$$PP' = OP' \operatorname{tg}\alpha$$

substituindo as tangentes pelos arcos, em virtude de serem muito pequenos i e i' , podemos escrever, simplificando:

$$i' = i \operatorname{tg}\alpha \quad (87)$$

sendo α o ângulo que a linha de visada forma com a horizontal. A expressão (87) indica que para $\alpha = 0$, ou seja, para *visadas horizontais*, o erro de inclinação do eixo secundário não tem influência na medida dos ângulos horizontais e, sim, somente nas visadas *inclinadas*.

3 - *Erro de verticalidade do eixo principal (v)*. Suponhamos (Fig. 127) que z' é a direção do eixo principal (inclinado), z a da direção vertical, e v o erro de verticalidade. Suponhamos, também, que ambas

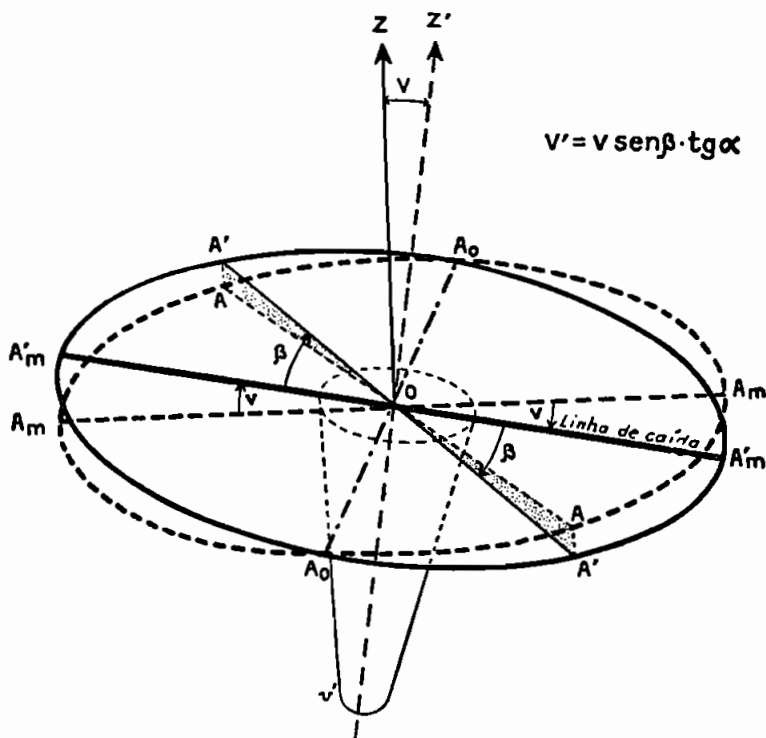


FIG. 127

as direções coincidam com o plano da figura, ficando assim determinado por z e z' um plano *vertical*, que designaremos por (zz') . Este plano corta o disco da alidade ou plano do limbo segundo o diâmetro $A'mA'm$, cuja inclinação com a horizontal $AmAm$ é máxima e igual ao ângulo v .

Podemos chamar a este diâmetro de *linha de declive* do plano da alidade.

A inclinação do diâmetro $AoAo$, perpendicular a $A'mA'm$ é zero. As inclinações de quaisquer diâmetros se encontram, assim, compreendidas entre O ($AoAo$) e v ($A'mA'm$).

Designemos por β o ângulo formado por uma direção qualquer $A'A'$ e a linha $A'mA'm$ como origem. Deduz-se da figura que a inclinação do diâmetro $A'A'$ é igual a $v \cdot \cos\beta$, para $\beta = 0$, a inclinação de $A'mA'm$ será v e para $\beta = \pm 90^\circ$, a inclinação de $AoAo$ será zero.

Supondo agora que o eixo secundário do teodolito é livre de erro, isto é, paralelo ao plano do limbo horizontal, um determinado erro de verticalidade v do eixo principal ocasiona então um erro do eixo secundário que, também, varia entre os valores 0 e V e, para uma direção qualquer de ângulo β é:

$$v \cdot \cos\beta \quad (88)$$

Se passamos agora a considerar o eixo de colimação do teodolito, que é perpendicular ao eixo secundário, podemos dizer que o plano vertical do mesmo para o ângulo azimutal, difere de 90° daquele correspondente ao eixo secundário; chamando i_0 a inclinação do mesmo, obtemos:

$$i_0 = v \operatorname{sen} \beta \quad (89)$$

O efeito do erro de verticalidade v sobre a projeção horizontal, que designaremos por v' , se obterá da equação (90) e assim se expressa

$$v' = v \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha \quad (90)$$

4 — *Fórmula geral. Conclusão.* A ação do conjunto dos 3 erros instrumentais sobre a projeção de uma visada pode ser obtido da expressão abaixo:

$$\delta = \frac{c}{\cos \alpha} + i \operatorname{tg} \alpha + v \cdot \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha \quad (91)$$

Designando por δ' e δ'' os valores correspondentes de δ para posição direta (CE) e inversa (CD) do instrumento usado, destacamos que "a média aritmética dos valores δ' e δ'' estará somente afetada do efeito do erro de verticalidade v do eixo principal, posto que, devido à mudança dos sinais de c e i , os efeitos dos erros de colimação e do eixo secundário se eliminam".

O assunto comporta maior explanação, mas de maior interesse para a Geodésia e Astronomia de posição, razão porque concluímos aqui, dizendo que é da maior importância para a medida dos ângulos horizontais a boa verticalização do eixo principal do teodolito, tanto mais perfeita, quanto maior for a grandeza dos ângulos verticais das visadas.

Os erros residuais não tem grande importância prática nas operações topográficas a teodolito, mas o estudo teórico é imprescindível para firmar critério sobre as condições exigidas em bons trabalhos, cada vez mais aperfeiçoados e precisos.

As tolerâncias são cada vez menores com o extraordinário progresso técnico do instrumental e dos métodos de trabalho.

78 — Excentricidade da alidade. Correções dos erros nos teodolitos antigos e modernos. Erro flutuante

1 — *Fórmula geral.* Quando o centro C_1 da alidade interior (onde se situam os verniers de leitura dos ângulos horizontais) (Fig. 128) não coincide com o centro C do limbo exterior graduado, há um erro de excentricidade angular (ϵ) que vamos determinar em função das leituras feitas nos dois verniers do teodolito usado, por exemplo, num Keuffel & Esser ou Vasconcellos.

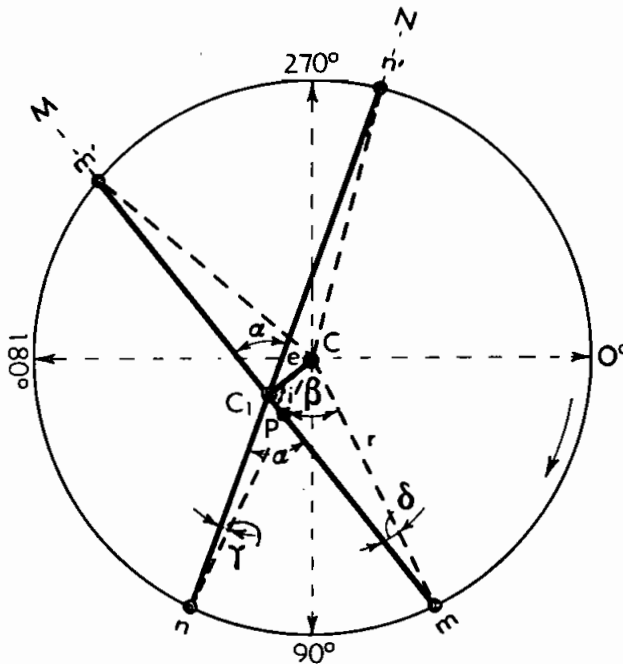


FIG. 128

Muito embora o aperfeiçoamento mecânico e a experiência do construtor, é muito difícil e mesmo impossível, fazer passar o eixo de rotação da alidade pelo centro do círculo graduado, não havendo, portanto, teodolito, embora moderno isento do *erro de excentricidade da alidade*.

Para se ter idéia da necessidade de corrigir esse erro pela sua grande influência na medida de um ângulo, basta dizer que se o eixo do instrumento passa a um *décimo de milímetro* do centro de um círculo graduado de 10 cm de diâmetro, o erro na medida de um ângulo pode atingir a $\sim 13'45''$, o que torna ilusória sua medida a teodolito.

Sejam C e C_1 os dois centros, com uma excentricidade *linear* e e O a origem de graduação, com sentido indicado (Fig. 128) direto.

As projeções das linhas de visada para os vértices M e N determinados pelos índices dos *dois verniers*, diametralmente opostos, são $m - m'$, na 1.^a leitura e $n - n'$ na segunda.

Seja α o ângulo excêntrico formado pelas duas direções e β o ângulo correspondente, lido na graduação do limbo, de centro C ; o ângulo β é obtido pela diferença $On - Om$.

Chamemos de δ e γ aos ângulos C_1mC e C_1nC e i ao ângulo CC_1m . Dos triângulos Cpm e C_1pn , tiramos:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \quad \text{e} \quad \alpha - \beta = \varepsilon = \delta - \gamma \quad (92)$$

sendo ε o valor do *erro de excentricidade angular*.

Dos mesmos triângulos ainda obtemos:

$$\frac{r}{\text{sen } i} = \frac{e}{\text{sen } \delta} \quad \text{e} \quad \text{sen } \delta = \frac{e \text{ sen } i}{r} \quad (93)$$

também

$$\text{sen } \gamma = \frac{e \text{ sen } (\alpha + i)}{r} \quad (94)$$

δ e γ sendo muito pequenos, se poderá escrever

$$\delta'' = \frac{e \cdot R''}{r} \text{ sen } i \quad (95)$$

$$\gamma'' = \frac{e \cdot R''}{r} \text{ sen } (\alpha + i) \quad (96)$$

substituindo em (92), virá:

$$\varepsilon'' = \delta'' - \gamma'' = \frac{e \cdot R''}{r} [(\text{sen } i - \text{sen } (\alpha + i))] \quad (97)$$

e recordando que

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cos \frac{1}{2} (p + q) \text{sen } \frac{1}{2} (p - q)$$

resultará

$$\varepsilon'' = \frac{2e \cdot R''}{r} \cos \frac{1}{2} (\alpha + 2i) \text{sen } - \frac{\alpha}{2} \quad (98)$$

O erro é *nulo* para $\frac{\alpha}{2} + i = 90^\circ$ ou 270° , isto é, quando a reta CC_1 é bissetriz do suplemento de α , e *máximo* para $\frac{\alpha}{2} + i = 180^\circ$ e $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, ou seja, para $i = 90^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$; também, para $\frac{\alpha}{2} + i = 360^\circ$ e $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, o que corresponde a $i = 270^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$.

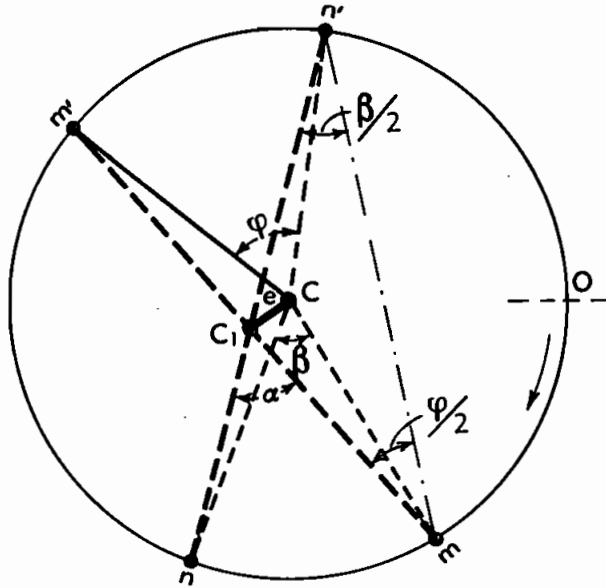
Nos casos de *máximo*, o ângulo α é plano de lados perpendiculares a CC_1 , e o erro ε será dado pela fórmula:

$$\varepsilon'' = \frac{2e \cdot R''}{r} \quad (99)$$

Aplicando-a, com os dados indicados de início, isto é, para $e = 0,1$ mm, $r = 50$ mm e radiano R'' (206265), obtemos o valor dado

$$\varepsilon'' = \sim 13'45''$$

2 — *Correção do erro ε* . Da geometria plana sabemos que os ângulos que têm apoio na circunferência, tais como (Fig. 129) os ângulos $m'mn'$ e $nn'm$, têm por medida a metade dos ângulos centrais correspondentes aos arcos compreendidos pelos seus lados, e, também, que um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



$$\beta = n - m$$

$$\varphi = n' - m'$$

$$\alpha = \frac{\beta + \varphi}{2}$$

FIG. 129

Resulta, assim, que

$$\alpha = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \varphi = \frac{\beta + \varphi}{2} \quad (100)$$

quer dizer, o ângulo procurado α é igual à média aritmética dos ângulos β e φ , obtidos com o auxílio das leituras do limbo.

Porém $\beta = n - m$ e $\varphi = n' - m'$
substituindo em (100) virá:

$$\alpha = \frac{(n - m) + (n' - m')}{2} \quad (101)$$

relação com a qual se poderá obter o valor do ângulo α , bastante aproximado do verdadeiro, em função das leituras feitas nos verniers.

3 - *Exemplo prático.* Admitamos (Fig. 129) que se tenham feito as seguintes leituras:

$$n = 116^{\circ}18' \quad m = 63^{\circ}23' \quad n' = 296^{\circ}17' \quad m' = 243^{\circ}21'$$

Obteremos:

$$\begin{array}{r}
 n = 116^{\circ}18' \\
 m = 63^{\circ}23' \\
 \hline
 n - m = 52^{\circ}55'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 n' = 296^{\circ}17' \\
 m' = 243^{\circ}21' \\
 \hline
 n' - m' = 52^{\circ}56'
 \end{array}$$

$$\frac{55' + 56'}{2} = 55'30''$$

e o ângulo α , corrigido da excentricidade, terá para valor

$$\alpha = 52^{\circ}55'30''$$

Para a correção desse erro, nos teodolitos de média e alta precisão, são necessários, como vimos, dois verniers ou dois microscópios de leitura dos limbos, afastados de 180° , ou então obtém-se diretamente a média das leituras por justaposição de imagens de zonas opostas (Zeiss II, Wild T2, Kern DK, ...).

Para se eliminar o erro de excentricidade nos teodolitos com um vernier (antigos) ou com um microscópio (Zeiss IV, Wild T1, ...) é necessário fazer duas observações em zonas opostas nas posições conjugadas, *direta* (C.E.) e *inversa* (C.D.).

4 — *Erro flutuante*. Devemos alertar, ainda, duas causas de erros residuais. falta de diametralidade dos índices opostos dos verniers (não se encontram exatamente na mesma linha reta) e folga do eixo de rotação da alidade, dando origem ao *erro de excentricidade flutuante*.

Há, ainda, a considerar o *erro de graduação* dos limbos metálicos (antigos), devido a imperfeição nas máquinas de dividir e ao não paralelismo dos pratos do limbo e da máquina; corrige-se com leituras simultâneas em diversas zonas do limbo, com o aumento dos verniers. Modernamente, com limbos de cristal e máquinas de dividir aperfeiçoadas, a graduação é feita com grande precisão evitando o inconveniente aumento de verniers e microscópios.

§ 13 — Medida dos ângulos horizontais isolados e múltiplos, a teodolito

79 — Medida de ângulos isolados

a) *Medida simples*. O teodolito, para a medida de um ângulo com exatidão, deve ser bem *centrado*, isto é, o prolongamento do eixo principal pelo fio a prumo deve coincidir com a taxa ou cruz feita no piquete cravado no vértice do ângulo a medir. Convenientemente nivelado em P e acertados os zeros do limbo e do vernier, solta-se a alidade de luneta até visar o pé de uma baliza mantida verticalmente por um ajudante no centro do piquete do vértice da esquerda, A , verifica-se novamente a coincidência dos zeros, prende-se o limbo (geral) e

solta-se a alidade (particular) até visar o vértice *B* da direita; com as quatro leituras feitas nas 2 posições e nos 2 verniers obtém-se o ângulo simples *APB*, isento somente do erro de excentricidade (vide 78), porém não compensado dos outros erros.

b) Medida compensada. Preconizado por *Bessel*, um ângulo pode ser medido, compensado dos erros de excentricidade, colimação do eixo óptico e inclinação do eixo secundário, com 8 leituras dos 2 verniers, 4 na posição *direta* da luneta do teodolito e 4 na posição *inversa* e pelas médias resumidas no quadro abaixo:

Estação	Ponto visado	POSIÇÃO I (C.E.)			POSIÇÃO II (C.D.)			Média Geral
		Ver. 1.	Ver. 2	Média	Ver. 1	Ver. 2	Média	
P	A	$\alpha'1$	$\alpha'2$	$\alpha' = \frac{\alpha'1 + \alpha'2}{2}$	$\alpha''1$	$\alpha''2$	$\alpha'' = \frac{\alpha''1 + \alpha''2}{2}$	$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$
	B	$\beta'1$	$\beta'2$	$\beta' = \frac{\beta'1 + \beta'2}{2}$	$\beta''1$	$\beta''2$	$\beta'' = \frac{\beta''1 + \beta''2}{2}$	$\beta = \frac{\beta' + \beta''}{2}$

Ângulo *APB* (γ) compensado entre os vértices *A* e *B*: $\beta - \alpha$.

A *média geral* é calculada com os resultados obtidos em cada uma das posições da luneta; essa média ainda pode ser *reiterada* noutras zonas do limbo, para compensar, ainda, o erro de graduação, principalmente se o teodolito usado for de precisão grosseira, um minuto, por exemplo.

Com o objetivo de obter distribuição mais conveniente das leituras sobre todas as partes do limbo, desloca-se cada vez de $\frac{180^\circ}{n}$, quer dizer, de 90° para n (número de direções) aproximadamente, de 60° para $n = 3$, etc.

80 — Medida de ângulos numa poligonização

Para proceder ao levantamento planimétrico do eixo diretriz de uma estrada ou de uma poligonal topográfica de contorno, devemos medir a orientação e o comprimento de uma série de alinhamentos.

Há dois processos para medir os ângulos que os alinhamentos fazem entre si em projeção horizontal: o dos *ângulos internos*, e dos suplementos desses ângulos, chamados *deflexões*.

a) Processo dos ângulos internos e azimutes. Seja uma poligonal 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — etc. (Fig. 130).

Instala-se o teodolito em 1; acertam-se os zeros do limbo e alidade; solta-se a agulha da bússola e orienta-se o aparelho na direção Norte,

fazendo com que a agulha coincida com a linha de fé $0 - 180^\circ$; depois gira-se a parte superior ou alidade, até a luneta visar o pé de uma baliza colocada em 2; lê-se, então, o azimute ou rumo do alinhamento inicial $1 - 2$, Az_1 , por exemplo, no limbo do próprio teodolito.

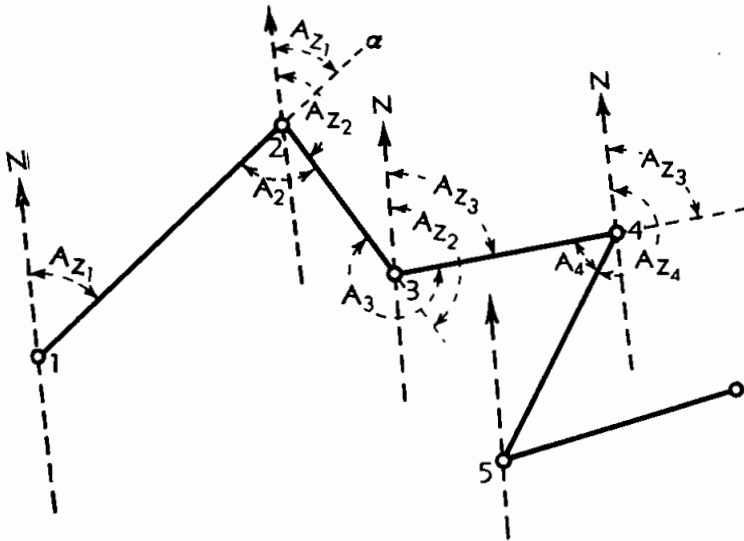


FIG. 130

Poder-se-á ler a orientação no limbo da própria bússola, mas tratando do 1.º azimute é conveniente obtê-lo com aproximação de minutos, servindo, além disso, como verificação.

Muda-se o instrumento para 2, acerta-se novamente os zeros, visa-se a baliza de vante em 3, lê-se na bússola o azimute Az_2 do alinhamento $2 - 3$; solta-se a alidade e procura-se visar a baliza em 1, *no sentido dos ponteiros de um relógio* — o ângulo lido será o *ângulo interno* A_2 .

Os outros azimutes (necessários quando se lêem ângulos internos *uma só vez*) e os outros ângulos internos são obtidos do mesmo modo.

O sentido do caminhamento sendo *o da esquerda*, como representado na (Fig. 130), e o limbo do teodolito graduado diretamente, primeiro visa-se a baliza de vante para depois visar-se a de ré; o contrário, evidentemente, deve ser feito se o caminhamento for *à direita* ou o limbo tiver *graduação inversa*.

A verificação do ângulo interno A_2 , em função dos azimutes Az_2 e Az_1 , é feita prolongando o alinhamento, $1 - 2$, pois

$$a \cdot 2 \cdot 3 + A_2 = 180^\circ \quad \text{ou} \quad Az_2 - Az_1 + A_2 = 180^\circ$$

e

$$A_2 = Az_1 - Az_2 + 180^\circ$$

A fórmula geral dos azimutes, deduzida da generalização, é:

$$Az_n = Az_{n-1} \pm A_{in} \pm 180^\circ$$

No caminharmento à direita $+ A_{in}$

No caminharmento à esquerda $- A_{in}$

Quando a soma ou a diferença dos dois primeiros termos do 2.º membro da equação acima for maior do que 180° , subtrai-se 180° e soma-se no caso contrário.

A verificação geométrica, no caso de uma poligonal fechada, é a conhecida relação

$$\Sigma A = (n - 2) 180^\circ$$

Somam-se todos os ângulos internos lidos do polígono e vê-se qual a diferença com os calculados pela fórmula acima.

O erro tolerável ε por ângulo é igual a *um minuto* ou menor; uma boa referência é fazer esse valor igual à aproximação do teodolito.

O erro total é $\varepsilon \sqrt{n}$, sendo n o número de ângulos medidos.

b) *Processo das deflexões e rumos.* As direções relativas dos alinhamentos de uma poligonal também podem ser obtidas em função dos ângulos de deflexão ou *deflexões* que cada alinhamento forma com o prolongamento do imediatamente anterior, e variam de 0° a 180° , num e noutro sentido.

Seja (Fig. 131) a poligonal 1 - 2 - 3 - 4 - etc., em cujos vértices instalamos o teodolito.

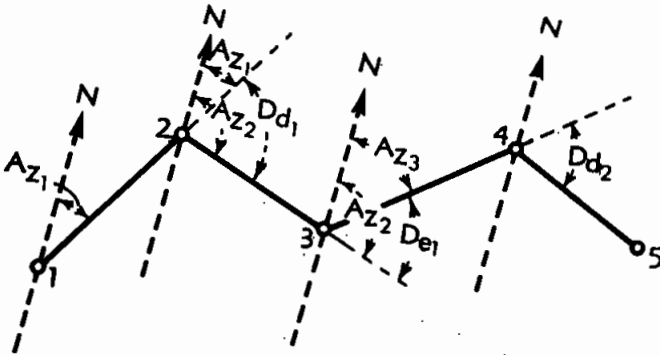


FIG. 131

O ângulo $a - 2 - 3$ ou $Dd -$ é uma deflexão à direita do alinhamento 2 - 3, com relação ao prolongamento 2 - a , do alinhamento anterior 1 - 2 e a deflexão em 3 será De à esquerda.

Com o teodolito instalado em 2, acerta-se os zeros, mergulha-se a luneta (posição inversa) e visa-se uma baliza em 1. Trazendo a luneta para a posição direta, com a rotação em torno do próprio eixo, solta-se a alidade e procura-se visar a baliza em 3.

A leitura no limbo (Dd) é o ângulo de deflexão à direita.

No vértice 3 lê-se a deflexão à esquerda De , com a graduação em sentido inverso no limbo; caso o teodolito só tenha a graduação direta, devemos primeiro visar a baliza em 4 e depois em 2, com a luneta invertida.

Vamos achar as relações que ligam os azimutes às deflexões:

Calculemos o azimuth Az_2 de 2 — 3, cuja deflexão é Dd , à direita.

No vértice 2 tiramos:

$$Az_2 = Az_1 + Dd$$

E no vértice 3 e alinhamento 3 — 4:

$$Az_3 = Az_2 - De$$

e, assim, a fórmula geral dos azimutes, pelas deflexões, é

$$Az_n = Az_{n-1} + Dd \quad (\text{deflexão à direita}) \quad (102)$$

$$Az_n = Az_{n-1} - De \quad (\text{deflexão à esquerda}) \quad (103)$$

A conversão de azimutes em rumos é feita pelas relações (Fig. 132):

1.^o quadrante ($0 - 90^\circ$)

$$R_1 = Az_1 \dots\dots\dots (NE)$$

2.^o quadrante ($90^\circ - 180^\circ$)

$$R_2 = 180^\circ - Az_2 \dots\dots\dots (SE) \quad (104)$$

3.^o quadrante ($180^\circ - 270^\circ$)

$$R_3 = Az_3 - 180^\circ \dots\dots\dots (SW)$$

4.^o quadrante ($270^\circ - 360^\circ$)

$$R_4 = 360^\circ - Az_4 \dots\dots\dots (NW)$$

Pode-se obter, diretamente, os rumos em função das deflexões.

Num contorno *poligonal fechado*, obtemos pela geometria, que a soma das deflexões à direita, menos a soma das deflexões à esquerda, é igual a 360° .

c) *Método do ângulo duplo.* Com o fim de prevenir um possível engano na leitura do *ângulo simples*, como vimos nos processos anteriores, emprega-se geralmente em topografia comum, o processo de leitura do ângulo duplo. Faz-se a coincidência do índice do vernier com o 0° da graduação do limbo, fixa-se a alidade e visa-se o ponto da esquerda B (Fig. 133); fixa-se o limbo, solta-se a alidade e visa-se

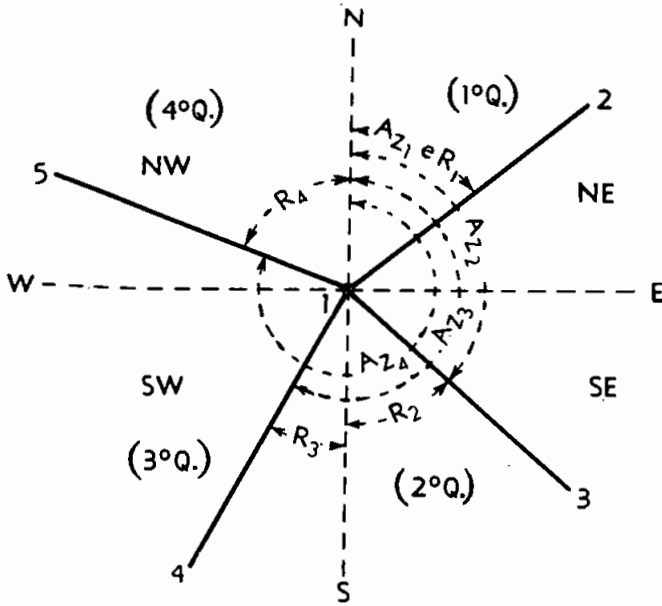


FIG. 132

o ponto da direita C; fixa-se a alidade e volta-se a visar novamente o ponto B; solta-se a alidade e volta-se de novo a visar o ponto C. O arco percorrido pelo índice do vernier, na graduação do limbo, representará o duplo valor do ângulo procurado $BAC = \alpha$.

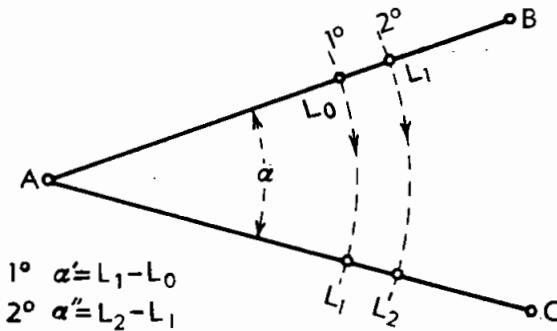


FIG. 133

É fácil ver que a leitura do ângulo 2α permite determinar o valor de α com uma aproximação dupla da que é dada pelo vernier.

Assim, por exemplo, se a aproximação for de 1 minuto e o valor lido do ângulo 2α for de $113^{\circ}53'$, ter-se-á para valor aproximado do ângulo $\alpha = 56^{\circ}56'30''$. Como se vê, o chamado ângulo duplo consiste em fazer uma repetição do ângulo lido e sua vantagem principal é a verificação da leitura do ângulo simples.

d) *Método de repetição.* Procedendo do mesmo modo como explicado no ângulo duplo e continuando, repete-se sucessivamente a operação um certo número de vezes (n).

Chamando $L_0, L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$ as leituras sucessivas, ter-se-á para cada ângulo aproximado:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= L_1 - L_0 \\ \alpha_2 &= L_2 - L_1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= L_{n-1} - L_n\end{aligned}$$

A média desses resultados dará para valor de

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}{n} = \frac{L_n - L_0}{n} \quad (105)$$

Está claro que o valor de L_n será dado pelo número de vezes que o índice do vernier passar pela origem mais a leitura final.

Este método tem a vantagem de aproximar mais a leitura dos ângulos; assim, se a aproximação direta do vernier for de 1 minuto ou $60''$, e se fizermos 6 leituras pela repetição, será possível ler o ângulo com a aproximação de $10''$, pois:

$$\alpha_1 = \frac{a}{n}$$

A repetição supõe teoricamente que os erros de divisão, pontaria e leitura, transportados sucessivamente para o limbo vão se somando materialmente sem descontinuidade, o que não é rigorosamente exato.

e) *Método de reiteração.* Consiste este método em medir cada ângulo em partes diferentes do limbo, atenuando, assim, os erros de divisão dos limbos graduados.

Visa-se sucessivamente os dois pontos, fazendo a diferença das duas leituras; gira-se o limbo de um certo número de graus e efetua-se uma segunda medida independente da primeira, e assim sucessivamente, até um certo número n de medidas, cuja média dará o valor do ângulo.

Na prática, os dois últimos métodos, de repetição e reiteração, se equivalem.

81 — Medidas angulares múltiplas

a) *Método dos giros do horizonte.* O método dos giros do horizonte consiste em observar todas as direções partidas da estação, uma após outra, num sentido determinado em hora conveniente e em referir todas as direções observadas a uma dentre elas, escolhida como origem ou de *referência*; é fácil obter-se por simples diferenças os ângulos formados pelas direções entre si.

A direção de referência pode ser um dos pontos visados, de melhor visibilidade, ou outro sinal auxiliar.

Em *triangulação geodésica*, de alta precisão, habitualmente, são feitos 20 giros para triangulação de 1.^a ordem, com lados de 10 a 15 km, 10 giros para a de 2.^a ordem,* *topográfica*, com lados até 3 km, 4 giros apenas, mudando em cada giro a origem das leituras. Com um teodolito de 2 microscópios, 4 giros, as séries ficarão distantes entre si de $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ e as origens serão $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ e 135° .

As séries são feitas alternadamente no sentido direto e no inverso, adotando-se, por exemplo, o sentido direto para as séries de origem par e o sentido inverso para as de origem ímpar.

Um giro do horizonte deve começar por uma pontaria sobre o ponto de referência e terminar por outra pontaria sobre o mesmo ponto.

Os valores dos ângulos são a média dos resultados obtidos nos vários giros ou, mais simplesmente, são obtidos por simples diferenças dos valores médios das leituras relativas a cada direção.

b) *Método dos ângulos com a referência.* A observação de um ângulo por intermédio de 4 leituras, para cada direção, é feita metade com rotação no sentido do crescimento da graduação, (movimento *progressivo*) e a outra metade no sentido contrário (movimento *retrógrado*), conjugadas duas a duas, e *reiterando* para cada uma delas. Para facilitar designaremos por:

$$\begin{array}{l}
 PD - \text{posição direta} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{progressiva} - PDP \\ \text{retrógrada} - PDR \end{array} \right. \\
 \\
 PI - \text{posição inversa} \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{progressiva} - PIP \\ \text{retrógrada} - PIR \end{array} \right.
 \end{array}$$

A adoção dos movimentos progressivo e retrógrado têm por finalidade a redução dos erros devidos às folgas dos eixos e parafusos.

* Com lados de 5 a 6 km, e a de 3.^a ordem.

Nos teodolitos do tipo Wild T1 e Zeiss IV, as origens para as reiterações são 0, 90, 180, 270°, atendendo a que a inversão da luneta conduz automaticamente a leituras na zona oposta do limbo.

Nos teodolitos do tipo Wild T2, Zeiss II, Kern DK, Otto-Fennel as origens são 0, 45, 90 e 135°.

O método pode ser simplificado, efetuando-se apenas 2 leituras:

	Wild T1,...	Wild T2,...
<i>PD</i>	0°	0°
<i>PI</i>	180°	90°

O método dos ângulos com a referência consiste em combinar independentemente cada direção com a da referência (*marca*), medindo-se os ângulos com um certo número de pares de observações conjugados, *PDP* e *PIR*, com reiteração.

c) Método dos ângulos (Schreiber). O método dos giros do horizonte ou séries satisfaz a todas as condições teóricas, quando é possível fazer giros de horizonte completos, em condições idênticas e é o mais cômodo e simples.

Acontece porém não ser sempre possível incluir em todos os giros o conjunto dos vértices que neles devem figurar, entre outras razões pela circunstância de visibilidade dos sinais não ser num dado momento boa para todos. Schreiber afirma, que em onze anos de serviço só duas vezes conseguiu observar giros completos em vértices donde partiam mais de duas direções. Daí a necessidade de obter a direção provável de um vértice, não pela simples média aritmética das leituras que lhe dizem respeito o que seria facilimo, mas por compensação longa, feita à luz teórica dos mínimos quadrados. Perde assim o método na prática, grande parte das vantagens que o recomendam.

O método das *combinações binárias* ou de *Schreiber* consiste no seguinte: seja *A* (Fig. 134) um vértice da rede de onde partem as direções 1, 2, 3, 4, 5, que passam em pontos a visar. Em vez de inclui-los todos num mesmo giro, medem-se isoladamente os ângulos que a direção A-1 faz com A-2, A-3, A-4, as que A-2 faz com A-3 e A-4, ou por outra forma os ângulos 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5 e 4-5, cujo número é evidente o das combinações binárias que se podem formar com todos os vértices.

Se for *s* o número de direções, teremos de medir tantos ângulos quantos resultarem da fórmula geral:

$$n = \frac{s(s-1)}{2} \quad (106)$$

por cujo intermédio se calcula em aritmética o número de combinações binárias de s objetos.

Embora conhecido de há muito e já considerado por Gauss e Gerling como o ideal dos métodos de medir ângulos azimutais, coube a Schreiber introduzi-lo sistematicamente num serviço geodésico de primeira ordem pelo que é conhecido sob o nome de *método de Schreiber*.

O método de Schreiber, é designado por métodos dos *ângulos* a fim de distingui-lo do método dos *giros de horizonte* ao qual se denomina *método das direções*.

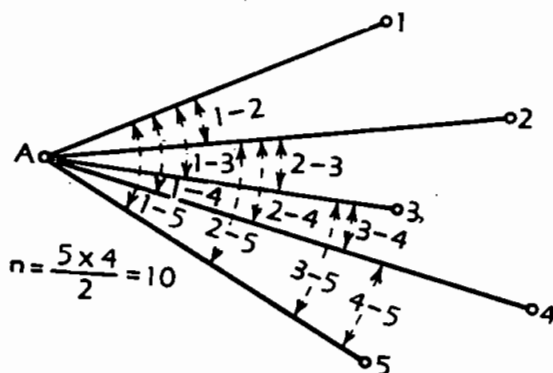


FIG. 134

As principais vantagens do método de Schreiber são:

1) A medição de um ângulo em que há só duas pontarias reclama menos tempo que a execução de um giro de horizonte em que elas são em geral numerosas. Como porém a precisão da medida cresce com a rapidez do trabalho, principalmente se o instrumento estiver instalado em sinal elevado, o que é às vezes inevitável, segue-se que o método das combinações binárias deve ser preferido ao das direções.

Cada ângulo pode ser observado com um certo número de pares de observações conjugadas e as origens iniciais respectivas devem ser escolhidas de modo que nenhuma direção seja observada mais de uma vez em cada origem e que o número de origens seja mínimo. Assim se for q o número de pares de observações, facilmente se demonstra que o intervalo das origens deve ser:

$$\frac{180^\circ}{(n-1)q} \text{ para } n \text{ par e } \frac{180^\circ}{nq} \text{ para } n \text{ impar} \quad (107)$$

na hipótese de se fazerem leituras em 2 zonas opostas do limbo.

Para $q = 4$ e $n = 5$, as origens iniciais ficariam afastadas de $\frac{180}{5.4} = 9$ graus, e poderia organizar-se o seguinte quadro relativo a sua distribuição:

Ângulos	Origens			
	0°	45°	90°	135°
1-2	0°	45°	90°	135°
1-3	9°	54°	99°	144°
1-4	18°	63°	108°	153°
1-5	27°	72°	117°	162°
2-3	18°	63°	108°	153°
2-4	27°	72°	117°	162°
2-5	36°	81°	126°	171°
3-4	36°	81°	126°	171°
3-5	0°	45°	90°	135°
4-5	9°	54°	99°	144°

Organizado este quadro, podem observar-se os ângulos por qualquer ordem, escolhendo-se, de cada vez, as direções que melhor visibilidade oferecerem, vantagem especial no caso de se tratar de sinais situados a grandes distâncias, já do domínio da geodésia, em que o assunto é estudado criteriosa e exaustivamente.

Medidos todos os ângulos, resta determinar os valores *mais prováveis* dos ângulos independentes, apenas $(n - 1)$, que se calculam direta e indiretamente.

Em geodésia se chega à conclusão de que os valores obtidos indiretamente tem um peso igual à metade do das observações diretas e, por isso, o valor médio para qualquer ângulo, por exemplo, 1 · 2 será um valor *ponderado*:

$$[1.2] = \frac{2(1.2) + [(1.3) - (2.3)] + [(1.4) - (2.4)] + [(1.5) - (2.5)]}{5} \quad (108)$$

82 - Erro devido à centragem imperfeita do teodolito

Quando a projeção do centro do instrumento não coincide exatamente com o vértice do ângulo a medir, comete-se um erro na avaliação deste, conhecido como *erro linear de centragem*, que depende da excentricidade, do valor do ângulo e do comprimento dos lados.

Chamemos (Fig. 135):

$CAD = \alpha$, o ângulo a medir;

$CBD = \beta$, o ângulo lido;

$AB = e$, a excentricidade linear;

$AC = l$

$AD = l_1$, os lados do ângulo α ;

$CBA = \gamma$

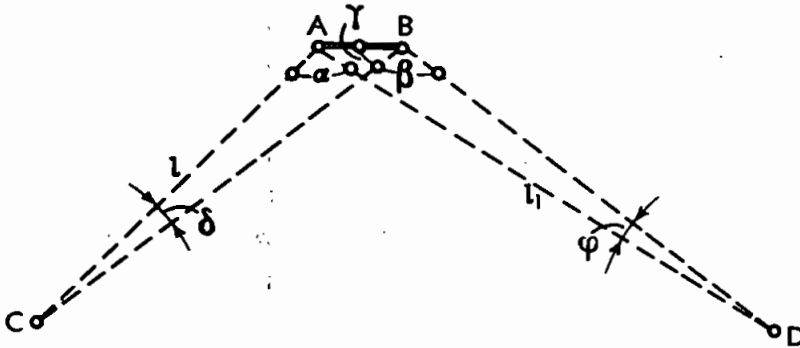


FIG. 135

$$\alpha + \delta = \beta + \varphi \quad \text{donde} \quad \alpha = \beta + \varphi - \delta$$

Portanto, o erro angular (ϵ) será:

$$\epsilon = \varphi - \delta$$

Os triângulos ABC e ABD dão:

$$\frac{e}{\text{sen } \delta} = \frac{l}{\text{sen } \gamma}; \quad \frac{e}{\text{sen } \varphi} = \frac{l_1}{\text{sen } (\beta + \gamma)}$$

Donde

$$\text{sen } \delta = \frac{e \cdot \text{sen } \gamma}{l} \quad \text{e} \quad \text{sen } \varphi = \frac{e \cdot \text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1}$$

Os ângulos δ e φ sendo muito pequenos, poderemos substituir os senos pelos arcos correspondentes, isto é:

$$\delta = \frac{e \cdot \text{sen } \gamma}{l} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{e \cdot \text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1}$$

por conseguinte:

$$E = \varphi - \delta = e \left[\frac{\text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1} - \frac{\text{sen } \gamma}{l} \right] \quad (109)$$

Esta expressão dá o erro em partes do raio; para obtê-lo em segundos de arco, basta dividi-lo pelo arco de um segundo, ou

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{\text{arc } 1''} = \frac{\varepsilon}{1} = 206265 \cdot e \left[\frac{\text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1} - \frac{\text{sen } \gamma}{l} \right] \quad (110)$$

Erro maximum. Considerando nas expressões (109) e (110) constantes as quantidades lineares, o erro maximum verifica-se para $\beta = 180^\circ$ e $\gamma = 90^\circ$.

Com efeito: $\text{sen } (\beta + \gamma) = \text{sen } 270^\circ = -1$, e $\text{sen } \gamma = \text{sen } 90^\circ = 1$, que substituídos na expressão (110) darão:

$$\varepsilon'' = 206265 \cdot e \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l} \right) = -206265 \cdot e \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l} \right) \quad (111)$$

A figura (136) permite verificar diretamente a expressão acima, com efeito

$$\alpha + \delta = \beta - \varphi; \text{ donde } \alpha = \beta - (\delta + \varphi)$$

O erro será, portanto:

$$\varepsilon = -(\delta + \varphi)$$

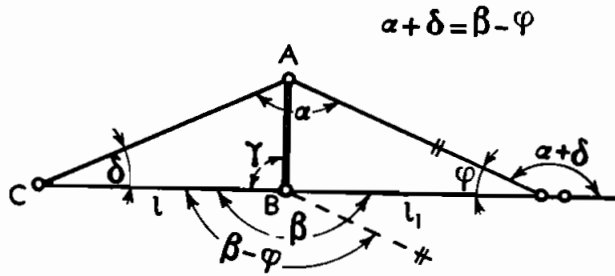


FIG. 136

Exemplo: Suponhamos (Fig. 136) $e = 0,01$ m; $l_1 = 100$ m e $l = 80$ m.

Teremos

$$\varepsilon'' = -206265 \cdot 0,01 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{80} \right) = -206265 \cdot 0,01 \cdot 0,225 = -46,41$$

Erro minimum. Vamos supor que os pontos A e B estejam contidos na circunferência que passa pelos pontos C e D (Fig. 137).

Pela expressão (110), vê-se que o erro será nulo quando

$$\frac{\text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1} = \frac{\text{sen } \gamma}{l};$$

Neste caso $\delta = \varphi$ e $\alpha = \beta$, o que exige que os pontos A, B, C e D estejam contidos numa mesma circunferência.

Com efeito, verifica-se pela figura (138a) que $\delta = \varphi = \frac{\widehat{AB}}{2}$ e

$$\alpha = \beta = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

O triângulo ACD , dá:

$$\frac{\text{sen } \rho}{l} = \frac{\text{sen } w}{l_1}$$

$$\text{Porém } \rho = \gamma = \frac{AC}{2} : w + \beta + \gamma = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ;$$

$$\text{sen } \omega = \text{sen } [180 - (\beta + \gamma)] = \text{sen } (\beta + \gamma)$$

Portanto:

$$\frac{\text{sen } (\beta + \gamma)}{l_1} = \frac{\text{sen } \gamma}{l}$$

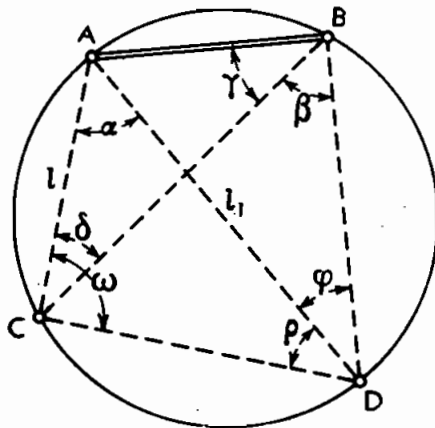


FIG. 137

Supondo ainda $l = l_1$, teremos $\sin(\beta + \gamma) = \sin \gamma$

Para que se verifique esta igualdade, é preciso que $\beta + \gamma = 180 - \gamma$

$$\text{Então } \gamma = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

Verifica-se pela figura (138b) que os lados l e l_1 sendo iguais, o diâmetro AM é bissetriz do ângulo α , e a corda BM é bissetriz do ângulo β . Neste caso

$$\gamma + \beta/2 = \frac{\overline{AM}}{2} = 90^\circ \quad \text{e} \quad \gamma = 90^\circ - \beta/2.$$

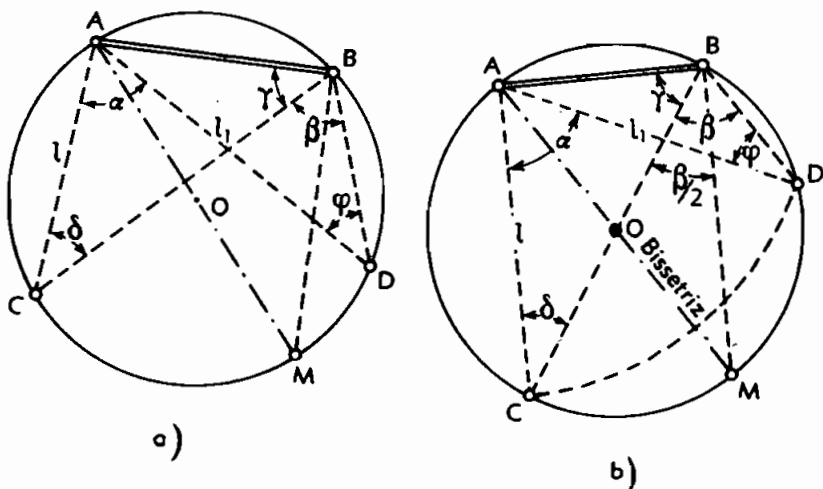


FIG. 138

83 - Redução ao centro de estação, inacessível

Seja VV_1 , o lado calculado de uma triangulação topográfica (Fig. 139), cujos vértices devem ser todos ocupados para medida dos ângulos e respectivas compensações dos erros cometidos. Suponhamos o vértice V inacessível, onde não pode ser instalado o teodolito.

Pode ser a cruz da torre de uma igreja ou seta de um pára-raio, muito escolhidos para vértices pela sua visibilidade.

De um vértice auxiliar V' , muito próximo, a poucos metros, medimos outros ângulos que facilitam à redução ao ângulo x do vértice V . Chamemos $OV'V_1$ de α , $OV'V$ de β , ϵ , erro de excentricidade angular, e excentricidade linear $V'V$. Da figura obtemos

$$\sphericalangle V_3V'V_1 = x = \alpha + \epsilon$$

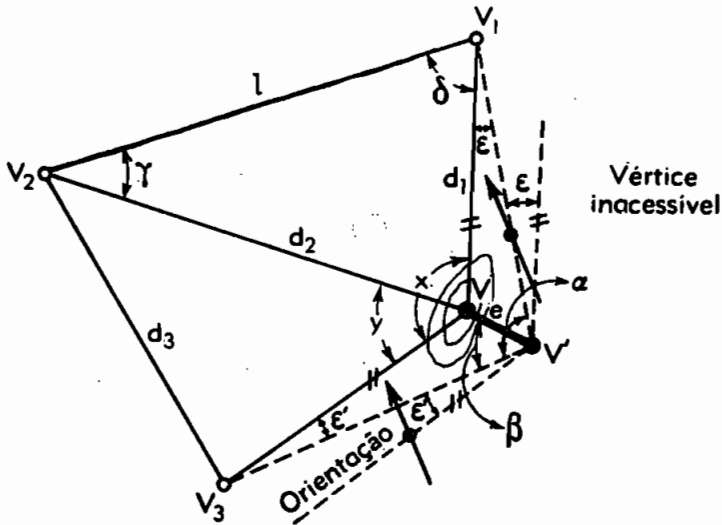


FIG. 139

Determinemos o valor de ε do $\Delta V'V_1V$:

$$\frac{\text{sen } \varepsilon}{e} = \frac{\text{sen } (\alpha + \beta)}{d_1} \quad (112)$$

$$\text{isolando } \text{sen } \varepsilon: \text{sen } \varepsilon = \frac{e}{d_1} \text{sen } (\alpha + \beta) \quad (113)$$

sendo $e \ll d_1$ e ε muito pequeno, podemos escrever:

$$\varepsilon'' = 206265 \frac{e}{d_1} \text{sen } (\alpha - \beta) \quad (114)$$

Dessa forma fica determinado o valor do ângulo x no vértice V inacessível. Com raciocínio análogo, obteríamos Y e outras incógnitas se a triangulação fosse de maior número de vértices.

§ 14 – Métodos de levantamento planimétrico

84 – Tipos de levantamentos

Vêm progredindo vertiginosamente nos últimos 30 anos os métodos fotogramétricos e, principalmente, os aerofotogramétricos com aparelhagem cada vez mais aperfeiçoada e melhor técnica de levantamento,

que os processos clássicos só devem ser usados em zonas pouco extensas e em levantamentos especiais, cujas condições de precisão em altimetria obriguem a utilizar o nivelamento geométrico direto, ou em planimetria imponham o emprego de métodos rigorosos de medição de distâncias, que terá de ser feita sobre o terreno com fitas de aço ou outros diastímetros de precisão.

Acresce notar que o nivelamento geométrico, com nível de luneta, pode ser usado em comum com o levantamento planimétrico e dos detalhes, pelos métodos fotogramétricos terrestres ou aéreos, de preferência.

a) *Levantamentos em grandes escalas.* As plantas dos detalhes construtivos de obras de engenharia, tais como edifícios, pontes, barragens, aeródromos, estádios, . . . que devem ser calcadas em levantamentos nas escalas de 1/250, 1/500 ou 1/1 000, devem ser feitos com os processos comuns topográficos, utilizando teodolitos e níveis modernos.

No entretanto, onde houver terreno acidentado, tais como vales de rios para a construção de pontes e barragens, deve-se empregar os métodos taquiométricos ou fotogramétricos que, bem orientados, dão precisão desejada.

Se forem regularmente extensos os levantamentos a fazer em lugar de ligados a uma poligonal de contorno (poligonação), podem sê-lo a uma triangulação pequena; a orientação deve ser obtida com observações do sol, ou, na impossibilidade, com uma bússola, corrigindo-se os ângulos lidos, azimutes ou rumos, da declinação magnética.

Oferece, ainda, uma vantagem, principalmente ao engenheiro recém-formado, incumbido de projetar uma determinada obra, levantar o terreno diretamente e conhecer bem sua topologia e constituição do solo; colherá subsídios que serão valiosos para o projeto e implantação posterior da obra.

No grupo dos levantamentos em grandes escalas, há ainda a considerar os *levantamentos urbanos* e os *cadastrais*, os primeiros na representação de cidades, vilas e interligações várias e os segundos nos limites da propriedade urbana e rural para fins cadastrais.

b) *Levantamentos urbanos.* O engenheiro ou o urbanista incumbido dos estudos de urbanização de cidades, distribuição ou redes de águas e esgotos, linhas elétricas de baixa tensão nas cidades, vilas e outras povoações, precisa dispor de plantas, também em escalas grandes, de preferência na de 1/1 000 ou, mesmo em trabalho mais detalhado, na de 1/500, e descendo até 1/2 000, no caso de trabalhos menos importantes.

A aerofotogrametria tem grandes possibilidades nesse tipo de levantamento pela facilidade e economia em tempo e dinheiro, razão de sua preferência em quase todas as cidades grandes e pequenas de nosso País.

Para sua aplicação por firmas especializadas e mesmo individualmente deve ser exigido o apoio do trabalho numa triangulação cadastral, ligada à rede geodésica e com medida direta de uma base, que será desenvolvido no capítulo sobre *levantamentos de precisão*. A planimetria é obtida por poligonais auxiliares, com vértices ligados a outros da triangulação, sendo as edificações ligadas por alinhamentos e normais, bem como por irradiação em torno de vértices auxiliares partidos das referidas poligonais.

c) *Levantamentos cadastrais*. Os levantamentos cadastrais, organizados pelas seções de Cadastro das Secretarias de Obras Públicas e Agricultura dos Estados e das Prefeituras dos Municípios, tem grande importância e utilidade, pois definem geometricamente e economicamente as propriedades urbanas e rurais. A carta cadastral contém todas as indicações *plani* e *altimétricas* dos limites da propriedade e parcelas de que se compõem:

Quando a carta é executada somente com a planimetria, por motivos de economia, apresenta o inconveniente de não se prestar a qualquer projeto de engenharia, para o qual deve ser feito levantamento completo ulterior.

A *matriz predial* organizada por prédios e contendo nome do proprietário, designação cadastral e demais indicações de identificação, completada com o *registro cadastral*, fornece os elementos necessários aos lançamentos de impostos territorial e predial.

As escalas para os levantamentos cadastrais variam de 1/1 000 a 1/2 000 nas zonas urbanas e suburbanas a 1/5 000 nas zonas rurais que circundam as cidades e vilas.

Entre nós, em muitos municípios, são empregados os levantamentos topográficos regulares e nos extensos e adiantados, os processos de levantamento aerofotogramétrico.

Em traçados rodo e ferroviários, bem como em grandes obras hidráulicas, o último levantamento indicado é o preferido.

A triangulação de apoio é indispensável para um melhor e mais detalhado levantamento.

As cartas cadastrais devem ser periodicamente revistas, a fim de lhes serem introduzidas retificações resultantes de vendas e partilhas.

d) *Levantamento em escalas médias*. Em obras hidrelétricas e hidrográficas, para os projetos de barragens e usinas, no traçado e retificação de vias de comunicação, no traçado de linhas de alta tensão, plano de explorações mineiras e noutras obras, são necessárias as cartas em escalas médias, de 1/25 000 a 1/50 000.

O Serviço Geográfico do Exército, pelas suas seções de Cadastro e Fotogrametria, bem como a Diretoria de Cartografia Civil, do I.B.G.E., tem sido de grande utilidade ao engenheiro pelo muito que tem já feito em nosso País, nestas plantas, esperando-se que grandes zonas,

em muitos Estados da Federação, de maior densidade demográfica e valor econômico, serão levantadas com intensidade, pois a aerofotogrametria está sendo empregada em larga escala.

Os processos clássicos da topografia são empregados apenas no apoio *terrestre*, de grande importância, na *reambulação* e no enchimento de alguns detalhes invisíveis do alto, com alidades de prancheta e taquíômetros.

e) *Levantamentos em pequenas escalas.* Na maioria dos países, estes levantamentos, nas escalas de 1/100 000 a 1/200 000, estão já executados e é sobre eles que, na falta de cartas em escala média, o engenheiro efetua o estudo de seus planos gerais.

Os métodos utilizados na representação foram os clássicos, apoiados em triangulações geodésicas, que muito ficou a dever a intrepidez e arrojo dos observadores e calculadores; muitos vértices foram obtidos por intersecções.

Aqui, no Rio Grande do Sul, a antiga Carta Geral da República muito fez neste particular, com denodados engenheiros militares, valerosamente auxiliados por um corpo de sargentos dedicados. Os levantamentos em pequena escala tem bastante interesse nas zonas coloniais, onde a fotogrametria encontra um vasto campo de aplicação.

f) *Levantamento de reconhecimento.* No caso de grandes levantamentos, quando for necessário traçar um organograma de trabalho, deve-se proceder a um levantamento de reconhecimento prévio, expedito, com instrumental adequado tal como bússolas, eclímetros, clisímetros com escala estadimétrica, telémetro Zeiss (Teletop), prancheta com alidade e eclímetro conjugado (Gurley), binóculos com níveis e escalas, etc.

Com esta aparelhagem faz-se também o reconhecimento, isto é, os primeiros estudos, que orientarão no esboço orográfico em pequena escala ou nos reconhecimentos de vias de comunicação, obras hidráulicas ou outras em escalas médias ou mesmo grandes, conforme a extensão da zona reconhecida e a natureza do problema a estudar.

O método de levantamento expedito é o de caminhar e medir, isto é, determinar os azimutes ou rumos, as distâncias e as diferenças de nível relativamente aos percursos feitos durante o reconhecimento, efetuando-se diretamente no campo, numa prancheta, em papel quadriculado, a cores convencionais, todo o detalhe à vista com o traçado das curvas de nível, com dados obtidos do nivelamento aproximado feito com o altímetro, eclímetro ou clisímetro.

85 — Levantamento planimétrico comum, a teodolito

O levantamento topográfico ou geométrico de uma porção restrita da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura da terra, não

deve exceder em geral 8 000 hectares, ou seja uma superfície que corresponda, aproximadamente, a um círculo de 10 km de diâmetro.

Para levantamentos mais extensos é necessário o emprego dos levantamentos trigonométricos, baseados na implantação de uma *triangulação* prévia, feita com instrumental e métodos adequados de levantamento, cálculo e distribuição dos erros mais rigorosa.

Tanto num como no outro método, de levantamento, o teodolito é o instrumento empregado para medida dos ângulos. Estes deverão ser medidos, pelos menos, duas vezes, processo do ângulo duplo, nos levantamentos geométricos, e em maior número, pelo processo de repetição, nos levantamentos trigonométricos.

São três as fases de um levantamento planimétrico:

- 1) O levantamento a vista ou reconhecimento do terreno;
- 2) O levantamento de uma figura geométrica;
- 3) O levantamento de detalhes.

1) *Reconhecimento do terreno.* Antes de iniciar os trabalhos de levantamento, é indispensável fazer um reconhecimento do terreno, para determinar os pontos de estação do teodolito. Esses pontos serão marcados por piquetes. No croqui do reconhecimento traça-se a figura geométrica, isto é, o polígono irregular que não deverá ter grande número de lados e que servirá de base ao levantamento.

2) *Levantamento do polígono.* São também em número de três, os métodos usados para o levantamento do polígono topográfico de base do levantamento.

a) No método de caminhamento perimétrico, itinerário, percorre-se o contorno do polígono, medindo todos os ângulos e todos os lados.

Poder-se-ia traçar no papel um polígono semelhante ao do terreno deixando de medir um ângulo e dois lados adjacentes ou um lado e dois ângulos adjacentes; deve-se, entretanto, medir todos os elementos do polígono a fim de se poder fazer as verificações que podem ser as seguintes:

α) Desenhando o polígono, é preciso que ele feche sob um ângulo igual ao que foi medido no terreno. Essas condições são raramente satisfeitas para um polígono, ainda mesmo de dimensões muito grandes.

β) Pode-se, também, medir uma ou mais diagonais, assim como os ângulos de um triângulo pertencentes à decomposição do polígono.

γ) Pode-se verificar se a soma dos ângulos medidos é igual a tantas vezes 2 ângulos retos, quantos são os lados menos dois, isto é, $180^\circ (n - 2)$.

Se a diferença for muito pequena, pode-se distribuí-la por todos os ângulos, para corrigir os dados de campo.

A tolerância por ângulo é variável com o tipo de levantamento, cadastral ou rural, e com o instrumento empregado.

Nos levantamentos topográficos comuns, a tolerância por ângulo é de 15" a 1', de acordo com o terreno, e o erro de fechamento angular é ainda de: $15 \text{ a } 30'' \sqrt{n}$, para as poligonais principais e $1 \cdot \sqrt{n}$ para as poligonais secundárias, sendo n o número de ângulos medidos.

Quer desenhando o polígono a transferidor e régua, quer transformando as coordenadas polares medidas em coordenadas cartesianas, pelo método analítico, sempre haverá um certo erro de fechamento, isto é, a extremidade do último alinhamento não coincidirá com a origem.

No primeiro caso, a distribuição do erro é feita graficamente e no segundo analiticamente, como detalhamos a seguir.

Devemos acrescentar que o erro tolerável longitudinal Δl de uma poligonal, variável com o instrumental empregado, visibilidade, terreno, etc., pode ser calculado pelas fórmulas:

$$\Delta l_1 = 0,002 \sqrt{\Sigma l} + 0,0003 \cdot \Sigma l + 0,05 \text{ m} \dots \text{ em terreno plano;}$$

$$\Delta l_2 = 0,003 \sqrt{\Sigma l} + 0,0004 \cdot \Sigma l + 0,05 \text{ m} \dots \text{ em terreno médio;}$$

$$\Delta l_3 = 0,004 \sqrt{\Sigma l} + 0,0005 \cdot \Sigma l + 0,05 \text{ m} \dots \text{ em terreno acidentado.}$$

A tabela que se segue facilita o cálculo do erro de fechamento pelas fórmulas acima.

Perfmetro (Σl)	ERRO TOLERÁVEL LONGITUDINAL 1 EM:		
	Terreno plano (Δl_1)	Terreno médio (Δl_2)	Terreno acidentado (Δl_3)
200 m	0,14 m	0,17 m	0,21 m
400	0,20	0,27	0,33
600	0,28	0,36	0,45
800	0,35	0,45	0,56
1000	0,41	0,55	0,68
1200	0,48	0,63	0,79
1400	0,54	0,72	0,90
1600	0,61	0,81	1,01
1800	0,67	0,90	1,12
2000	0,74	0,98	1,23
2500	0,90	1,20	1,50
3000	1,06	1,41	1,77
3500	1,22	1,63	2,04
4000	1,38	1,84	2,34
4500	1,53	2,05	2,57
5000	1,69	2,26	2,83

O método do caminhamento tem o inconveniente de ser longo e de acumular os erros com facilidade. Entretanto, o seu emprego é muito freqüente, porque pode ser empregado em toda a espécie de terreno.

b) No método de decomposição em triângulos, o levantamento consiste em determinar os elementos necessários à resolução dos triângulos; assim, pode-se medir o comprimento de todos os lados da rede de triângulos em que se decompõe a superfície a levantar. A vantagem desse processo reside em evitar a medida de ângulos, porém, a medida de alinhamentos, além de ser muito demorada está sujeita a muitos erros. Esse método é empregado somente para avaliação de pequenas superfícies.

No processo chamado das *Radiações* ou das *Coordenadas polares* (Fig. 140) mede-se, de cada triângulo dois lados e o ângulo por eles compreendido, isto é, C-1, C-2, C-3, ... e os ângulos α , β , γ , ... o que exige que o polígono seja descoberto, é pouco exato.

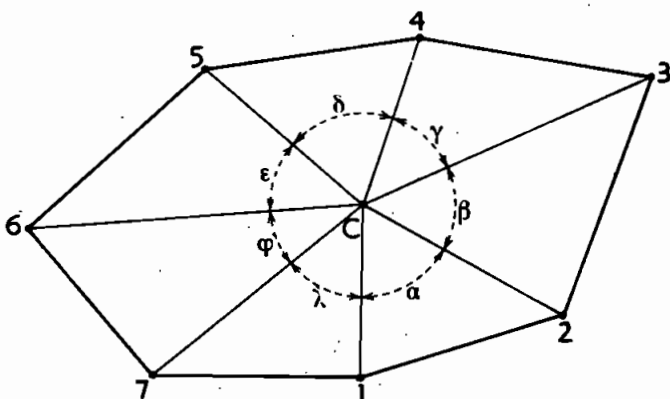


FIG. 140

c) No processo das *Intersecções* ou das *Coordenadas bipolares* mede-se de cada triângulo um lado e os ângulos adjacentes; os vértices dos polígonos ficam assim determinados pela intersecção de duas retas. Para maior exatidão escolhe-se uma base que pode ser um próprio lado do polígono ou, então, interior ao mesmo (Fig. 141). A exatidão do processo depende essencialmente da escolha da base; ela deve ser tal que as intersecções não se façam em ângulos nem muito agudos nem muito obtusos. Este processo é o único que se pode empregar quando alguns vértices do polígono são inacessíveis; apresenta, também, a vantagem da rapidez das operações, mas, exige que o polígono seja inteiramente descoberto.

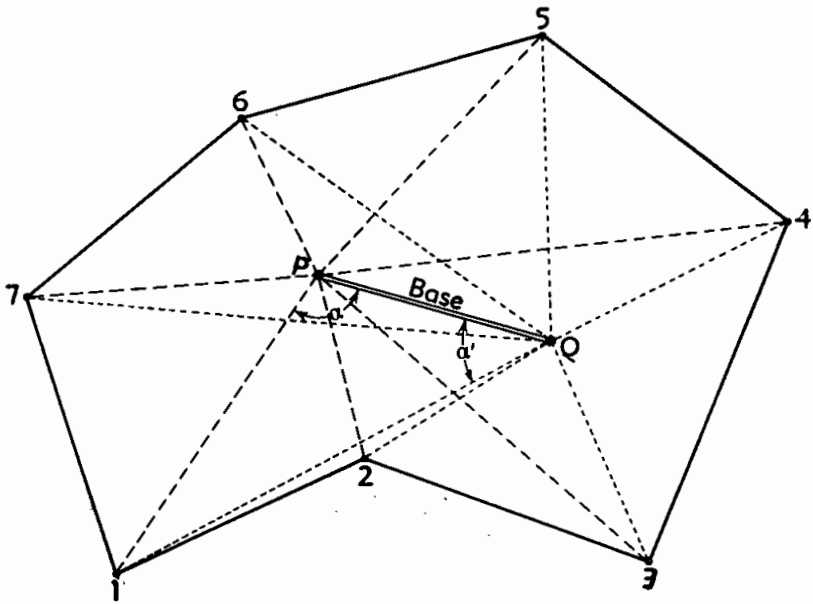


FIG. 141

d) No método das *coordenadas* pode-se determinar os vértices do polígono em relação a um sistema de eixos coordenados. Basta traçar no terreno um dos eixos, o das abscissas, por exemplo, e medir diretamente cada uma das ordenadas. Sempre que for possível deve-se esco-

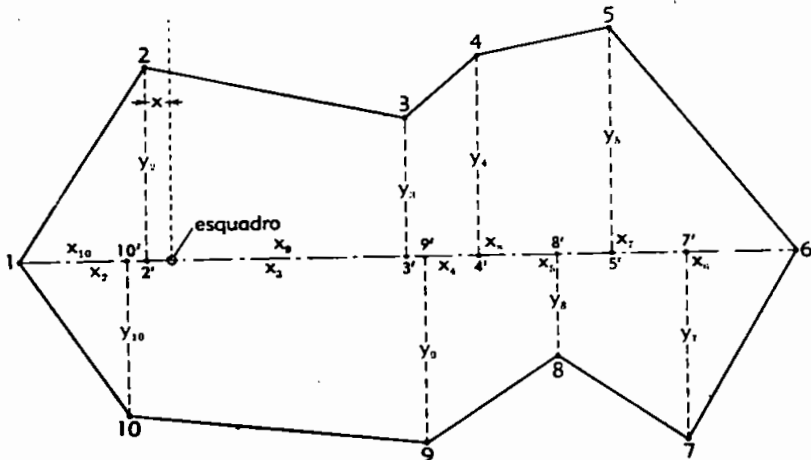


FIG. 142

lher para eixo uma das diagonais do polígono, dando preferência à maior (Fig. 142). Este processo é pouco preciso porque exige um grande número de medidas diretas no terreno; por esse motivo, costuma-se empregá-lo em operações que não demandem grande exatidão, tais como o levantamento de detalhes.

3) *Levantamento de detalhes.* O levantamento de detalhes liga-se ao do polígono topográfico por diferentes processos que entram nos métodos precedentes, seja por caminhamento, radiação, intersecção, coordenadas, etc. Dá-se quase sempre, preferência a este último método, principalmente quando se tem de levantar os limites de um terreno representado por linhas curvas.

Na (Fig. 143) damos um exemplo de levantamento de um curso d'água pelo processo de coordenadas.

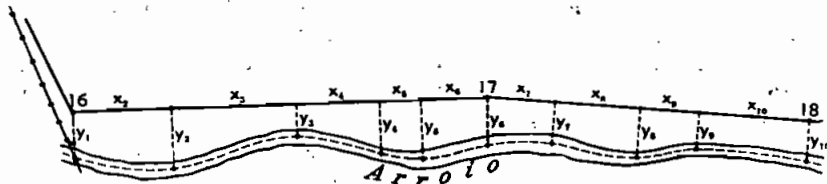


FIG. 143

É muito importante, tanto no levantamento da poligonal, como, principalmente, no dos detalhes, o croqui detalhado na caderneta de campo, no qual são inscritas todas as medidas com ordem e clareza. O operador que registra na caderneta os dados colhidos no terreno por qualquer dos processos expostos, deve, sempre, ter em vista que as suas anotações quase sempre passam às mãos dos auxiliares e desenhistas para os cálculos respectivos e desenho da planta.

4) *Levantamento de uma estrada — Generalidades.* O reconhecimento tem por finalidade, como vimos, esclarecer o topógrafo sobre a conformação topográfica da zona em que procede a estudos, com indicações suficientes, sobre as diferenças de nível a vencer, com o presumível comportamento planimétrico que se julga ser mais conveniente entre os pontos de ordem técnica, econômica e política.

Vem agora a exploração propriamente dita com o programa da escolha definitiva do traçado, das rampas aconselháveis, correntes e máximas, de acordo com a qualidade e importância do tráfego, raios mínimos comuns, necessidade ou não de desenvolvimento em ziguezague ou *serpentina*, com concordância de seus ramos, num e noutro sentido, por *péras* de raios excepcionais, escolha da posição da linha num e noutro flanco de um vale mais ou menos exposto ao sol e batido pelos ventos, respeitadas, aliás, as conveniências da boa e fácil comunicação entre povoados ribeirinhos, etc.

Para os serviços de exploração, são necessárias três turmas: uma de locação ou de traçado de uma diretriz, outra de nivelamento e contranivelamento, e uma terceira para o levantamento das faixas laterais

Dois são os processos indicados para este trabalho de topografia:

- a) o de exploração comum;
- b) o de exploração locada.

a) *A exploração comum*, consiste em implantar no terreno, a teodolito, uma *diretriz*, constituída de alinhamentos bastante longos, estaqueada de 20 em 20 metros, ou menos nos trechos acidentados e convenientemente nivelada. Faz-se, pois, um caminhamento estaqueado e nivelado, como no caso de levantamentos topográficos com curvas de nível.

Normalmente aos alinhamentos levantam-se secções transversais a clinômetro, nível e taqueômetro ou, ainda, faz-se irradiação em direcções convenientes dos pontos principais de mudança de declive do terreno, numa faixa lateral de 50 a 200 metros de largura, variável com a importância e necessidade do traçado.

É nessa faixa, cuja diretriz já obedeceu aproximadamente ao traçado definitivo das tangentes e curvas de uma estrada, que se vai estudá-la pormenorizadamente, jogando-a lateralmente onde necessário.

Os *PC* e *PT* (*pontos de curva* e *pontos de tangência*) das curvas e tangentes são amarrados por abscissas e ordenadas à linha diretriz ou alinhamentos de exploração, para sua melhor e mais fácil locação no terreno.

Com o traçado das curvas de nível da faixa levantada e estudo da linha definitiva da estrada, organiza-se o projeto completo, com perfis longitudinal, de áreas e volumes, secções transversais, obras de arte, e também, um estudo completo sobre custo de construção, conservação e economia de tráfego da estrada projetada.

Então, *volta-se novamente ao campo* e localiza-se o projeto pelas amarrações da planta, fazendo a *locação* da linha definitiva do projeto. *in loco*, com marcação de novas estacas, curvas tangentes, etc.

Este processo tem suas vantagens reais no estudo de rodovias modernas ou no traçado das ferrovias, onde as rampas fracas e os grandes raios não permitem uma adaptabilidade tão perfeita do corpo estradal às rugosidades do terreno; quando se loca a linha no campo, não há mais dúvidas sobre o vulto do movimento de terras, sobre trechos com determinadas rampas e curvas em pontos convenientes, etc.

Mas no traçado de rodovias de importância secundária, essas duas operações distintas, de exploração e locação posterior, podem ser condensadas numa só operação — a da *exploração locada*; para tal deve-se exigir, no entretanto, um bom e criterioso reconhecimento, ao longo do trecho a ligar por uma estrada.

b) *A exploração locada*, consiste em traçar logo no campo, com um bom teodolito ou trânsito a linha a construir, marcando as curvas e tangentes, como melhor se adaptem ao terreno, nivelar e contranivelar o trecho locado, levantar as secções transversais, de preferência a taqueômetro, e elaborar o projeto com as linhas do grede definitivas, bem como o orçamento do movimento de terras, obras de arte e de consolidação, de acordo com os estudos feitos no terreno.

Devemos dizer que a linha estudada ainda pode sofrer deslocamentos laterais ou *variantes*, tantas quantas pareçam necessárias para o melhor traçado.

Nesse último processo de exploração há mais facilidade em adaptar-se melhor o traçado ao terreno: escolher caminho à vista do terreno, parece mais fácil do que numa planta, às vezes falha de detalhes e com curvas de nível mal interpoladas.

86 - Triangulação topográfica

Em levantamentos topográficos extensos ou de maior precisão do que os obtidos por poligonação; é necessário implantar uma triangulação topográfica de apoio, isolada ou ligada a outra, geodésica de 3.^a ordem.

A orientação a seguir deverá ser a de criteriosa escolha dos vértices, que permita fácil e cômoda ligação com as dos poligonais simples, evitando figuras complexas.

A triangulação topográfica, considerada em relação à geodésica, é de 4.^a ordem, com lados de 4 a 5 km; os triângulos subseqüentes, com aproximadamente 2 km de lado, ainda comportam outros com 1 km, ou mesmo, 500 m de lado, e completam a triangulação topográfica.

Grande parte dos vértices pode ser escolhida sem ser necessário efetuar observações dos três ângulos dos triângulos, adotando métodos de determinação das coordenadas chamados de intersecção.

Na hipótese da triangulação topográfica se apoiar na geodésica, dois deverão ser os vértices comuns de apoio (Fig. 144).

As coordenadas retangulares dos vértices V_6 e V_7 , obtidas geodésicamente, permitem a determinação do comprimento l e azimute Az , por eles definido, seguindo-se o cálculo nos vértices topográficos 15, 16, ... 19.

Devem ser feitas as correções angulares relativas à triangulação topográfica.

Em trabalhos de extensão reduzida, não é conveniente apoiar diretamente a triangulação topográfica na geodésica, que exige maior trabalho.

Em trabalhos maiores, quando não seja possível o apoio direto como indicado acima pode apresentar-se a hipótese de um dos vértices

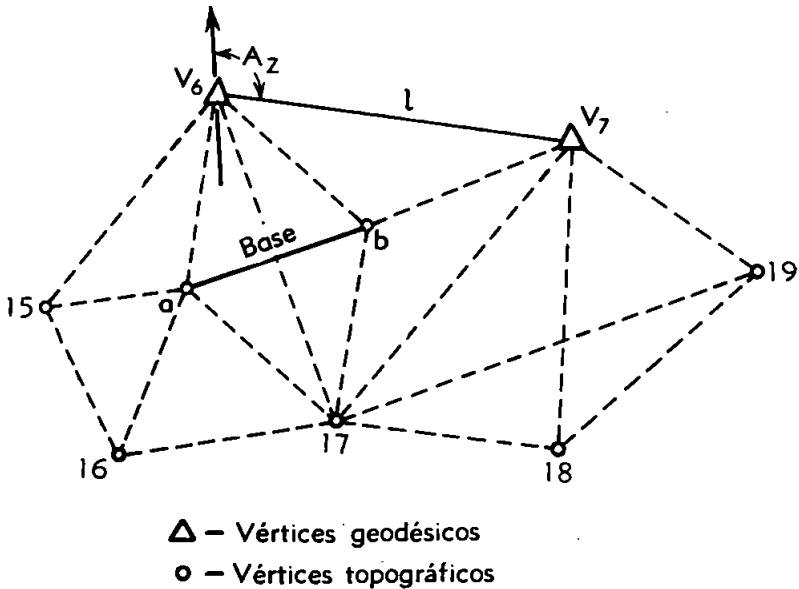


FIG. 144

da triangulação topográfica coincidir com um vértice geodésico (Fig. 145), donde se podem observar outros vértices geodésicos para a determinação do rumo de um dos lados.

Neste caso é necessário medir uma base. Outra hipótese é a que resulta de não existir nenhum vértice geodésico na zona de trabalho, mas dele serem visíveis alguns vértices (Fig. 146) tais como aconteceu no levantamento de um vale extenso onde se localiza a Escola de Agro-

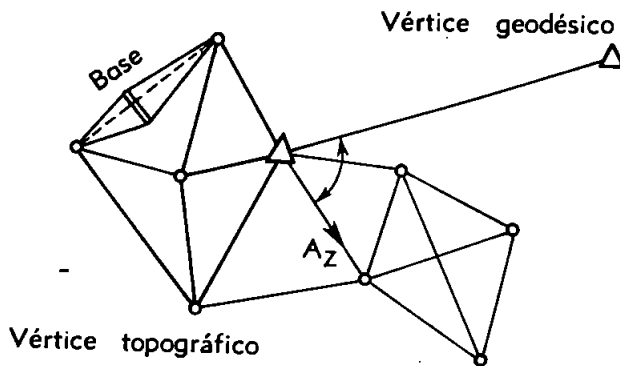


FIG. 145

nomia e Veterinária (E.A.V.) em Porto Alegre, levantamento feito com alunos da Escola de Engenharia, e cuja planta incluímos a seguir.

Neste caso, foi possível determinar as coordenadas de um vértice (Q) do quadrilátero de apoio (1-P4-Q) do levantamento feito, por visadas a 2 vértices do cadastro da cidade (A e B), com coordenadas conhecidas, com a medida de uma base (PQ) na várzea e, resolução de um quadrilátero no qual a diagonal coincidia com um lado (1-4) do levantamento feito por triangulação.

Finalmente, pode ainda suceder que não seja possível obter as coordenadas retangulares de um vértice, nem o rumo de um lado pela ligação à rede geodésica.

Deve-se pensar sempre na futura ligação do trabalho à planta geral da região e, para tal, a orientação deve ser referida ao Norte geográfico, por determinação astronômica, para facilitar a tarefa de ligação.

O procedimento a adotar deve ser o seguinte: tomar um vértice para origem (Fig. 147) com coordenadas (0,0) e determinar o azimute geográfico de um lado (Az) por observações astronômicas e, com o auxílio de uma carta ou uma bússola, com as correções da declinação magnética, achar o rumo inicial, que servirá para orientação dos outros lados da triangulação topográfica a fazer.

a) *Marcação dos vértices e sinalização.* Em zonas pouco extensas, a triangulação é constituída de uma cadeia de simples triângulos, que deve se aproximar, tanto quanto possível, da forma equilátera; em zonas mais extensas, os vértices principais, também chamados de 1.^a ordem (topográfica), devem ser figuras simples, isto é, quadriláteros, polígonos com vértice central e polígonos abertos com lados de 3 a 5 km de comprimento, todos com vértices que permitam a medida dos 3 ângulos de cada triângulo, que os constituíam.

Os triângulos menores, como dissemos, podem ser medidos pelo processo de intersecção, que torna mais rápida as operações.

O reconhecimento dos vértices deve ser feito de modo a permitir boa intervisibilidade, facilitando as leituras dos ângulos, e pode ser obtido com o auxílio de um bom pantômetro ou aparelho análogo. Faz-se um esquema com a medida dos ângulos obtidos e com as distâncias obtidas, também, por processos indiretos aproximados, e nele devem ser estudadas as melhores formas das figuras, procedendo-se em seguida ao reconhecimento definitivo e sinalização dos vértices.

A referida sinalização pode ser feita com sinas naturais, obtidos por postes de iluminação, pára-raios, chaminés, ... ou com marcos de alvenaria ou concreto, constituída de paralelepípedos (0,25m \times 0,25m de secção e 0,30m de altura) ou cilíndricos (0,20m de diâmetro e 0,30m de altura) (Fig. 148).

Na vertical do centro do sinal deve sempre colocar-se uma marca de bronze chumbada num maciço subterrâneo, ao lado do marco, para o caso de destruição do sinal e reconstituição.

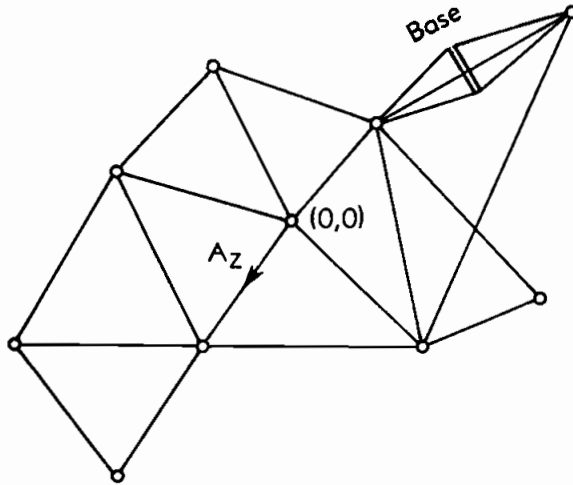
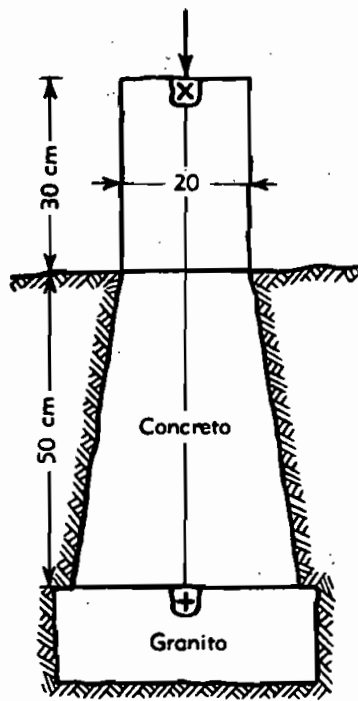


FIG. 147

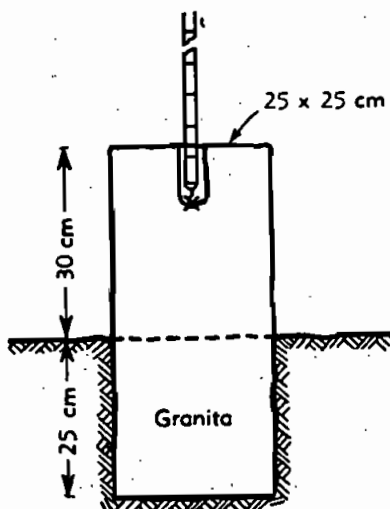
A mira para a observação é geralmente uma bandeirola de madeira que se introduz numa cavidade aberta no centro do marco, com 2 cruzetas superiores.

Nos ângulos verticais, pode-se visar as cruzetas ou o marco, a fim de evitar erros, principalmente, com grandes inclinações. Os sinais devem ser amarrados a objetos próximos para mais fácil localização.

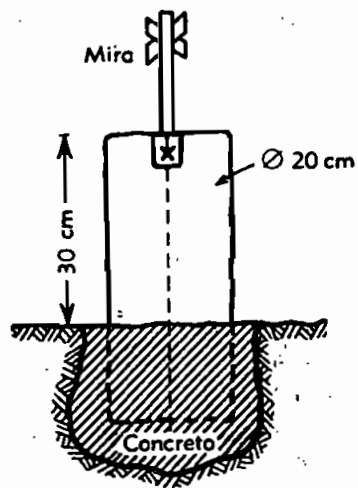
b) *Escolha e medida da base.* A importância de uma triangulação como processo mais preciso de levantamento do que a poligonação simples e, ainda mais, quando a mesma for isolada, está a exigir a medida de uma base com o mínimo erro, razão pela qual deve ser escolhido terreno adequado, com pequeno declive ou plano, para sua implantação, e de preferência ao longo de uma estrada ou caminho. Convém que o seu comprimento seja o maior possível, a fim de evitar erros resultantes da *amplificação*, embora com triângulos bem conformados. A ligação da base a um dos lados da triangulação é feita por um quadrilátero (Fig. 149) e a relação do comprimento da base para o referido lado deve ser de aproximadamente 1/3 para evitar ângulos muito agudos; quando o terreno não favorecer, pode a base ser quebrada, em lugar de reta, sendo esta



a)



b)



c)

FIG. 148

preferível. A medida, que é feita com fitas de aço, tipo Keuffel & Esser, auxiliado com dinamômetros nas extremidades para igualar as tensões, é dupla, de ida e de volta, para fornecer um resultado médio.

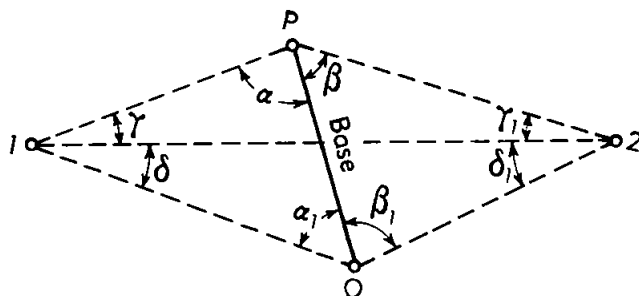


FIG. 149

Antes de medir os diversos trechos da base, são cravadas e niveladas, de 20 em 20 metros, ou de 24 em 24 m (fitas *invar*, geodésicas) estações de madeira, bem cravados e com lâminas fixadas nos topos para receberem os traços de referência de cada trenada; são feitas diversas leituras, de vante e de ré, nas escalas das fitas, com deslocamentos longitudinais, para maior aproximação do valor de cada trenada. No exercício prático a que aludimos (Fig. 146) é dada uma planilha da medida de uma base, com as correções de aferição, temperatura, inclinação e curvatura da fita usada.

A precisão relativa atingida com a aplicação das fitas de aço varia de 1/10 000 a 1/50 000 (1 cm e 0,2 cm em 100 m), o que é perfeitamente possível com cuidados nas medidas e indispensável aferição das fitas.

c) *Medida dos ângulos.* Os vértices, numa triangulação topográfica, estão situados a pequenas distâncias, e, portanto, sendo a falta de visibilidade somente ocasional ou momentânea, o método dos *giros do horizonte* oferece vantagens sobre o das *direções* ou das *combinações binárias*, e deve ser o preferido na medida dos ângulos, por ser mais rápido.

Os aparelhos empregados poderão ser os do tipo Wild T1 ou Zeiss IV nas triangulações de pequeno número de lados, e nas maiores os do tipo Wild T2, Zeiss II e Kern DK2.

O método das leituras *encruzadas*, com posição direta e invertida da luneta deve ser empregado para a eliminação dos erros nas leituras e maior aproximação das mesmas. Quanto às observações zenitais, deve indicar-se sempre a altura do aparelho, o sinal visado e a sua

altura, sendo conveniente, na caderneta de anotações, desenhar um esboço, para evitar possíveis enganos.

Desenvolveremos, na *Topografia de precisão*, o cálculo das coordenadas geográficas e retangulares correspondentes, bem como a resolução e distribuição dos erros num quadrilátero topográfico de precisão, com dedução das principais fórmulas.

§ 15 – Cálculo analítico das coordenadas e da área

87 – Cálculo das coordenadas

Consiste em locar os pontos principais do polígono levantado pelas suas coordenadas referidas a um sistema de eixos coordenados retangulares.

O eixo dos *Y* é dado, entre nós, pela direção da linha meridiana magnética ou verdadeira, conforme a referência dos rumos; a meridiana adotada tem o nome de *meridiana principal de referência*.

O eixo dos *X* que fica na direção E-W, denomina-se de *paralelo principal*.

a) *Ordenadas e abscissas*. A *ordenada* de um ponto é a distância desse ponto ao paralelo principal; a ordenada mede-se segundo a linha N-S; assim, (Fig. 150), as ordenadas dos pontos *P*, *P*₁, *P*₂, são respectivamente:

$$HP = OH' ; H_1P_1 = OH'_1 ; H_2P_2 = OH'_2$$

A *ordenada* de um ponto pode ser orientada para Norte ou Sul conforme a posição deste ponto em relação ao paralelo principal; as ordenadas Norte são positivas e as Sul, negativas.

A *abscissa* de um ponto é a distância desse ponto ao meridiano principal. A abscissa é ocidental ou oriental, conforme sua posição em relação ao meridiano principal. As abscissas orientais são consideradas positivas e as ocidentais negativas.

b) *Origem e fim de um alinhamento*. Os azimutes tomados na origem e no fim de um alinhamento são chamados recíprocos (o mesmo acontece com os rumos); os azimutes diferem entre si de 180°; os rumos são iguais, mas estão situados em quadrantes diametralmente opostos.

c) *Projeções dos alinhamentos*. A diferença algébrica obtida subtraindo da ordenada do fim de uma linha a ordenada da origem da mesma, será a projeção desta linha sobre o meridiano principal; do

mesmo modo a projeção duma linha sobre o paralelo principal, obter-se-ia fazendo a diferença algébrica entre as abscissas do fim e da origem dessa linha.

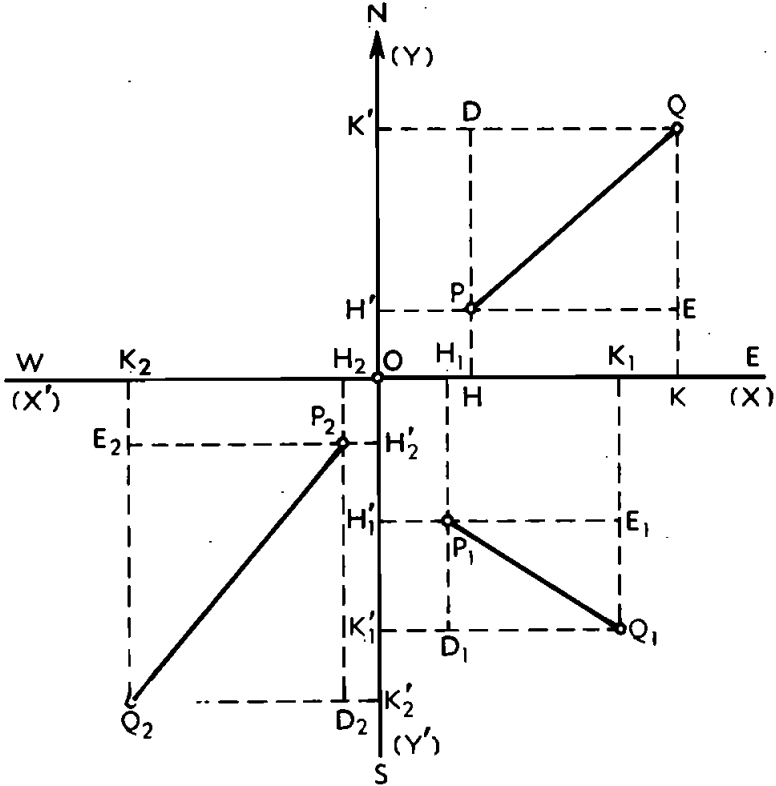


FIG. 150

Deve-se notar que o minuendo é a ordenada ou a abscissa do fim da linha e o subtraendo é a da origem, e que a subtração é algébrica.

Assim, a projeção de PQ sobre o meridiano de referência será:

$$\text{ordenada } y = KQ - HP = HD - HP = DP$$

sobre o paralelo será:

$$\text{abscissa } x = K'Q - H'P = K'Q - K'D = DQ$$

Se o alinhamento tivesse sido medido de Q para P , teríamos:
Projeção sobre o eixo XX' :

$$H'P - K'Q = H'P - H'E = -EP = -DQ$$

Projeção sobre o eixo YY' :

$$HP - KQ = KE - KQ = -EQ = -PD$$

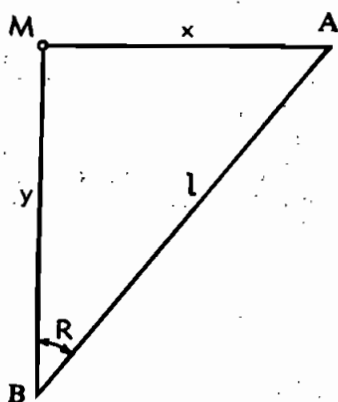


FIG. 151

Observa-se que qualquer linha como PQ , por exemplo, é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são as projeções sobre o meridiano ou paralelo desta linha. A diferença de ordenadas indica quanto para o norte ou para o sul o fim da linha está da origem. A projeção sobre a meridiana é positiva, quando a linha orienta-se para o norte; é negativa, quando a linha orienta-se para o sul.

d) *Fórmulas gerais de transformação.*

Seja AB (Fig. 151) um alinhamento cuja extensão é l e cujo ângulo do rumo é R . No triângulo AMB , em que AM é a direção da meridiana que passa por A , a projeção sobre a meridiana AM , e projeção sobre a paralela MB , são representadas respectivamente por y e x .

A figura dá:

$$y = l \cdot \cos R \quad (115)$$

$$x = l \cdot \sin R \quad (116)$$

Estas duas expressões permitem avaliar as projeções, quando são conhecidos o comprimento e o rumo do alinhamento. Deve-se ter especial cuidado em dar a y e x os seus sinais próprios; y será positivo quando o rumo for setentrional; e x será positivo quando o rumo for oriental.

Quando o rumo for meridiano y é $(-)$; e quando o rumo for ocidental, x é $(-)$.

Dados y e x calcula-se R pela fórmula:

$$\operatorname{tg} R = \frac{x}{y} \quad (117)$$

Avalia-se a extensão l por qualquer das fórmulas seguintes:

$$l = \frac{x}{\sin R} = \frac{y}{\cos R} \quad (118)$$

$$l = \sqrt{y^2 + x^2} \quad (119)$$

COORDENADAS DE ORIGEM
= OBSERVATÓRIO DO S. G. E. =
(SERVIÇO GEOGRÁFICO DO EXÉRCITO)

$$\begin{cases} \varphi_0 = -30^{\circ}02'16''.0 \\ \lambda_0 = +51^{\circ}13'18''.0 \\ X_0 = 0 \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

(PORTO ALEGRE)

QUADRILÁTERO TOPOGRÁFICO

ESCOLA DE AGRONOMIA E
VETERINÁRIA

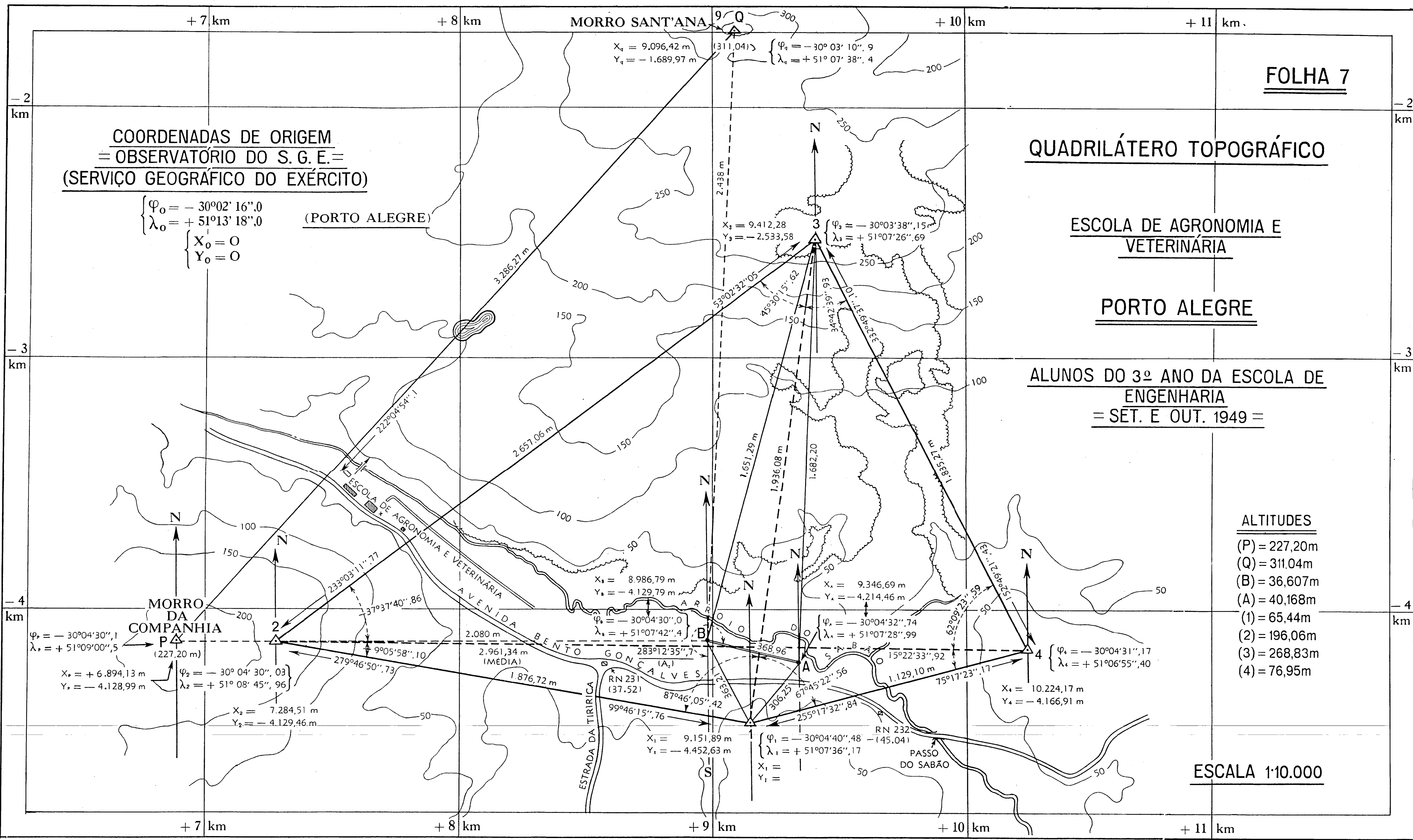
PORTO ALEGRE

ALUNOS DO 3º ANO DA ESCOLA DE
ENGENHARIA
= SÉT. E OUT. 1949 =

ALTITUDES

- (P) = 227,20m
- (Q) = 311,04m
- (B) = 36,607m
- (A) = 40,168m
- (1) = 65,44m
- (2) = 196,06m
- (3) = 268,83m
- (4) = 76,95m

ESCALA 1:10.000



A fórmula (117) dá não somente o valor angular do rumo, como também sua posição, desde que se atenda aos sinais das projeções x e y .

e) *Verificação do levantamento. Erro de fechamento.* Seja $ABCDE$ (Fig. 152) um polígono; OY o meridiano de referência e OX o paralelo principal. É óbvio que se os comprimentos e os rumos dos lados do polígono tiverem sido determinados com absoluta exatidão, o fim do último lado coincidirá com a origem do primeiro. Em tais condições diz-se que o polígono *fecha*. Como, porém, não há medidas isentas de erros, e os rumos são calculados em geral, com uma aproximação de 1 minuto, quando os ângulos são transportados da caderneta para

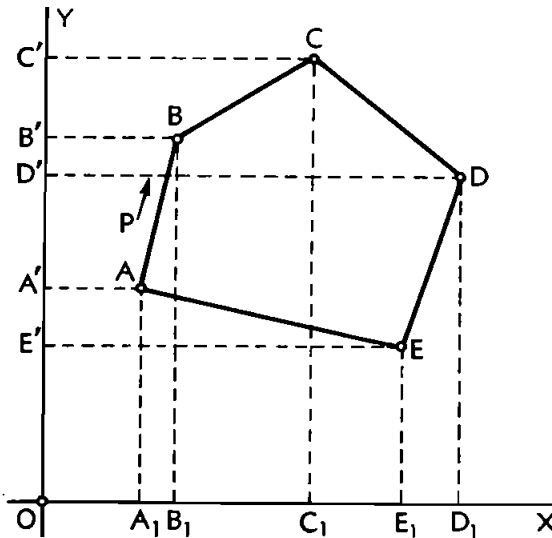


FIG. 152

o desenho, o polígono levantado nunca fecha. Esta condição está indicada na Fig. 153, onde AB é o primeiro lado e EA_1 o último. A distância AA_1 , do fim do último lado ao começo do primeiro, é o que se chama *erro total de fechamento*. A razão do erro total para a soma dos comprimentos de todos os lados representa o erro por unidade de comprimento, e é chamado *erro relativo de fechamento* ou *razão de erro*.

f) *Tolerância. Classe 1.* Precisão suficiente para muitos levantamentos expeditos, onde o valor da terra for baixo.

Erro angular de fechamento não deve exceder: $1'$ a $2' \sqrt{n}$, sendo n o número de ângulos lidos.

Erro linear total de fechamento não deve exceder de 1/1 000.

Classe 2. Precisão suficiente para levantamentos extensos e para locação de rodovias e ferrovias.

Erro angular de fechamento não deve exceder $1' \sqrt{n}$.

Erro linear de fechamento não deve exceder 1/3 000.

Classe 3. Precisão para levantamentos de cidades, precisão suficiente para implantação de obras de arte ou divisões.

Erro angular de fechamento de 15 a 30' \sqrt{n}

Erro linear de fechamento de 1/5 000 a 1/10 000.

g) *Condições de fechamento.* Em referência à Fig. 152, observa-se que a soma $E'C'$ das diferenças Norte ($E'A'$, $A'B'$, $B'C'$) é numericamente igual à soma $C'E'$ das diferenças Sul ($C'D'$, $D'E'$). Pode-se verificar também que a soma das diferenças Este é numericamente igual à soma das diferenças Oeste. Podemos, portanto, dizer que para um levantamento fechar, é necessário e suficiente que as somas algébricas das projeções sobre a meridiana e o paralelo sejam ambas nulas. Nestas condições, chamando S_y e S_x , respectivamente essas somas algébricas, as condições de fechamento são expressas pelas equações:

$$S_y = 0 \quad S_x = 0$$

h) *Fórmulas para o erro relativo de fechamento.* Como se disse acima, as condições $S_y = 0$ e $S_x = 0$ nunca são realizadas.

Na (Fig. 153), por exemplo, a soma das projeções Norte é:

$E'A'_1 + A'C' = E'C' - A'_1A'$, e as projeções Sul:

$C'D' + D'E' = -E'C'$. Neste caso:

$$S_y = E'C' - A'_1A' + (-E'C') = -A'_1A'$$

Observar-se-á que S_y é numericamente igual à projeção sobre o paralelo A_1H da linha de fechamento A_1A , mas que tem sinal contrário. Da mesma forma S_x é numericamente igual à projeção sobre a meridiana HA de A_1A , mas tem o sinal contrário, isto é, $S_x = -HA$. Deve-se ter presente que HA sendo ocidental, é negativo, portanto $-HA$ ou S_x é positivo. Isto é evidente da figura que mostra que a soma das diferenças E é maior do que a das diferenças O . Vê-se assim que a linha de fechamento é um lado cuja projeção sobre o paralelo é igual à soma algébrica de todas as projeções ou abscissas com o sinal trocado, e que a projeção sobre a meridiana é igual à soma algébrica de todas as ordenadas com o sinal trocado. O triângulo retângulo A_1HA , dá:

$$A_1A = \sqrt{A_1H^2 + HA^2} = \sqrt{S_y^2 + S_x^2}$$

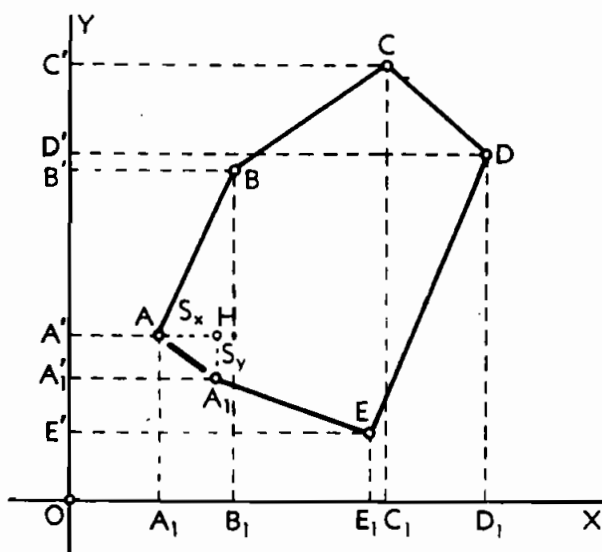


FIG. 153

Se a soma de todos os lados for representada por S_e e o erro relativo de fechamento por e , teremos:

$$e = \frac{A_1A}{S_e} = \frac{\sqrt{S_y^2 + S_x^2}}{S_e} = \sqrt{\frac{S_y^2 + S_x^2}{S_e^2}}$$

ou finalmente:

(120)

$$e = \sqrt{\left(\frac{S_y}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_x}{S_e}\right)^2}$$

A aplicação desta fórmula e as vantagens de a ter sob este aspecto serão indicadas adiante.

Verificação e correção do levantamento. Com o fim de transportar os dados da caderneta para o desenho do polígono é necessário ajustar os dados de campo, de forma que a planta feche, isto é, de modo que a soma algébrica das abscissas e ordenadas sejam ambas zero. O processo para realizar este ajuste consiste em aplicar certas correções às projeções e é chamado *correção do levantamento*, conquanto mais propriamente merecesse o nome de correção dos dados.

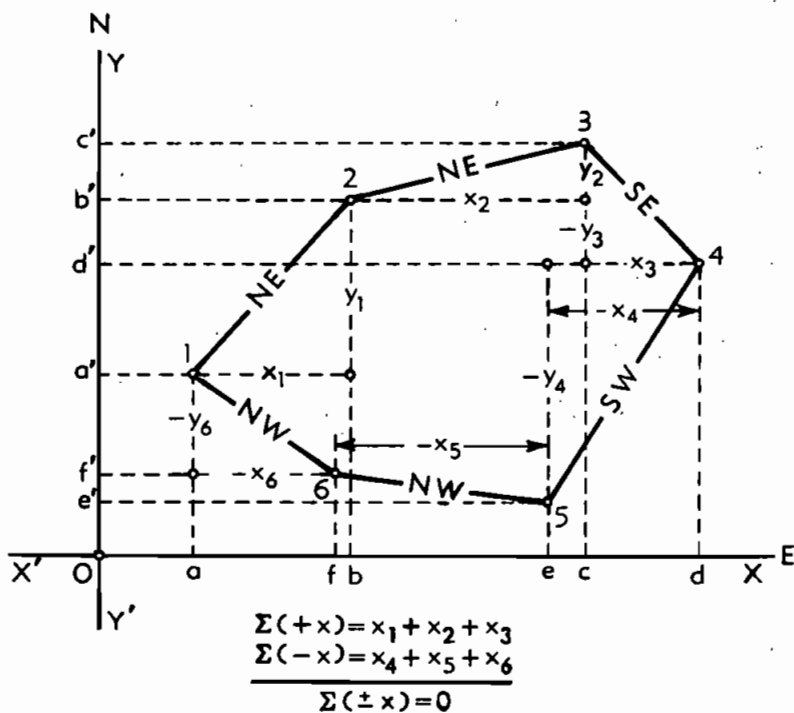


FIG. 154

88 - Compensação analítica da poligonal

a) *Correção das projeções.* Quando todos os lados forem medidos sob circunstâncias semelhantes e não há razão para pensar que certos lados estejam mais em erro do que outros, o erro total na soma das projeções de qualquer espécie é distribuído nas mesmas projeções dos vários lados por meio do princípio seguinte:

A soma algébrica de todas as projeções de qualquer espécie está para a soma de todos os lados assim como a correção a ser aplicada à projeção correspondente de qualquer lado, está para o comprimento desse lado.

Sejam S_y , S_x , S_l as somas algébricas das ordenadas, abscissas e dos lados respectivamente; l o comprimento de um lado, y a sua projeção sobre o eixo dos Y , x a sua projeção sobre o eixo dos X e C_y , C_x as correções a aplicar em y e x respectivamente.

De acordo com a regra enunciada, teremos:

$$\frac{S_y}{S_l} = \frac{C_y}{l}; \quad \frac{S_x}{S_l} = \frac{C_x}{l}$$

Donde derivam as fórmulas seguintes:

$$C_y = l \cdot \frac{S_y}{Sl} \quad (121)$$

$$C_x = l \cdot \frac{S_x}{Sl} \quad (122)$$

Em ambos os casos, as correções são subtraídas de y e x , respectivamente, levando-se em conta, porém, os sinais das projeções e das respectivas somas algébricas.

b) *Correção dos lados.* As correções feitas nas projeções alteram o comprimento dos lados do polígono; ora um lado qualquer é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são as projeções deste lado sobre os eixos.

Logo, para obter a correção basta tomar a raiz quadrada da soma dos quadrados das novas projeções corrigidas.

Chamando y' e x' as projeções corrigidas, o lado corrigido será:

$$l' = \sqrt{y'^2 + x'^2}$$

Pode-se empregar a fórmula aproximada seguinte, devida a Antônio Llano; para achar a correção do lado:

$$C_l = y \cdot \frac{S_y}{Sl} + x \cdot \frac{S_x}{Sl}$$

onde C_l é a correção que se deve subtrair algebricamente do comprimento do lado, y é a projeção sobre o meridiano, e x sobre o paralelo.

c) *Exemplo prático* (Levantamento a prancheta). Seja um quadrilátero $ABCD$, levantado a pranchetinha Gurley, alidade de pinulas, com distâncias medidas com telêmetro e percorrido no sentido do *caminhamento à direita*, deixando o quadrilátero à esquerda; o sentido indicado é o topográfico, isto é, sentido do caminhamento perimétrico, exterior à figura levantada, e não o da geometria analítica, de dentro para fora.

Os dados de campo são:

Vértices	Rumos	Distâncias
A	N 82°00' E	101 m
B	N 30°00' W	54 m
C	S 88°00' W	72 m
D	S 0°00' —	62 m

A seguir, damos a *planilha* (Sinopse) de cálculo, e após a justificativa de todos os valores nela contidos.

PLANILHA DE CÁLCULO

Lados	Rumos	Distâncias	LINHAS TRIGONOMÉTRICAS		PROJEÇÃO SOBRE O EIXO DOS X		PROJEÇÃO SOBRE O EIXO DOS Y	
			Sen.	Cos.	Este (+)	Oeste (-)	Norte (+)	Sul (-)
AB	N 82°00' E	$\frac{(100,82)}{101,00 \text{ m}}$	0,885	0,174	$\frac{(99,29)}{99,48}$		$\frac{(17,64)}{17,57}$	
		$\frac{(84,08)}{84,00 \text{ m}}$			$\frac{(27,10)}{27,00}$		$\frac{(46,79)}{46,79}$	
BC	N 30°00' W	$\frac{(72,14)}{72,14 \text{ m}}$	0,500	0,866				$\frac{(2,47)}{2,52}$
CD	S 88°00' W	$\frac{(61,96)}{62,00 \text{ m}}$	0,999	0,035				$\frac{(61,96)}{62,00}$
DA	S 0°00' —		0	1				
		289,00 m (= Sl)			99,48 - 98,93 + 0,55 (Sx)	08,93	64,33 - 64,52 - 0,19 (Sy)	64,52

Notas: Os valores entre parênteses na *planilha* são os corrigidos. Um exemplo completo, relativo a levantamento a *teodolito*, será dado no capítulo final sobre *exercícios práticos*.

1) *Correção das projeções no paralelo (abscissas)*. A soma de todos os lados é 289,00 m; a soma das diferenças leste é de + 99,48 m, e a soma das diferenças oeste é de - 98,93 m.

A soma algébrica dessas somas será:

$$S_x = 99,48 - 98,93 = + 0,55$$

Aplicando a fórmula do erro unitário:

$$\frac{S_x}{Sl} = \frac{+ 0,55}{289,00} = \sim 0,0019 \text{ por metro;}$$

e a fórmula de correção $\left(C_x = l \cdot \frac{S_x}{Sl} \right)$, teremos:

$$\text{Para o lado AB: } C_x = 101,00 \times 0,0019 = + 0,19$$

$$\text{Para o lado BC: } C_x = 54,00 \times 0,0019 = + 0,10$$

$$\text{Para o lado CD: } C_x = 72,00 \times 0,0019 = + 0,14$$

$$\text{Para o lado DA: } C_x = 62,00 \times 0,0019 = + 0,12$$

$$+ 0,55$$

Em virtude das aproximações, a soma das correções não é igual, em muitos casos, a S_y ; o erro residual verificado é, então, distribuído em partes proporcionais e, de preferência, nas diferenças correspondentes aos alinhamentos mais extensos.

Fazendo as correções, teremos:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Para } AB: & 99,48 - (+ 0,19) = & 99,29 \\
 \text{Para } BC: & - 27,00 - (+ 0,10) = & - 27,10 \\
 \text{Para } CD: & - 71,93 - (+ 0,14) = & - 72,07 \\
 \text{Para } DA: & 0 - (+ 0,12) = & - 0,12 \\
 & & \hline
 & & \dot{S}_x = 0
 \end{array}$$

2) *Correção das projeções na meridiana (ordenadas)*. A soma das diferenças Norte é de 64,33 m e a das diferenças Sul é de - 64,52 m. Então:

$$S_y = 64,33 - 64,52 = - 0,19$$

$$\frac{S_y}{Sl} = \frac{- 0,19}{289,00} = \sim 0,0007$$

Aplicando a fórmula de correção:

$$C_y = l \cdot \frac{S_y}{Sl}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Para } AB: & 101,00 \times (- 0,0007) = & - 0,07 \\
 \text{Para } BC: & 54,00 \times (- 0,0007) = & - 0,03 \\
 \text{Para } CD: & 72,00 \times (- 0,0007) = & - 0,05 \\
 \text{Para } DA: & 62,00 \times (- 0,0007) = & - 0,04 \\
 & & \hline
 & & - 0,19
 \end{array}$$

Fazendo as correções:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Para } AB: & 17,57 - (- 0,07) = & 17,64 \\
 \text{Para } BC: & 46,76 - (- 0,03) = & 46,79 \\
 \text{Para } CD: & - 2,52 - (- 0,05) = & + 2,47 \\
 \text{Para } DA: & - 62,00 - (- 0,04) = & + 61,96 \\
 & & \hline
 & & S_y = 0
 \end{array}$$

c) *Correção dos lados.* Aplicando a fórmula Llano

$$\left(C_i = y \cdot \frac{S_y}{Sl} + x \cdot \frac{S_x}{Sl} \right) \text{ e sendo } \frac{S_y}{Sl} = -0,0007 \text{ e } \frac{S_x}{Sl} = +0,0019,$$

teremos:

$$\text{Para } AB: C_i = 17,57 \cdot (-0,0007) + 99,48 \cdot 0,0019 = 0,177$$

$$\text{Para } BC: C_i = 46,76 \cdot (-0,0007) + (-27,00) \cdot 0,0019 = -0,084$$

$$\text{Para } CD: C_i = -2,52 \cdot (-0,0007) + (-71,93) \cdot 0,0019 = 0,136$$

$$\text{Para } DA: C_i = -62,00 \cdot (-0,0007) + 0 = +0,043$$

0

Fazendo as correções:

$$\text{Lado } AB \text{ corrigido} = 101,00 - (+0,18) = 100,82$$

$$\text{Lado } BC \text{ corrigido} = 54,00 - (-0,08) = 54,08$$

$$\text{Lado } CD \text{ corrigido} = 72,00 - (-0,14) = 72,14$$

$$\text{Lado } DA \text{ corrigido} = 62,00 - (+0,04) = 61,96$$

$$Sl = 289,00.$$

3) *Erro relativo de fechamento.* A fórmula relativa dá:

$$e = \sqrt{\left(\frac{S_y}{Sl}\right)^2 + \left(\frac{S_x}{Sl}\right)^2} \text{ dá } e = \sqrt{0,0007^2 + 0,0019^2} = \sqrt{0,000004} = 2 \text{ mm/metro.}$$

4) *Erro total de fechamento.*

$$E = e \cdot Sl = 2 \times 289 = 58 \text{ cm.}$$

89 - Cálculo analítico da área

a) *Determinação do vértice mais oriental.* Seja NS (Fig. 155) a meridiana que passa pelo vértice B do polígono ABCDEFGA.

A abscissa do vértice C é C_1C , que é igual à projeção de BC sobre XX' ; a abscissa do vértice D é D_1D que é igual a D_1C' (ou C_1C) mais $C'D$, isto é, a abscissa do vértice D é igual à do vértice anterior C mais a projeção do lado CD sobre XX' . A abscissa de E é E_1E , que é igual a E_1D' , ou D_1D menos $D'E$ ou $D_1D + (-D'E)$; isto é, a abscissa do vértice E é igual à do vértice anterior D mais a projeção do lado DE; e assim sucessivamente, de modo que podemos generalizar:

A abscissa do fim de um lado é igual à soma algébrica da abscissa da origem desse lado e da projeção do mesmo lado.

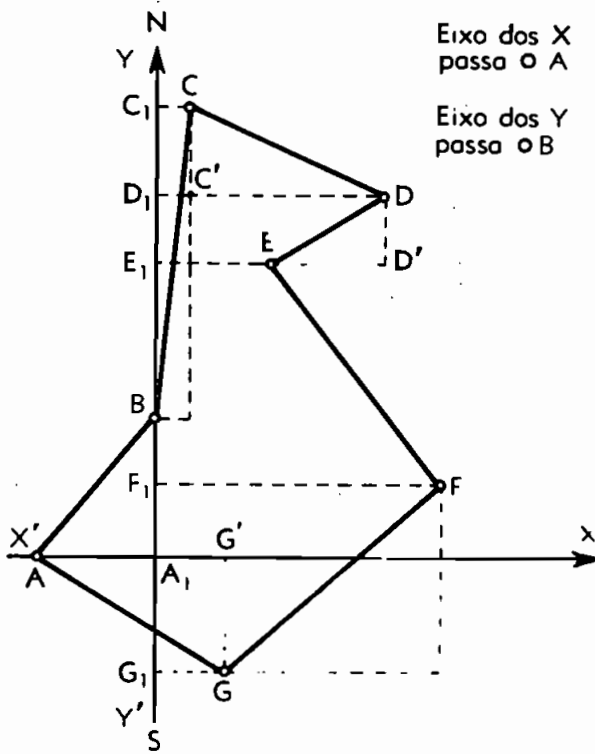


FIG. 155

A abscissa de A é $-A_1A$, a de G é G_1G ; teremos, portanto:

$$-A_1A = -(G'A - A_1G') = -(G'A - G_1G) = G_1G - G'A = G_1G + (AG')$$

Assim, para determinar as abscissas de todos os vértices, escreve-se abaixo da abscissa do segundo vértice C a projeção do segundo lado BC ; soma-se algebricamente a este valor a abscissa do lado seguinte CD , e obtém-se a abscissa do terceiro vértice; ao resultado soma-se algebricamente a projeção do lado seguinte DE , e obtém-se a abscissa do quarto vértice, e assim sucessivamente, até o último vértice.

A maior abscissa oriental é a do vértice F ; conclui-se que F é o vértice mais oriental do polígono.

b) *Abcissa simples e dupla de um lado.* A abscissa de uma linha é a abscissa do ponto médio desta linha.

No polígono da (Fig. 156), NS é o meridiano de referência, e K , L , S , P e Q os meios dos lados AB , BC , DE e EA , respectivamente; as abscissas destes lados são: K_1K , L_1L , S_1S , P_1P , Q_1Q .

A abscissa dupla de uma linha é o duplo valor da abscissa desta linha.

No trapézio BB_1CC_1 , LL_1 sendo paralela a C_1C e B_1B , tem-se:

$$LL_1 = \frac{B_1B + C_1C}{2}; \text{ donde } 2LL_1 = B_1B + C_1C$$

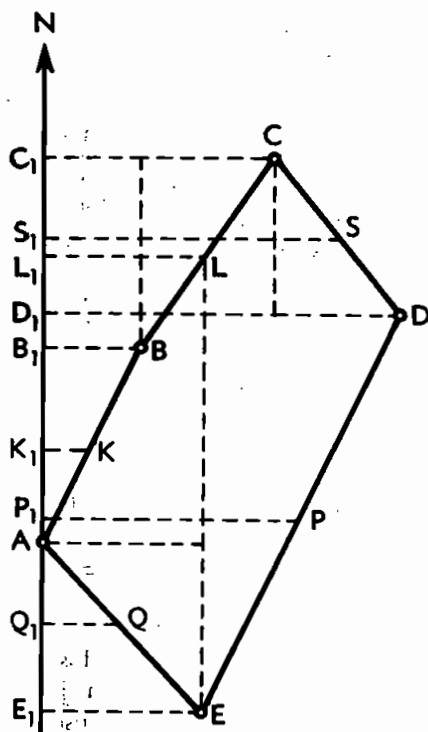


FIG. 156

Portanto, a abscissa dupla de BC é igual à soma das abscissas dos extremos desta linha. É evidente que este princípio pode ser generalizado.

Chamemos respectivamente x_1 , x_2 , x_3 , etc. as projeções de AB , BC , CD , etc., e X_1 , X_2 , etc., as abscissas dos vértices. Consideremos um

lado qualquer DE , por exemplo: a projeção é x_4 , e as abscissas das extremidades são X_3 e X_4 ; teremos, portanto:

$$X_4 = X_3 + x_4 \quad X_3 = X_2 + x_3$$

Somando membro a membro:

$$X_3 + X_4 = X_2 + X_3 + x_3 + x_4$$

Mas:

$$X_2 + X_3 = M_3 \quad \text{e} \quad X_3 + X_4 = M_4$$

Donde:

$$M_4 = M_3 + x_3 + x_4$$

Conclui-se a seguinte regra:

A abscissa dupla de um lado é igual à abscissa dupla do lado anterior, mais as projeções do lado anterior e do lado considerado.

Esta regra fornece um meio muito simples de avaliar as abscissas duplas dos lados. A abscissa dupla do lado AB é obviamente igual à projeção B_1B ou x_1 do mesmo lado. As outras abscissas duplas podem ser avaliadas dispondo-se o cálculo do modo indicado em seguida:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{abscissa dupla de } AB (M_1) \\ + x_1 \\ \frac{+ x_2}{M_2} &= \text{abscissa dupla de } BC \\ + x_2 \\ \frac{+ x_3}{M_3} &= \text{abscissa dupla de } CD \\ + x_3 \\ \frac{+ x_4}{M_4} &= \text{abscissa dupla de } DE \\ + x_4 \\ \frac{+ x_5}{M_5} &= \text{abscissa dupla de } EA (= -x_5) \end{aligned}$$

As adições são como de costume algébricas. Como verificação a abscissa dupla do último lado deve ser igual à projeção deste lado.

Exemplo:

Lados	PROJEÇÕES	
	E +	W -
AB	973	
BC	841	
CD		718
DE		79
EA		1 017
	+ 1 814	- 1 814

$$x_1 = 973 = \text{abscissa dupla de } AB (M_1)$$

$$x_1 = 973$$

$$x_2 = \frac{841}{2\ 787} = \text{abscissa dupla de } BC (M_2)$$

$$x_2 = 841$$

$$x_3 = \frac{718}{2\ 910} = \text{abscissa dupla de } CD (M_3)$$

$$x_3 = 718$$

$$x_4 = \frac{-79}{2\ 113} = \text{abscissa dupla de } DE (M_4)$$

$$x_4 = -79$$

$$x_5 = \frac{1\ 017}{1\ 017} = \text{abscissa dupla de } EA = -(-1\ 017) = +1\ 017$$

$$+ x_5 (M_5)$$

c) *Cálculo da área. Regra geral.* Seja (Fig. 157) NS um meridiano de referência que passa pelo vértice mais ocidental do polígono $ABCDE$. As linhas BB_1 , CC_1 , etc. são perpendiculares a NS . Supõe-se que o levantamento foi feito deixando o polígono à esquerda. As projeções sobre YY' , dos lados são, portanto, iguais respectivamente a $-(AB_1)$, (B_1C_1) , $-(D_1E_1)$ e $-(E_1A)$. O ponto médio de DE , sendo K , o comprimento de KK_1 é a abscissa de DE . A área de $ABCDEA$ é igual à soma das áreas dos trapézios BCC_1B_1 e CDD_1C_1 ; menos a

soma dos triângulos ABB_1 e EAE_1 . A área do último trapézio é igual a $K_1K \cdot D_1E_1$, ou, desprezando os sinais, igual a abscissa de DE multiplicada pela projeção sobre YY' do mesmo lado.

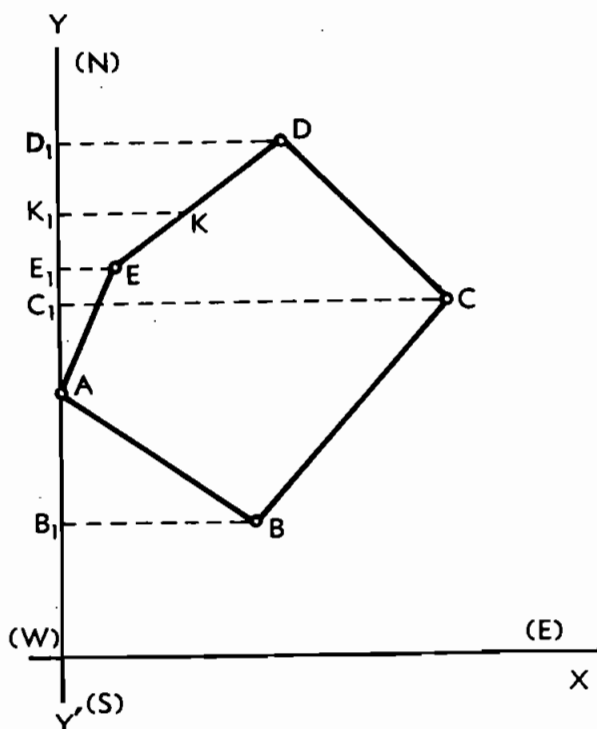


FIG. 157

É fácil ver que a mesma regra se aplica a todos os trapézios ímpares, tais como BCC_1B_1 , e aos triângulos ABB_1 e EAE_1 . A área de ABB_1 , por exemplo, é igual à altura AB_1 (projeção sobre YY') multiplicada por $\frac{1}{2} \cdot BB_1$ (abscissa de AB). Se a área do polígono for indicada por S , e as abscissas duplas AB_1, BC_1 , etc., por M_1, M_2 , etc., as abscissas desses lados serão $M_1/2, M_2/2$, etc. e teremos:

$$S = BCC_1B_1 + CDD_1C_1 - ABB_1 - EAE_1 - DEE_1D_1 = B_1C_1 \frac{M_2}{2} + C_1D_1 \cdot \frac{M_3}{2} - AB_1 \cdot \frac{M_1}{2} - E_1A \cdot \frac{M_5}{2} - D_1E_1 \cdot \frac{M_4}{2} = \frac{1}{2} (B_1C_1 \cdot M_2 + C_1D_1 \cdot M_3 - AB_1 M_1 - E_1A \cdot M_5 - D_1E \cdot M_4).$$

Como B_1C_1 , C_1D_1 , AB_1 , E_1A , etc., são as projeções sobre YY' dos lados, a quantidade dentro do parênteses é a soma algébrica dos produtos obtidos multiplicando a projeção de cada lado pela abscissa dupla do mesmo lado, e que conduz à seguinte regra geral:

Multiplica-se a projeção de cada lado pela abscissa dupla do mesmo, e dá-se os sinais aos produtos de acôrdo com os sinais dos fatores; a semi-soma algébrica desses produtos representa a área do polígono.

Os produtos a que nos referimos são chamados áreas duplas, visto que cada um d'êles representa o dôbro da área de um trapézio ou de um triângulo. O sinal do resultado pode ser negativo, mas, como isso indica simplesmente a posição relativa das superfícies com sinais positivos e negativos, pode ser desprezado e deve-se tomar a diferença aritmética entre a soma dos produtos positivos e negativos.

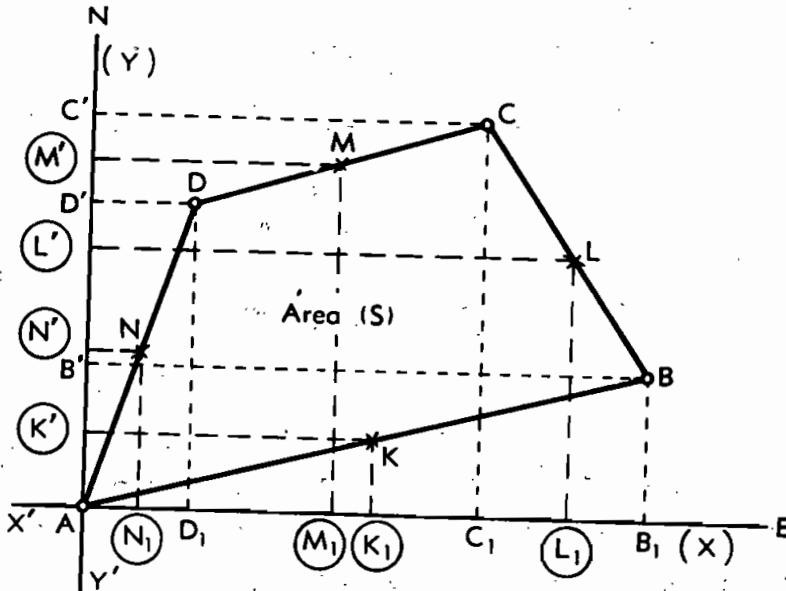


Fig. 158

d) *Posição do meridiano de referência.* Ao calcular as áreas não é necessário tomar o meridiano pelo vértice mais ocidental. As duplas abscissas podem ser avaliadas de qualquer vértice, contanto que se lhes dêem os sinais das ordenadas e das abscissas duplas. A vantagem de tomar pelo vértice o meridiano mais ocidental, está em que assim tôdas as abscissas duplas serão positivas.

e) *Construção da planta por meio das ordenadas e abscissas dos vértices. Coordenadas dos vértices.* Quando se faz passar um paralelo de referência por qualquer vértice de um polígono, *A* por exemplo, (Fig. 158) as ordenadas de todos os vértices em relação a esses paralelos são determinadas pela mesma regra geral usada para a determinação da abscissa dos vértices; isto é, se, partindo do vértice pelo qual passa o paralelo, os lados forem tomados na ordem em que foram percorridos, a ordenada do fim do primeiro lado, mais a projeção sobre *XX'* do segundo; e em geral a ordenada do fim de qualquer lado, é igual à ordenada da origem do mesmo lado, mais a projeção respectiva. Usualmente o meridiano e o paralelo de referência são tomados pelo mesmo vértice.

Cálculo das coordenadas e área do quadrilátero ABCDA
Continuação da planilha da Pág. 227

Proj. corrig. ($\pm x$)	Proj. corrig. ($\pm y$)	COORDENADAS		ΣX ($x_n + x_{n+1}$)	Duplas áreas $\Sigma X \cdot Y$	VERIFICAÇÃO	
		$\pm X$	$\pm Y$			ΣY $Y_n + Y_{n+1}$	Duplas áreas $\Sigma Y \cdot X$
+ 99,29	+ 17,64	0	0	+ 99,29	+1751,4756	+ 17,64	+ 1751,4756
- 27,10	+ 46,79	+ 99,29	+ 17,64	+171,48	+8023,5492	+ 82,07	2224,0970-
- 72,07	- 2,47	+ 72,19	+ 64,43	+ 72,31	+ 179,6057	+126,39	- 9108,9273
- 0,12	- 61,96	+ 0,12	+ 61,96	+ 0,12	- 7,4352	+ 61,96	- 7,4352
\pm 99,29 (x) = 0	\pm 64,43 $y = 0$	171,60 $x \cdot 2$ 343,20	+144,03 $x \cdot 2$ 288,06	+343,20 Verif.	+9775,0248 188,0409 +9588,9839	+288,06 Verif.	+ 1751,4756 -11340,4595 - 9588,9839

$$\text{Área (S)} = \frac{9588,9839}{2} = 4794,4920 \text{ m}^2$$

Exercício prático (continuação)

Determinar as coordenadas dos vértices do quadrilátero *ABCD*

Lados	Projeções sobre <i>YY'</i>	Projeções sobre <i>XX'</i>
AB	+ 17,64	+ 99,29
BC	+ 46,79	- 27,10
CD	- 2,47	- 72,07
DA	- 61,96	+ 0,12

ORDENADAS:

$$\begin{array}{r}
 \text{Projeção sobre } YY' \text{ de } AB = + 17,64 = \text{ordenada de } B \\
 \text{Projeção sobre } YY' \text{ de } BC = + 46,79 \\
 \hline
 + 64,43 = \text{ordenada de } C \\
 \text{Projeção sobre } YY' \text{ de } CD = - 2,47 \\
 \hline
 + 61,96 = \text{ordenada de } D \\
 \text{(Verificação) sobre } YY' \text{ de } DA = - 61,96 \\
 \hline
 0 = \text{ordenada de } A
 \end{array}$$

ABSCISSAS:

$$\begin{array}{r}
 \text{Projeção sobre } XX' \text{ de } AB = + 99,29 = \text{abscissa de } B \\
 \text{Projeção sobre } XX' \text{ de } BC = - 27,10 \\
 \hline
 + 72,19 = \text{abscissa de } C \\
 \text{Projeção sobre } XX' \text{ de } CD = - 72,07 \\
 \hline
 + 0,12 = \text{abscissa de } D \\
 \text{(Verificação) sobre } XX' \text{ de } DA = - 0,12 \\
 \hline
 0 = \text{abscissa de } A
 \end{array}$$

g) *Memento das fórmulas e regras do método analítico.*

1) *Notações.*

- | | |
|--|---|
| 1 – Comprimento de um lado: l ; | 8 – Erro total de fechamento: E ; |
| 2 – Rumo de um lado: R ; | 9 – Correção a fazer em y : C_y ; |
| 3 – Projeção sobre YY' dum lado: y ; | 10 – Correção a fazer em x : C_x ; |
| 4 – Projeção sobre XX' dum lado: x ; | 11 – Correção a fazer nos lados: Cl ; |
| 5 – Soma algébrica das projeções sobre Y : S_y ; | 12 – Abscissas duplas dos lados: M_1, M_2 , etc.; |
| 6 – Idem das projeções sobre X : S_x ; | 13 – Abscissas dos lados: X_1, X_2 , etc.; |
| 7 – Erro relativo de fechamento: e ; | 14 – Perímetro do polígono: Sl . |

2) *Fórmulas.*

$$y = l \cdot \cos R \quad (1) \quad x = l \cdot \operatorname{sen} R \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{x}{y} \quad (3) \quad l = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\text{Condições de fechamento:} \quad S_y = 0; \quad S_x = 0 \quad (5)$$

$$\text{Erro relativo de fechamento:} \quad e = \sqrt{\left(\frac{S_y}{S_l}\right)^2 + \left(\frac{S_x}{S_l}\right)^2} \quad (6)$$

Correção das diferenças:

$$C_y = l \cdot \frac{S_y}{S_l}; \quad C_x = l \cdot \frac{S_x}{S_l} \quad (7)$$

$$\text{Correção dos lados:} \quad Cl = y \cdot \frac{S_y}{S_l} + x \cdot \frac{S_x}{S_l} \quad (8)$$

$$\text{Abscissa dupla de um lado:} \quad M_n = M_{n-1} + x_{n-1} + x_n \quad (9)$$

3) *Regras.*

Condições de fechamento. Para um polígono fechar é necessário e suficiente que as somas algébricas das projeções sobre os eixos dos Y e dos X sejam ambas nulas.

Correção das projeções. A soma algébrica de todas as projeções de qualquer espécie está para a soma de todos os lados, assim como a correção a ser aplicada à projeção correspondente de qualquer lado está para o comprimento desse lado.

Determinação do vértice mais ocidental. A abscissa do fim de um lado é igual à soma algébrica da abscissa da origem desse lado e da projeção do mesmo.

Abscissa dupla (para cálculo da área). Multiplica-se a projeção de cada lado (y) pela abscissa dupla do mesmo, e dá-se os sinais aos produtos de acordo com os sinais dos fatores; a semi-soma algébrica desses produtos representa a área do polígono.

§ 16 – Outros processos de avaliação de áreas. Áreas extrapoligonais

O problema planimétrico de avaliação da área de um contorno poligonal fechado, além dos processos, já desenvolvidos, das coordenadas de Gauss e do clássico e idêntico *método analítico*, pode ser resolvido por outros processos, a saber:

– *Processo aritmético.* Consiste em medir diretamente no terreno todos os elementos necessários à divisão do polígono em figuras geomé-

tricas perfeitamente definidas (Fig. 159), cujas áreas são avaliadas pelas fórmulas da geometria elementar.

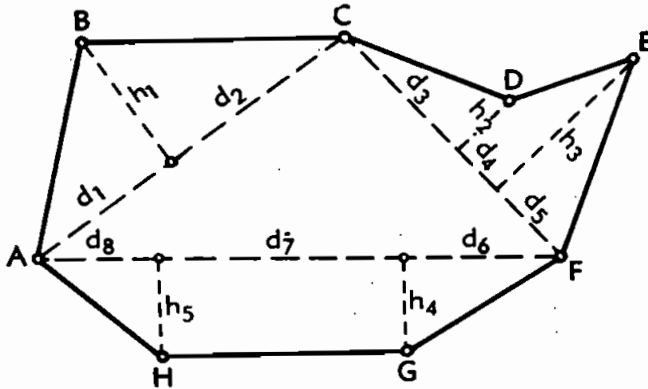


FIG. 159

A soma dessas áreas parciais representará a superfície total do polígono. Medindo os lados de um triângulo inscrito ABC , sua área será conhecida e não resta senão acrescentar as dos triângulos e trapézios complementares, para achar a superfície total.

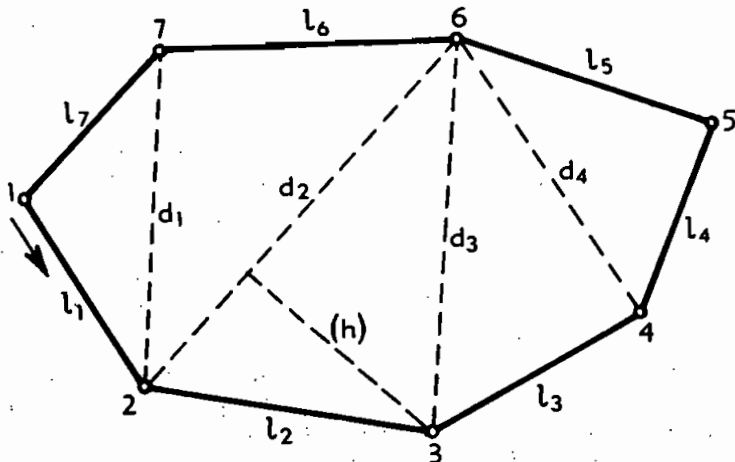


FIG. 160

— *Processo geométrico.* Mede-se no terreno somente os elementos indispensáveis para o desenho da planta, em escala reduzida, do polí-

gono levantado (Fig. 160). Faz-se em seguida a decomposição do polígono desenhado em figuras geométricas, nas quais se determinam os dados para o cálculo das áreas parciais; no triângulo 2-3-6, é mais fácil baixar de 3 uma normal sobre 2-6 e achar a área parcial pelo produto $d_2 \cdot h$.

2

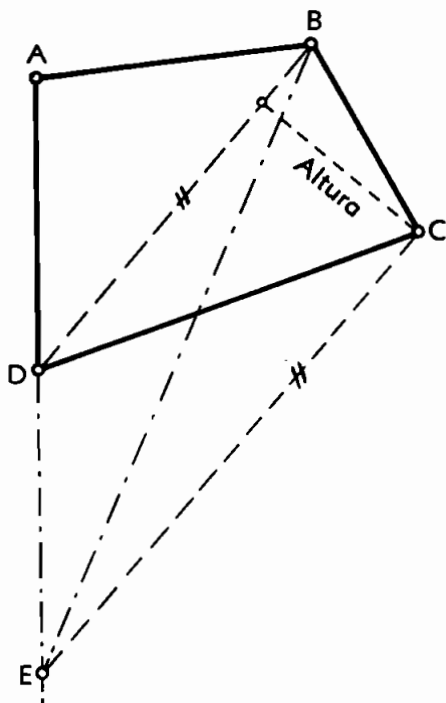


FIG. 161

os outros dois triângulos BDE e BCD são também equivalentes porque têm a mesma base e mesma altura.

Se a figura considerada fosse um polígono com mais de quatro lados, este, repetindo a construção geométrica precedente, se reduziria a ter sucessivamente um lado a menos até transformar-se em um triângulo de compensação A_1ED_1 (Fig. 162).

Pode-se, ainda, graficamente, modificar a base ou a altura desse triângulo.

Após ter encontrado o triângulo ABE como visto na (Fig. 163), se toma sobre AB prolongada, nova base dada AB_1 , liga-se B_1 a E e de B

Devemos considerar ainda os processos gráfico ou de redução, mecânico ou dos planímetros (integradores) e os relativos às áreas extrapoligonais.

90 - Métodos de equivalências gráficas

1) *Método de redução de Garceau (triângulo)*. Seja transformar a área do quadrilátero $ABCD$ (Fig. 161) na de um triângulo equivalente; se conduz por C a reta CE paralela à diagonal BD do quadrilátero, até o encontro E com um dos lados prolongado, por exemplo, AD ; o triângulo ABE resultante equivale em área ao quadrilátero dado.

De fato, as duas figuras consideradas têm o triângulo comum ABD , ao passo que

se traça BF paralela a B_1E ; o triângulo AB_1F é equivalente ao anterior ABE e, conseqüentemente, ao quadrilátero $ABCD$.

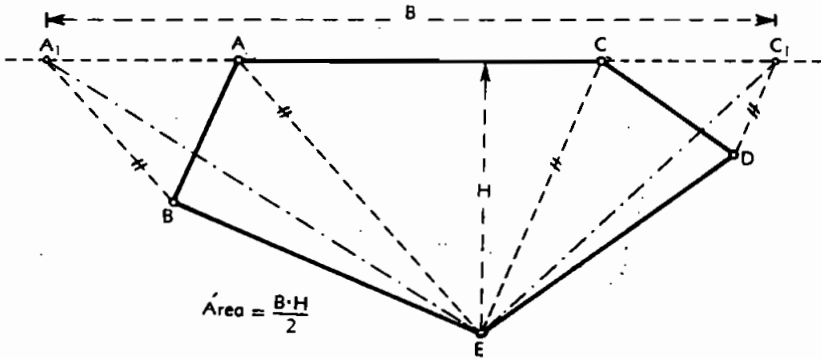


FIG. 162

Se em vez de nova base se quiser uma *altura* determinada, se processará do mesmo modo; assim, no caso da (Fig. 164), marcada a nova altura AC_1 , liga-se C_1 a B e por E traça-se uma paralela a BC_1 que encontra a reta AB prolongada em B_1 ; o triângulo resultante AB_1C_1 é, portanto, equivalente ao quadrilátero dado $ABCD$.

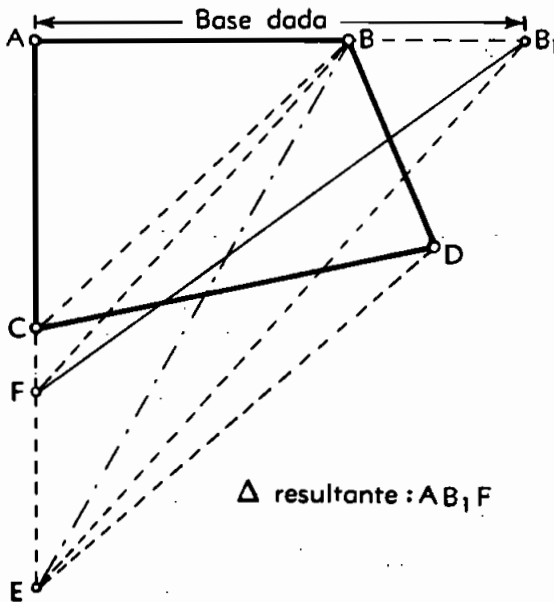


FIG. 163

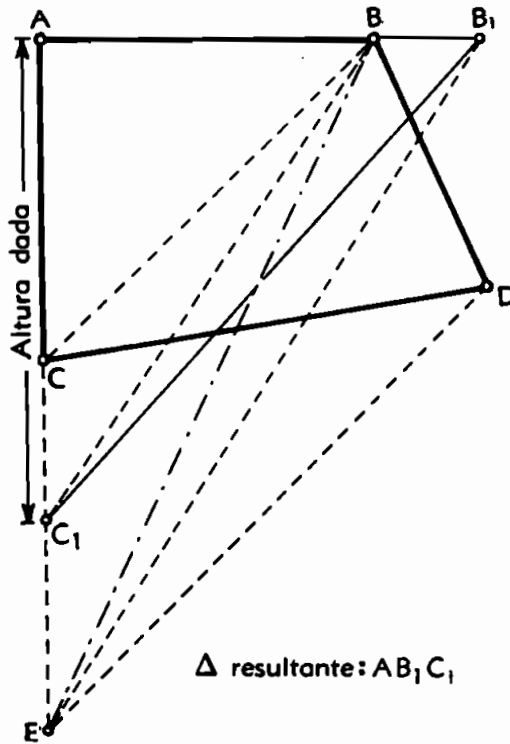


FIG. 164

2) Método de Collignon (trapézio).

a) *Princípio do método.* Este método consiste em transformar o polígono ou figura dada em um trapézio ou paralelogramo tendo um dos lados para base e por altura uma reta passando pelo centro da base e paralela a outro lado, como vemos no exemplo seguinte (Fig. 165).

O trapézio $BCFE$ é equivalente ao quadrilátero $ABCD$. De fato, escolhido para base o lado BC , e marcado seu centro C_1 traça-se pelo mesmo uma paralela C_1G ao lado CD até encontrar a reta B_1A_1 , prolongada, em G ; os pontos B_1 e A_1 são os meios dos outros lados do quadrilátero AB e AD .

Prolongando CD até F e traçando por B a paralela BE ao lado CD , se tem nas figuras consideradas uma parte comum BEA_1DC , restando provar a equivalência das áreas restantes de cada figura, ou seja, de $ABEA_1A$ e A_1FD .

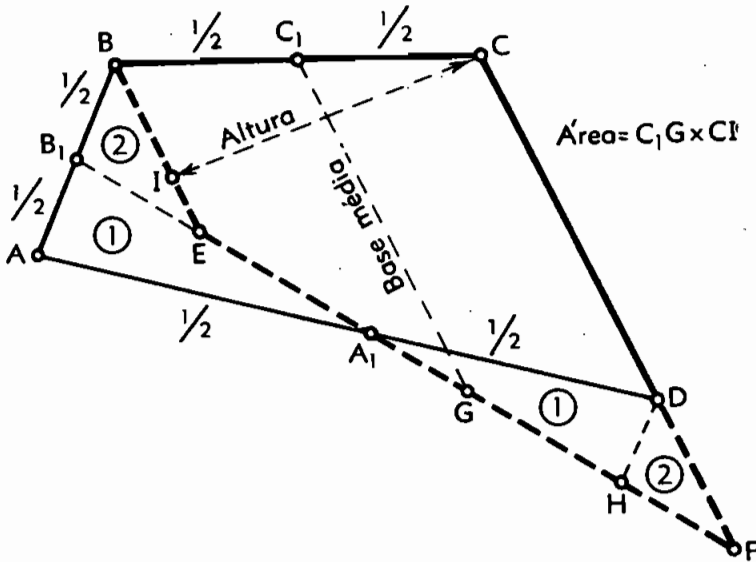


FIG. 165

Para tal deve-se traçar DH paralela ao lado AB . Os triângulos AB_1A_1 e DHA_1 (1) e os adjacentes BB_1E e DHF (2) são iguais pelo paralelismo e igualdade do comprimento dos lados.

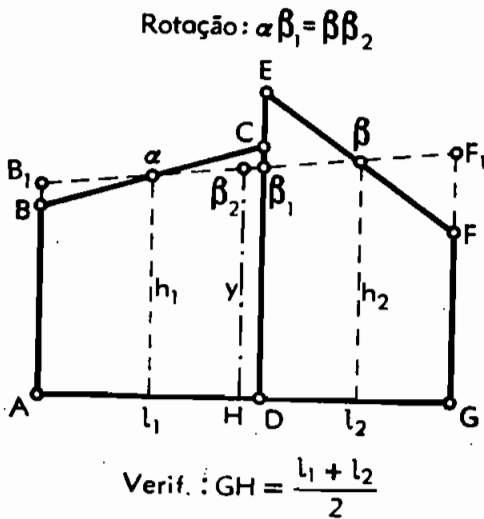


FIG. 166

A área do quadrilátero dado $ABCD$ equivalente à do trapézio $BCDFE$ é assim igual a $CI \cdot C_1G$.

A aplicação deste método apresenta ainda a grande vantagem de nada perder de sua simplicidade, mesmo quando for grande o número de lados do contorno poligonal.

A seguir serão dados dois exemplos com a respectiva justificação teórica.

b) *Demonstração e exemplos. Primeiro caso — Transformar a área de dois trapézios na de um retângulo equivalente.*

1) *Solução gráfica.* Sejam (Fig. 166) dois trapézios adjacentes $ABCD$ e $DEFG$, de bases l_1 e l_2 e alturas médias h_1 e h_2 a transformar num retângulo de base AG ($l_1 + l_2$) e altura y a determinar.

Para tal, tomam-se os meios α e β dos lados BC e EF e liga-se α a β que corta DE no ponto β_1 ; transporta-se sobre a reta $\alpha\beta$ um comprimento $\alpha\beta_2 = \beta\beta_1$ ou o que é o mesmo, $\beta\beta_2 = \alpha\beta_1$.

O segmento β_2H (y) será a altura do retângulo de base AG e passará pelo centro de $l_1 + l_2$, o que é importante como verificação.

2) *Justificativa teórica.* Pelas anotações da figura deve-se ter:

$$(l_1 + l_2)y = l_1 \cdot h_1 + l_2 \cdot h_2$$

ou que

$$y = \frac{l_1 \cdot h_1 + l_2 \cdot h_2}{l_1 + l_2} \quad (123)$$

Os triângulos semelhantes $\alpha\alpha_1\beta_2$ e $\beta_2\beta_3\beta$ dão:

$$\frac{\alpha\alpha_1}{\alpha_1\beta_2} = \frac{\beta\beta_2}{\beta_2\beta_3} \quad \text{ou} \quad \frac{h_1 - y}{\frac{1}{2} l_2} = \frac{y - h_2}{\frac{1}{2} l_1}$$

Também:

$$(h_1 - y)l_1 = (y - h_2)l_2$$

ainda:

$$h_1 \cdot l_1 - y \cdot l_1 = y \cdot l_2 - h_2 l_2$$

e finalmente:

$$y = \frac{l_1 h_1 + l_2 h_2}{l_1 + l_2} \quad (123 \text{ bis})$$

3) *Segundo caso* — Transformar a área de um trapézio e de um triângulo adjacente na de um retângulo equivalente.

1) *Solução gráfica.* Consideremos (Fig. 167) com efeito, um trapézio $ABCD$ e um triângulo adjacente BDE .

Pelo ponto E levanta-se a paralela EF ao eixo BD ; decompõe-se assim a figura nos trapézios $ABCD$ e $BDEF$ dos quais tem-se de subtrair o triângulo excedente BEF . Isto feito, tomam-se os meios α , β e γ dos lados CD , DE e BE . Liga-se α a β que corta BD em β_1 ; gira-se $\alpha\beta_1$, como dito anteriormente, marcando $\beta\beta_2 = \alpha\beta_1$.

A nova direção $\beta_2\gamma$ encontra EF prolongado em δ e toma-se, a partir de β_2 e *para o exterior*, um comprimento $\beta_2\delta_1 = \gamma\delta$; assim o triângulo BEF fica subtraído e não somado.

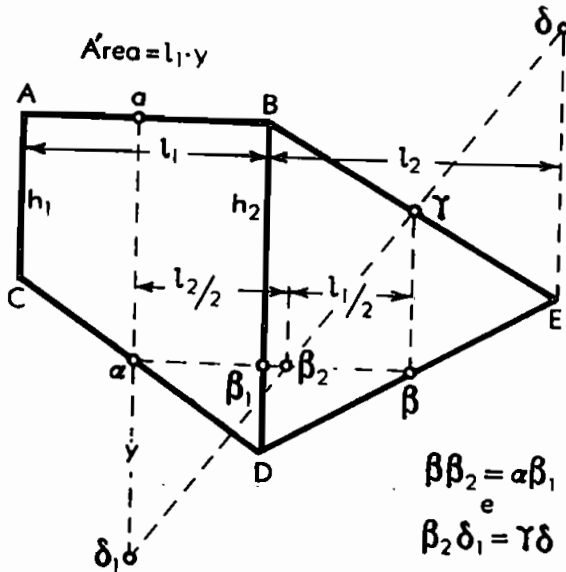


FIG. 167

Como *verificação*, a paralela ao eixo conduzida por δ_1 deve cortar AB em seu ponto médio a ; resulta que na prática não é preciso encontrar o ponto δ e não se tem senão de traçar a paralela $\alpha\delta_1$, que dá, por seu encontro com $\gamma\beta_2$ prolongada, o ponto δ_1 .

O comprimento $\alpha\delta_1$ (y) representa a altura do retângulo equivalente às secções dadas e a base do mesmo é AB (l_1).

Como esta base é conhecida basta medir y para se conhecer a área por um simples produto.

2) *Justificativa teórica*. Pelas anotações da figura, temos:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot l_1 + \frac{l_2 \cdot h_2}{2} = y \cdot l_1$$

Donde:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(h_1 + h_2 + \frac{l_2 \cdot h_2}{l_1} \right) \quad (124)$$

Os triângulos semelhantes $\alpha\beta_2\delta_1$ e $\beta_2\gamma\beta$ permitem escrever:

$$y - \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{h_2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2y - h_1 - h_2}{2} = \frac{h_2}{2}$$

$$\frac{l_2}{2} = \frac{l_1}{2} \quad \frac{2y - h_1 - h_2}{l_2} = \frac{h_2}{l_1}$$

e

$$(2y - h_1 - h_2) l_1 = l_2 h_2$$

Ainda

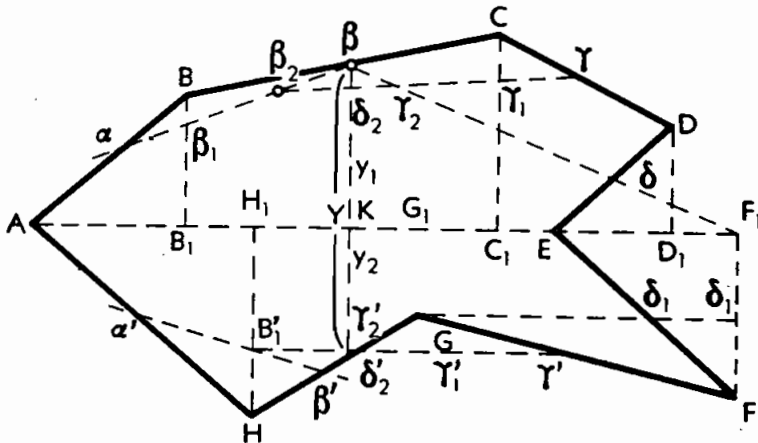
$$2y l_1 = l_2 h_2 + l_1 h_1 + l_1 h_2$$

e finalmente

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(h_1 + h_2 + \frac{l_2 \cdot h_2}{l_1} \right) \quad (124 \text{ bis})$$

Conhecidas estas duas construções, se torna muito fácil transformar um polígono qualquer em um trapézio ou retângulo equivalente.

3) *Exercício prático.* Suponhamos que se trata da área do polígono $ABCDEFGH$ (Fig. 168). Escolhida para linha de base a diagonal AE e traçados os pontos médios α, β, γ e δ na parte superior e $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$



$$\text{Área} = AE \cdot Y$$

FIG. 168

e δ' na parte inferior, traçadas as ordenadas BB_1, CC_1, DD_1 , etc. e feitas as ligações como indicado nos casos precedentes se encontram, final-

mente, os segmentos y_1 e y_2 que devem passar pelo ponto médio K da diagonal AE . A área S do polígono dado será:

$$S = AE (y_1 + y_2) = AE \cdot y \quad (125)$$

91 - Métodos mecânicos. Planímetros

Os métodos que podem ser chamados de mecânicos são baseados no emprego de *instrumentos*, servindo para medir as áreas das figuras traçadas no desenho.

Entre estes destacam-se os *planímetros* ou *integradores*, em primeiro lugar, o *vidro quadriculado* e a *balança de precisão*. A precisão desses instrumentos é muito variável conforme a extensão da superfície a avaliar; desce a menos de 1/100 para as pequenas superfícies, e atinge a 1/1 000 nas superfícies de 200 cm², ou superiores, no desenho.

a) O processo muito simples da *quadricula*, em vidro ou papel transparente, milimetrado ou duplo-milimetrado permite contar o número de quadrados e de frações, com rapidez e relativa exatidão.

O processo das *pesadas* ou da *balança*, consiste em gravar e recortar numa folha de alumínio, latão fino, ou mesmo cartolina uniforme a superfície em escala a avaliar, pesá-la com precisão e compará-la com o peso, no mesmo material, de outra superfície padrão, inteira; dessa relação, surgirá a área aproximada, e que com todo o cuidado pode servir de 1.^a aproximação, no estudo dos quinhões em divisão de terras.

b) *Planímetro*. O uso do *planímetro* para a medida da superfície duma figura de forma irregular, é não só aconselhável para a verificação expedita de cálculos de área feitos por qualquer um dos outros processos, como também pode ser empregado com vantagem em avaliações de quaisquer superfícies, dando muito boa aproximação, desde que se trabalhe, é claro, com cuidado e com a observação dos preceitos aconselhados. Tais medidas não carecem mesmo de rigorosa exatidão, bastando uma tolerância variável de 1:1 000.

Os planímetros são compostos essencialmente de duas hastes articuladas, sendo que a extremidade de uma delas fixa-se num ponto, chamado *pólo*; ao seu redor pode girar também o aparelho; na segunda haste e na extremidade oposta à articulação há uma ponta, chamada *traçador*, que percorre o perímetro das áreas a avaliar. Nesta segunda haste, ao lado da articulação, liga-se rigidamente um tambor graduado em sua periferia e cujo eixo está em comunicação com um contador de voltas; dá-se a este tambor graduado o nome de *integrante*.

Duas são as espécies de planímetros em uso; aqueles em que existe um pólo fixo, ao redor do qual gira o instrumento, dito portanto *polar*, e aquele em que o pólo é deslocado para o infinito, o que equivale a dizer que todo o aparelho segue uma direção retilínea, dito planímetro *linear* volante. Sob o ponto de vista especial que interessa à topografia, o planímetro *polar* satisfaz a todas as necessidades, sendo

que o *linear* só é de vantagem na determinação das áreas de diagramas ou de figuras de demasiado comprimento em relação à largura.

O planímetro polar, inventado por Amsler, de Schaffhausen e o de disco rotativo, também polar, por Coradi, de Zürich, são os tipos correntemente empregados em trabalhos de topografia e de estradas.

Na (Fig. 169) damos um tipo de planímetro polar; vê-se o pólo *P*, o braço traçador *D* articulado em *G* com o braço polar *E*, o tambor integrante *I* e o traçador *F*.

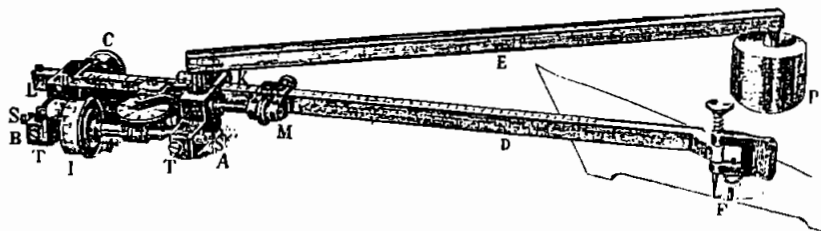


FIG. 169

Na (Fig. 170) vemos o planímetro polar de disco, de Amsler. O instrumento gira ao redor de um pólo fixo, ligado a uma articulação esférica montada em uma placa redonda colocada na mesa de desenho. Quando se percorre o contorno do desenho, uma roda de pinhão cônico corre com seu bordo sobre a superfície do papel e transmite seus movimentos a um pequeno pinhão fixado ao eixo de um disco horizontal coberto de papel especial.

O tambor integrante ou roda de medição se move sobre este disco de papel. Sua ação é por conseguinte independente da condição da superfície do desenho.

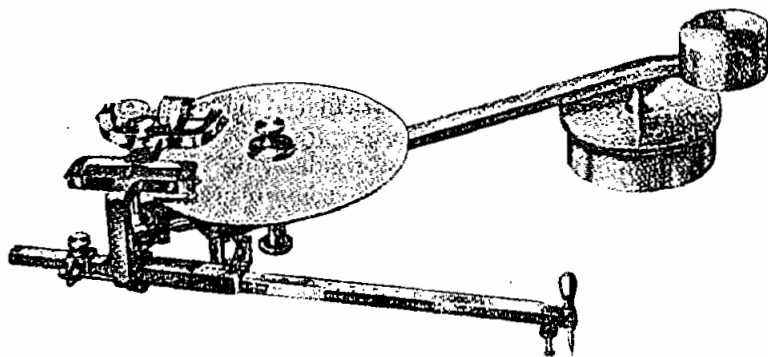


FIG. 170

Para utilizar eficientemente um planímetro, devemos observar, em primeiro lugar, que as medidas sejam efetuadas numa superfície plana e, em seguida, que os órgãos constituintes do aparelho estejam dispostos de forma a dar indicações as mais exatas possíveis; assim deveremos observar a regra seguinte: colocada a ponta do traçador aproximadamente no centro da figura cuja área queremos conhecer, os dois braços articulados, o polar e o traçador, deverão fazer entre si um ângulo mais ou menos reto.

Tem-se certeza, desta forma, de que o traçador contornará a figura facilmente. Para ponto de partida se deverá tomar aquele que mais se aproxime da circunferência de raio inicial (pólo-centro da figura).

Nessa posição, os zeros do quadrante também devem ser ajustados; o percurso deve ser feito cuidadosamente, com o auxílio de uma régua ou esquadro nos trechos retos e com mão firme nos curvilíneos.

Faz-se então, sobre o quadrante do contador e sobre a periferia do tambor, a leitura final. Consta de 4 algarismos, tais como 8627; o primeiro — 8 — é lido sobre o quadrante, o segundo — 6 — é o número correspondente a uma grande divisão da periferia do tambor, o terceiro — 2 — é o número de divisões inteiras compreendidas entre o traço anterior e o zero do vernier; finalmente, o quarto — 7 — é dado pelo próprio vernier.

Contorna-se, após, o perímetro em sentido contrário e verifica-se se a leitura é zero ou pouco diferente; sendo pequena a diferença, toma-se a média para valor da área e, sendo sensível a diferença, refazem-se as operações.

O número de divisões deve ser multiplicado pelo valor de cada divisão do planímetro, na escala escolhida, para dar a área procurada; assim, se cada uma destas vale $0,1 \text{ cm}^2$, o total 8627 equivalerá a $862,7 \text{ cm}^2$.

Os valores de cada divisão do vernier, num planímetro original de Amsler n.º 4, de acordo com as escalas normais, são as seguintes:

Para o 1.º traço do braço traçador:

$$\begin{aligned} \text{cada divisão do vernier} &= 10 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:1000 \\ &0,4 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:200 \end{aligned}$$

Para o 2.º traço do braço traçador:

$$\begin{aligned} \text{cada divisão do vernier} &= 2 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:500 \\ &0,5 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:250 \end{aligned}$$

Para o 3.º traço do braço traçador:

$$\text{cada divisão do vernier} = 1 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:400$$

Para o 4.º traço do braço traçador:

$$\text{cada divisão do vernier} = 5 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:1000$$

Para o 5.º traço do braço traçador:

$$\text{cada divisão do vernier} = 1 \text{ m}^2 - \text{escala } 1:500$$

O alcance, em área, desse planímetro é, para o pólo no *exterior* do desenho:

Círculo — diâmetro	29 cm
Quadrado — lados	26 cm
Retângulo	18 × 48 cm

Para o pólo no *interior* do desenho:

Círculo — diâmetro	63 cm
Quadrado — lados	45 cm
Retângulo	40 × 48 cm

O braço traçador é ajustado por parafuso micrométrico a fim de adaptar-se às várias escalas; também pode-se empregar o 1.º traço, para a escala de 1:1000 e fazer, a seguir, a adaptação para a escala do desenho, o que é às vezes conveniente.

Para verificar as condições de um planímetro na medida de uma área, deve-se desenhar um quadrado de lado certo com uma boa escala, percorrê-la cuidadosamente, num e noutro sentido, diversas vezes e aferir pelos resultados se os dados podem ser tomados de acordo com as escalas ou se devem ser feitas correções instrumentais ou, quiçá, modificação no comprimento assinalado no braço traçador, em planímetros de construção defeituosa ou desretificados.

c) *Teoria (resumida)*. O planímetro polar é o mais usado em topografia e estradas para a avaliação de áreas. Se considerarmos (Fig. 171)

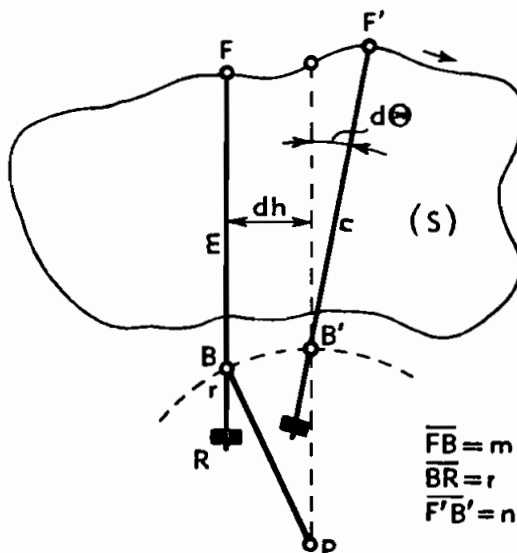


FIG. 171

duas posições infinitamente próximas do traçador, F e F' , o deslocamento de FB pode decompor-se numa translação dh e numa rotação $d\theta$.

A área percorrida pela haste FB será

$$ds = m \cdot dh + \frac{1}{2} m^2 d\theta, \text{ se desprezarmos os infinitesimais de 2.ª ordem.}$$

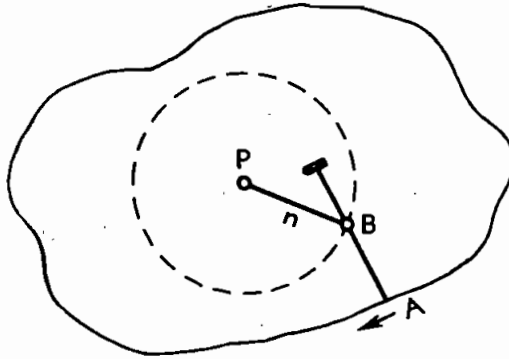


FIG. 172

Se for dx o arco registrado no tambor graduado (integrante) I, teremos:

$$dx = dh - r d\theta$$

donde

$$ds = m \cdot dx + \left(\frac{1}{2} m^2 + mr \right) d\theta$$

Integrando ao longo do contorno fechado, virá:

$$S = mx + \left(\frac{1}{2} m^2 + mr \right) \int d\theta \quad (126)$$

em que $\int d\theta = 0$, na hipótese do pólo ser exterior ao contorno e $\int d\theta = 2\pi$, se o pólo estiver no interior (Fig. 172), caso em que o ponto B descreve uma circunferência de raio n . As áreas limitadas pelo contorno fechado são dadas, nas duas hipóteses, pelas expressões

$$S = mx \quad (127)$$

e

$$S = mx + \left(\frac{1}{2} m^2 + mr + \frac{1}{2} n^2 \right) 2\pi \quad (128)$$

$$S = mx + c \text{ (constante)}$$

isto é, para cada comprimento do braço traçador, a área é, na 1.^a hipótese, proporcional ao arco registrado no tambor integrante, e na 2.^a hipótese, é necessário levar em conta ainda uma constante aditiva.

92 — Métodos para avaliação das áreas extrapoligonais

a) *Generalidades.* O levantamento de um curso d'água, quase sempre acompanhado de densa vegetação, ou de uma estrada ou canal sinuoso, é operação que demanda muitos cuidados e medidas especiais, razão por que deve ser feito por processos adequados. Os lados das poligonais de contorno devem acompanhar de perto as sinuosidades dos limites, e nunca serem afastados, ou por fora das matas adjacentes.

A abertura de picadas e medida de ordenadas longas, além de dificultar a operação, dá resultados, às vezes, pouco aproximados.

Seja *medir* a superfície de um terreno limitado por um *perímetro curvo* formado, por exemplo, por dois cursos d'água (Fig. 173). Seja *MPN* o terreno em questão.

Tomaremos três pontos *M, Q, P*, por exemplo, ligados e medidos em triângulo, em virtude de ser esta a forma aproximada do terreno; se a forma fosse outra, a do retângulo, do pentágono, ou de outra

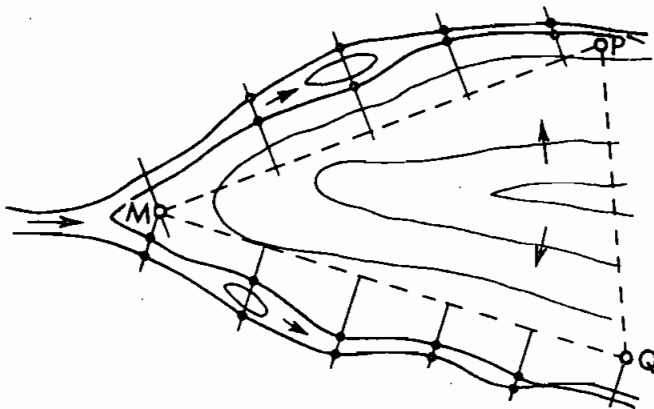


FIG. 173

forma, se procederia do mesmo modo. Os lados das figuras seriam as *diretrizes* para o traçado dos trapézios auxiliares, tais como *aba'b'*, *bc'b'c'*, etc., de decomposição dos contornos curvilíneos, em outros aproximados de compensação. A medida por compensação, exemplificada na (Fig. 174), exige habilidade do topógrafo pois a precisão deve ser *equivalente*, e oferece a vantagem de ser mais rápida. Suponhamos que a superfície a avaliar seja limitada pelo caminhamento 1-2 e poli-

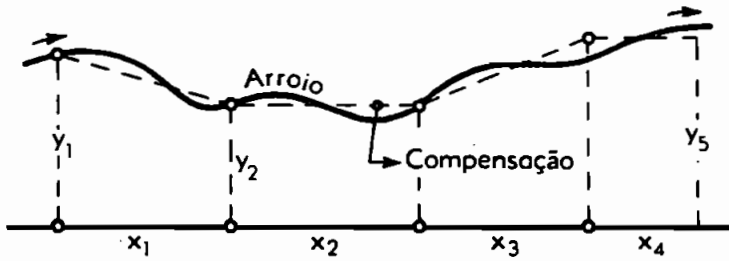


FIG. 174

gonal $ABC\dots$ (Fig. 175). No método geral medem-se as abscissas e as ordenadas nos pontos em que a curva muda apreciavelmente de direção e consideram-se as porções da curva entre duas ordenadas consecutivas como linhas retas. A figura é, assim, decomposta em trapézios desiguais e sua área é avaliada pela fórmula comum:

$$A = 1/2 [x_1 (y_0 + y_1) + x_2 (y_1 + y_2) + \dots] \quad (129)$$

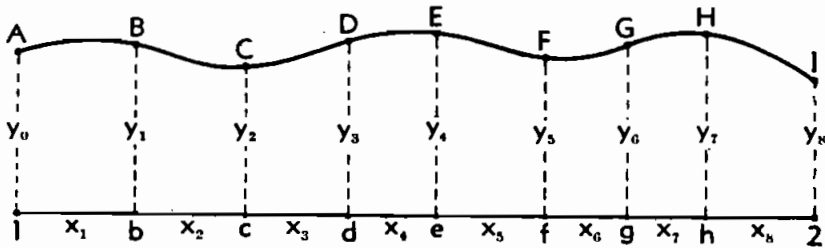


FIG. 175

Não havendo forte sinuosidade da linha curva, é preferível fazer uso de fórmulas baseadas na divisão da figura em trapézios a intervalos

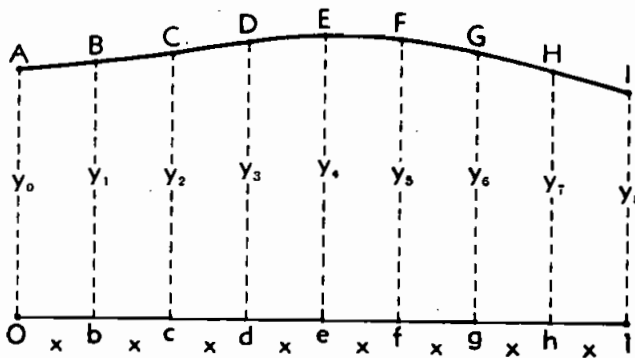


FIG. 176

regulares, empregando uma das três fórmulas clássicas: a de *Bezout*, *Simpson* e *Poncelet*.

Método dos trapézios (*Fórmula de Bezout*) (Fig. 176). Se tivermos uma figura limitada pelo alinhamento $O-I$ e curva AI , dividiremos a mesma em n partes iguais, ficando a superfície a avaliar decomposta em trapézios retângulos. A área será

$$A = \frac{1}{2} (y_0 + y_1) x + \frac{1}{2} (y_1 + y_2) x + \dots + \frac{1}{2} (y_{n-1} + y_n) x$$

ou

$$A = x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right)$$

$$A = x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \Sigma y_r \right) \quad (130)$$

que é a *fórmula de Bezout*, na qual Σy_r exprime a soma de todas as ordenadas intermediárias.

b) *Método de Simpson*. Consideremos a mesma figura, porém dividida em um número par de figuras parciais. Tomemos as duas primeiras figuras parciais (Fig. 177) limitadas por $o-c$ e ABC e tracemos as ordenadas m e n a $2/3x$. Teremos então: área parcial

$$a_1 = \frac{x}{3} [y_0 + 2(m + n) + y_2]$$

sendo $m + n \cong 2y_1$, virá:

$$a_1 = \frac{x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Do mesmo modo as outras áreas parciais:

$$a_2 = \frac{x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) \dots a_{n-2} = \frac{x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Totalizando,

$$A = \frac{x}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

ou ainda

$$A = \frac{x}{3} [(y_0 + y_n) + 4 \Sigma y_i + 2 \Sigma y_p] \quad (131)$$

que é a fórmula de Simpson, na qual $4 \Sigma y_i$ é o quádruplo da soma das ordenadas ímpares e $2 \Sigma y_p$ é o duplo da soma das ordenadas pares, ambas intermediárias.

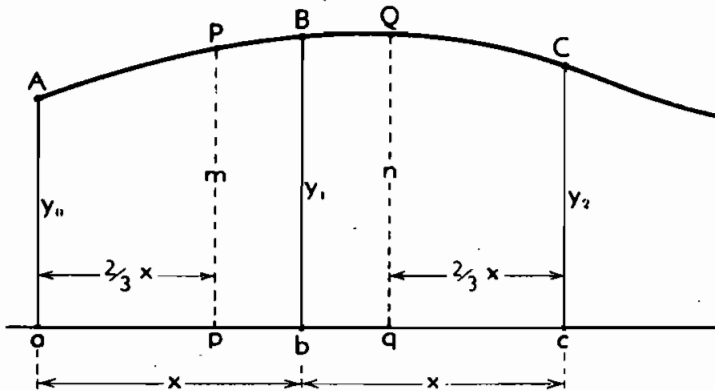


FIG. 177

c) *Método de Poncelet.* A divisão da figura também é feita num número par de partes iguais. Traçando-se tangentes à curva pelos pontos B e D, obtém-se novos trapézios * cuja soma das áreas será:

$$A_1 = 2x (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})$$

Considerando agora os trapézios OAB1, 1BD3, ... a nova área será:

$$A_2 = \frac{y_0 + y_1}{2} x + y$$

ou

$$A_2 = x \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + 2 (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) - \frac{y_1 + y_{n-1}}{2} \right]$$

* (Oa₁c₂ e 2c₂e₁4, ...)

e pela fórmula de Poncelet a área é calculada pela semi-soma das áreas A_1 e A_2 , resultando:

$$A = 1/2 (A_1 + A_2) = x \left[2 (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \frac{y_0 + y_n}{4} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{4} \right]$$

ou, ainda,

$$A = x \left(\frac{y_0 + y_n}{4} + 2 \sum y_r - \frac{y_1 + y_{n-1}}{4} \right) \quad (132)$$

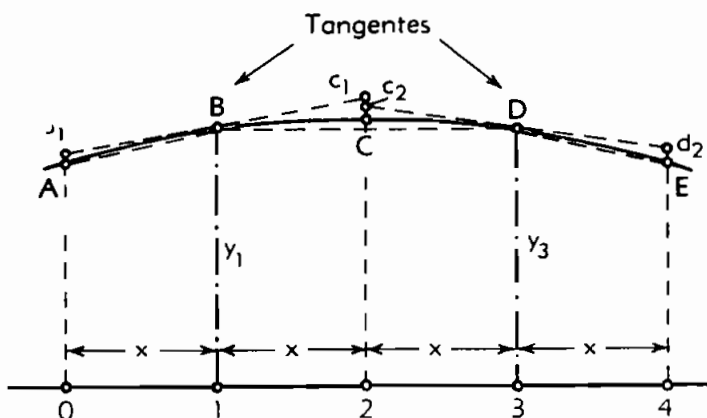


FIG. 178

em que o 1.^o termo é a quarta parte das ordenadas extremas, $2\sum y_r$ é o duplo da soma das ordenadas intermediárias e o último termo a quarta parte da soma da segunda e penúltima ordenada.

§ 17 – Problemas de campo. A teodolito. Triangulações. Problemas de Pothénot e de Hansen

93 – Problemas

1) Traçar, a teodolito, um alinhamento sobre uma coxilha ligando pontos nas encostas. Pode-se resolver ainda o problema com o auxílio do teodolito; escolhe-se um ponto C (Fig. 179), donde se possa visar A e B e medem-se o ângulo α e as distâncias l_1 e l_2 .

Para achar os ângulos β e γ , com os quais traça-se o alinhamento AB, a partir de A ou de B, empregam-se as fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{tg} 1/2 (\beta - \gamma) = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} \operatorname{cotg} \alpha / 2$$

e $\beta + \gamma = 180 - \alpha$, que, resolvidas, permitem determinar β e γ , e para achar o comprimento AB ou x :

$$\frac{x}{\text{sen } \alpha} = \frac{l_1}{\text{sen } \gamma} = \frac{l_2}{\text{sen } \beta}$$

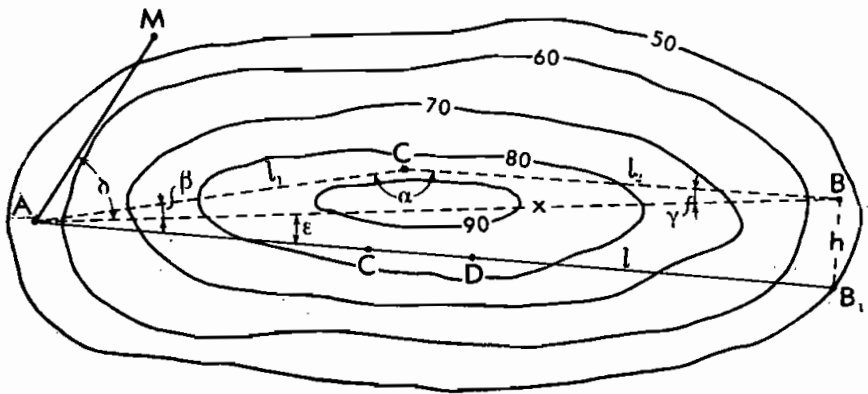


FIG. 179

Também se pode marcar o alinhamento do seguinte modo: com o teodolito instalado em A , visa-se um ponto qualquer de mira M , com os zeros coincidentes e traça-se um alinhamento aproximado ACD , com o ângulo δ , até o alto; daí até o outro extremo dois balizadores podem prolongar o alinhamento CD até B_1 , medindo então B_1B . Sendo $AB_1 = AB$, obtém-se o ângulo de correção E por

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{BB_1}{AB} = \frac{h}{l}$$

Marcado no alinhamento o novo ângulo $(\delta - \varepsilon)$, obteremos o traçado de AB , salvo pequeno erro que se corrigirá do mesmo modo.

2) *Determinar o comprimento de um alinhamento, cujos extremos são inacessíveis.* Seja PQ (Fig. 180) o alinhamento e AB a base de comprimento l , escolhida de tal modo que seus extremos A e B permitam a instalação de um goniômetro para a medida dos ângulos.

Resolve-se o triângulo APQ e verifica-se o cálculo pelo triângulo BPQ .

Do triângulo PAB :

$$AP = l_1 = \frac{l \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \varepsilon}$$

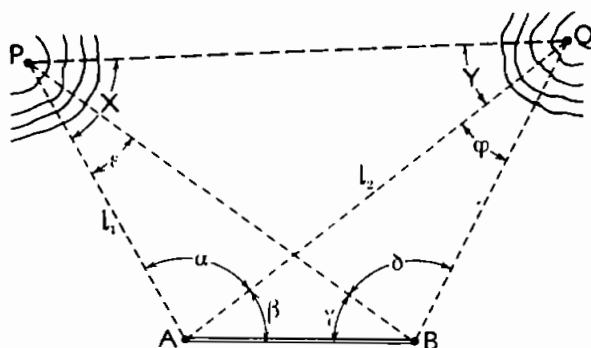


FIG. 180

no qual $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$

Do triângulo QAB :

$$AQ = l_2 = \frac{l \cdot \operatorname{sen} (\gamma + \delta)}{\operatorname{sen} \varphi}$$

e, assim, do triângulo PQA ,

$$\operatorname{tg} 1/2 (X - Y) = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} \operatorname{ctg} \alpha/2$$

Finalmente,

$$PQ = \frac{(l_2 - l_1) \cos \alpha/2}{\operatorname{sen} 1/2 (X - Y)} \quad (133)$$

ou

$$PQ = \frac{l_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} Y} = \frac{l_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} X} \quad (133 \text{ bis})$$

3) *Determinar o ângulo formado por dois alinhamentos, cujo ponto de intersecção é inacessível.* Este problema é de freqüente ocorrência em estradas, na locação de curvas, pois o ponto de intersecção é, às vezes, de difícil acesso e deve ser conhecido para o cálculo da curva respectiva.

Procede-se do seguinte modo para determiná-lo: Sejam AB e CD (Fig. 181) dois alinhamentos e P o ponto de intersecção inacessível.

Mede-se a distância $BD = l$ e os ângulos α e β .

Então:

$$X = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad e \quad BP = \frac{l \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } X}$$

também

$$DP = \frac{l \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } X}$$

4) Achar o comprimento de uma linha inacessível de grande extensão recorrendo a uma base poligonal. Se os extremos da linha *AB* fossem separados de alguns quilômetros, seria difícil encontrar uma base reta, em terreno mais ou menos plano e do qual fosse possível visar os extremos *A* e *B* da linha inacessível proposta (Fig. 182). Se estabelece uma base poligonal *CDEF* em bom terreno e de tal modo que dos pontos *C* e *D* possa ser visado o extremo *A* e dos pontos *E* e *F* o outro extremo *B*.

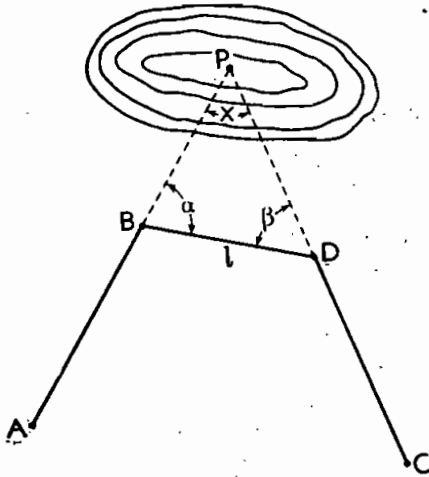


Fig. 181

São então medidos os comprimentos l_1, l_2 e l_3 e os ângulos $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ e φ , com todo o cuidado, em medidas lineares de ida e volta, e angulares de ângulos duplos.

Podem ser tomados para o azimute fundamental de *CD*, o valor arbitrário de 90° , ou um valor lido na bússola do teodolito.

valor arbitrário de 90° , ou um valor

lido na bússola do teodolito.

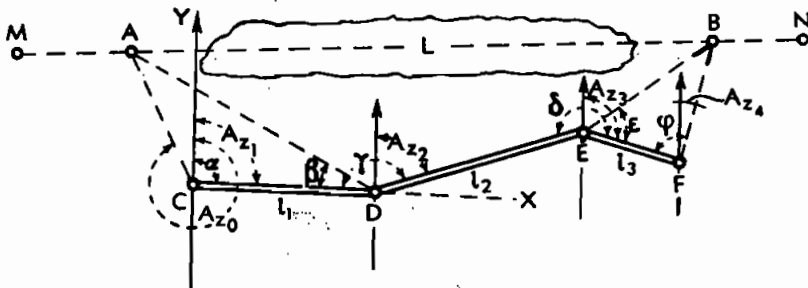


Fig. 182

Tomado, por exemplo, CD como eixo dos X e C como origem será fácil aplicar fórmulas já dadas no método analítico e calcular os demais azimutes, rumos, projeções e coordenadas dos vértices; dos triângulos ACD e BEF , resolvidos trigonométrica ou analiticamente, acham-se as coordenadas de A (X' , Y') e de B (X'' , Y'').

Finalmente, o comprimento L é dado por:

$$L = \sqrt{(X'' - X')^2 + (Y'' - Y')^2} \quad (134)$$

De modo idêntico poderia ser resolvido outro problema em que o ponto B é desconhecido, pois deve se situar no prolongamento de MA e então caberia determinar BF e o ângulo FBN .

Nos *Exercícios práticos* do Capítulo final resolvemos o novo problema.

5) *Problema de Pothénot ou dos três pontos*. Em muitas ocasiões precisa-se obter, com bastante exatidão, a posição de um ponto com relação a outros de uma triangulação e, assim, este problema é muito importante, tanto em Topografia, como em Navegação, onde é chamado de *Problema da Carta*.

Consiste o mesmo em medir de um ponto os ângulos formados pelas visadas dirigidas a três outros de posição conhecida e determinar suas coordenadas.

Sejam (Fig. 183) A , B e C os três pontos de posição conhecida e D o procurado, donde foram medidos os ângulos α e β .

a) *Resolução gráfica*. Desenhados os três pontos pelas suas coordenadas (cartesianas ou polares), pode-se marcar os ângulos lidos em papel transparente e pela superposição marcar a posição aproximada do ponto D .

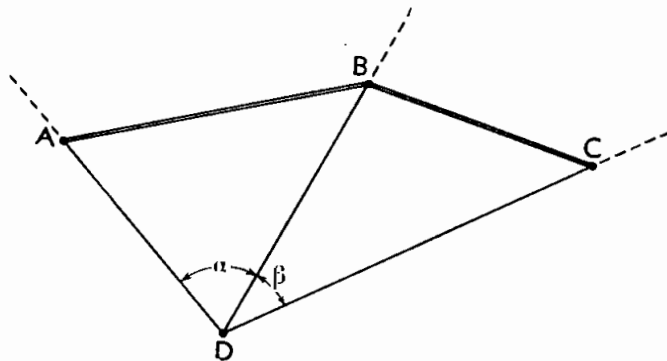


FIG. 183

Também se podem construir graficamente os *segmentos capazes* dos ângulos lidos e obter o ponto desejado.

Sejam (Fig. 184) A , B e C os pontos dados e α e β os ângulos lidos.

Em torno de B , marca-se o ângulo $B_1BA = \alpha$ e em torno de C o ângulo $C_1CB = \beta$.

Traçando, por B e por C normais aos lados BB_1 e CC_1 , bem como pelos meios m e n dos alinhamentos AB e BC , essas normais determinarão, pela intersecção, os centros O e O_1 .

Desses centros traçam-se círculos que passarão pelos pontos A , B e C e determinarão o ponto D .

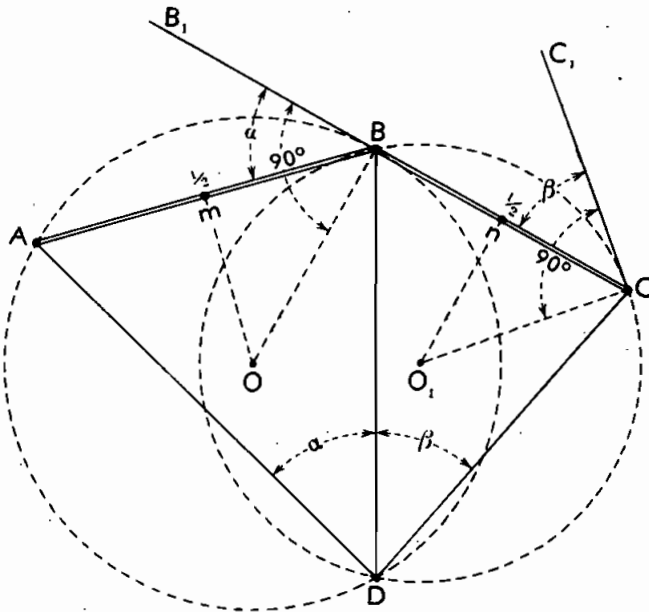


FIG. 184

A intersecção D dos dois círculos é o vértice dos ângulos α e β dados, de que os segmentos de círculo ABD e BCD são *capazes*.

b) *Resolução mecânica.* Há, ainda, para a resolução deste problema, um *compasso de três pontas*, que permite resolver satisfatoriamente o caso; consiste em um círculo graduado, dividido de 0 a 180°, a partir de 0 para ambos os lados, com vernier, e de três ou quatro raios para o traçado dos alinhamentos.

c) *Resolução analítica.* Sejam os mesmos três pontos A , B e C (Fig. 185) e o ponto a determinar D , de onde foram medidos os ângulos α e β .

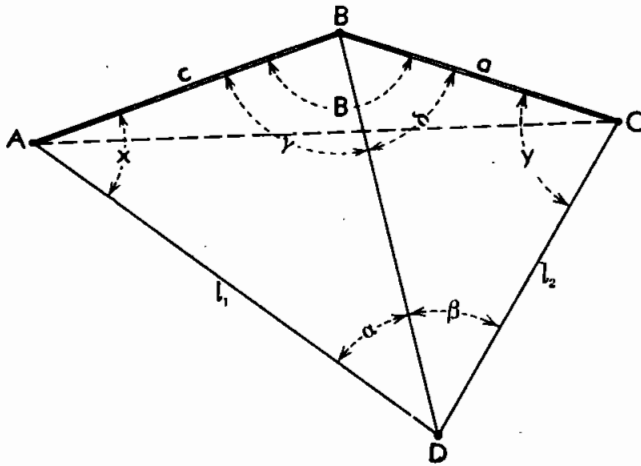


FIG. 185

No triângulo ABD :

$$BD = \frac{c \cdot \text{sen } x}{\text{sen } \alpha}$$

e no triângulo BCD :

$$BD = \frac{a \cdot \text{sen } y}{\text{sen } \beta}$$

donde:

$$\frac{c \text{ sen } x}{\text{sen } \alpha} = \frac{a \text{ sen } y}{\text{sen } \beta}$$

e

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \frac{\alpha \cdot \text{sen } \alpha}{c \cdot \text{sen } \beta} = K = \frac{K}{l}$$

Por uma propriedade das proporções

$$\frac{\text{sen } x + \text{sen } y}{\text{sen } x - \text{sen } y} = \frac{K - l}{K + l} = \frac{\text{tg } 1/2 (x - y)}{\text{tg } 1/2 (x + y)}$$

Donde

$$\text{tg } 1/2 (x - y) = \text{tg } 1/2 (x + y) \frac{K - l}{K + l} \quad (135)$$

e como, no quadrilátero $ABCD$,

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + B)$$

podemos calcular os ângulos x e y .

Também os ângulos γ e δ se obtém por:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + x)$$

e

$$\delta = 180^\circ - (\beta + y)$$

Conhecidos os lados c e a e os ângulos dos triângulos, podemos resolvê-los, calculando as distâncias l_1 e l_2 .

Devemos advertir que tanto neste cálculo, como em outros em que entram funções trigonométricas, devem ser levados em conta os sinais das reduções ao primeiro quadrante, pois as fórmulas são gerais.

Caso particular. Se, por acaso, $\alpha + \beta + B$ for igual a 180° , a soma dos ângulos $x + y = 180^\circ$ e o quadrilátero $ABCD$ seria inscritível e o ponto D estaria sobre a circunferência determinada por A , B e C .

O problema é indeterminado e para resolvê-lo se deverá escolher outro ponto D ligado a dois dos pontos dados A , B e C , relacionando-se D com os mesmos e com D' .

d) Resolução por coordenadas. Consiste em calcular as coordenadas x_4 , y_4 do ponto D , em função das coordenadas dos três pontos para verificação dos cálculos.

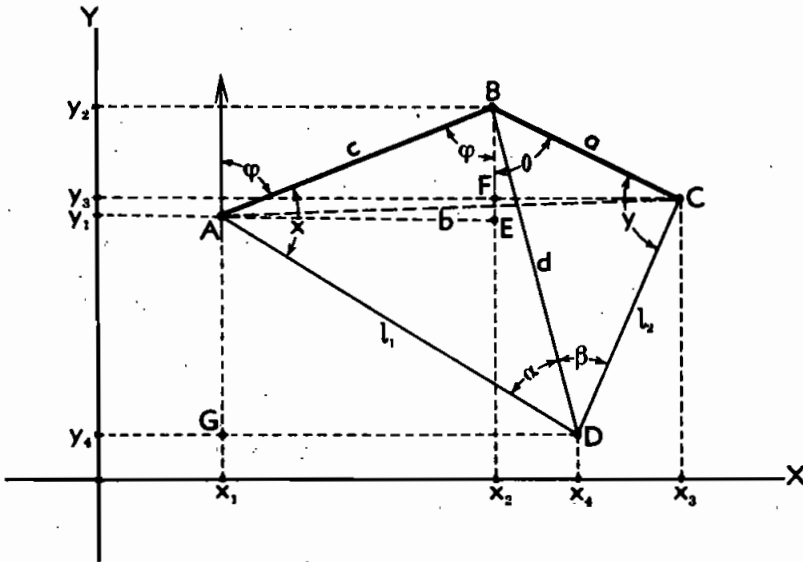


FIG. 186

Aproveitamos o cálculo dos ângulos x e y como visto, sendo os comprimentos c e a obtidos da distância de dois pontos dados pelas suas coordenadas.

Para o cálculo dos ângulos φ e θ (Fig. 186), usaremos as fórmulas

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AE}{EB} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{CF}{FB} = \frac{x_3 - x_1}{y_2 - y_3}$$

Os comprimentos $AD = l_1$ e $CD = l_2$ são:

$$AD = l_1 = \frac{c \cdot \operatorname{sen} (\alpha + x)}{\operatorname{sen} \alpha}$$

e

$$CD = l_2 = \frac{c \cdot \operatorname{sen} (\beta + y)}{\operatorname{sen} \beta}$$

As coordenadas de D em função das de A , se obtêm por:

$$x_4 = x_1 + GD = x_1 + l_1 \cdot \cos (\varphi + x - 90^\circ) = x_1 + l_1 \cdot \operatorname{sen} (\varphi + x)$$

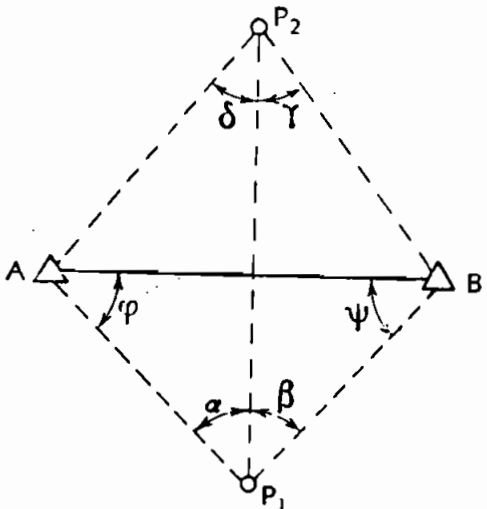


FIG. 187

O valor de φ sendo também o do azimute de AD , $\varphi + x$, será o azimute de AD e $l_1 \operatorname{sen} (\varphi + x)$, nada mais é do que a projeção de AD sobre o eixo dos x .

Como verificação, deve-se calcular as coordenadas de D , em função das de C ou de B , do mesmo modo.

6) *Problema de Hansen ou Problema do par de pontos fixos inacessíveis.*

1.^a *solução.* Para a ligação de um ponto P_1 (Figura 187) topográfico a dois pontos fixos, cadastrais ou geodésicos, A e B de coordenadas conhecidas, e do ângulo AP_1B em P_1 , entre A e B , se poderá traçar uma circunferência geométrica para novo

ponto P_1 .

Porém, escolhendo um segundo ponto P_2 , ter-se-á um novo alinhamento P_1P_2 e um quadrilátero AP_1BP_2 , que pode ser resolvido pelo

problema de *Hansen* (análogo ao de Pothénot) desde que conhecidos os ângulos α , β , γ e δ , além do lado AB .

A solução que se segue é a de um *ângulo auxiliar* (μ), e assim se anuncia:

Dadas as coordenadas dos pontos $A (X_1, Y_1)$ e $B (X_2, Y_2)$ achar as coordenadas dos novos pontos $P_1 (X_3, Y_3)$ e $P_2 (X_4, Y_4)$, nos quais foram medidos, respectivamente, os ângulos α e β , γ e δ .

1) *Cálculo do rumo e comprimento de AB.*

$$\operatorname{tg} (AB) = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad (136)$$

$$AB = \frac{Y_2 - Y_1}{\operatorname{sen} (AB)} = \frac{X_2 - X_1}{\operatorname{cos} (AB)} \quad (137)$$

2) *Cálculo da semi-soma $1/2 (\varphi + \Psi)$.*

$$\frac{\varphi + \Psi}{2} = 90^\circ - (\alpha + \beta)$$

3) *Cálculo do ângulo auxiliar μ .* Dos triângulos P_1AP_2 e P_1BP_2 , obtemos:

$$\frac{P_1P_2}{\operatorname{sen} (\alpha + \delta)} = \frac{AP_1}{\operatorname{sen} \delta} \quad \text{e} \quad \frac{P_1P_2}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)} = \frac{BP_1}{\operatorname{sen} \gamma}$$

donde

$$\frac{AP_1}{\operatorname{sen} \delta} \operatorname{sen} (\alpha + \delta) = \frac{BP_1}{\operatorname{sen} \gamma} \operatorname{sen} (\beta + \gamma)$$

e

$$\frac{BP_1}{AP_1} = \frac{\operatorname{sen} \gamma \cdot \operatorname{sen} (\alpha + \delta)}{\operatorname{sen} \delta \cdot \operatorname{sen} (\beta + \gamma)} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \Psi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu} = \operatorname{ctg} \mu \quad (138)$$

4) *Cálculo da semidiferença $1/2 (\varphi - \Psi)$.*

$$\operatorname{tg} 1/2 (\varphi - \Psi) = \operatorname{tg} 1/2 (\varphi + \Psi) \cdot \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu) = \operatorname{ctg} 1/2 (\alpha + \beta) \cdot \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu)$$

5) *Cálculo de φ e Ψ .*

$$1/2 (\varphi + \Psi) + 1/2 (\varphi - \Psi) = \varphi \quad (139)$$

e

$$1/2 (\varphi + \Psi) - 1/2 (\varphi - \Psi) = \Psi$$

6) *Cálculo dos lados AP_1 e BP_1 .*

$$AP_1 = \frac{AB}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{sen} \Psi \quad \text{e} \quad BP_1 = \frac{AB}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{sen} \varphi \quad (140)$$

e, após, se segue calculando, como no problema de Pothénot, os rumos de AP_1 e P_1P_2 , projeções, coordenadas e as comprovações finais do cálculo.

Há outras soluções para a resolução do problema, das quais ressalto a *solução da figura homóloga*, que é interessante pela sua aplicação na *triangulação de fechamento*, empregada em geodésia.

2.^a solução. *Problema de Hansen* (triangulação). *Solução da figura homóloga*. Conhecidas as coordenadas de dois vértices geodésicos A e B (Fig. 188) e medidos os ângulos em 2 estações topográficas P e Q , uma ao norte e outra ao sul do alinhamento AB , calcular suas coordenadas.

Dados: 1) coordenadas dos vértices:

$$A \begin{cases} X_A \\ Y_A \end{cases} \quad \text{e} \quad B \begin{cases} X_B \\ Y_B \end{cases}$$

2) ângulos medidos:

$$\text{em } P \begin{cases} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{cases} \quad ; \quad \text{em } Q \begin{cases} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{cases}$$

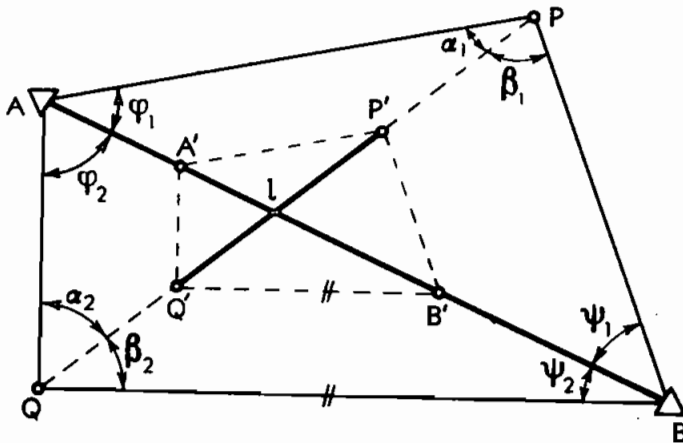


FIG. 188

Calcular as coordenadas dos pontos P e Q .

1) A inclinação θ da reta AB (com o eixo dos Y).

$$\operatorname{tg} \theta_{AB} = \frac{XB - XA}{YB - YA} \quad (141)$$

2) O comprimento AB será:

$$AB = \frac{XB - XA}{\text{sen } \theta_{AB}} = \frac{YB - YA}{\text{cos } \theta_{AB}} \quad (142)$$

Admitindo $P'Q' = 1$ (1000 m, por exemplo).

3) Comprimento das retas $A'P'$, $A'Q'$, $B'P'$ e $B'Q'$ (relativas).

$$\frac{A'P'}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{P'Q'}{\text{sen } [180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)]} = \frac{P'Q'}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

c

$$A'P' = \frac{P'Q' \text{ sen } \alpha_2}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (143)$$

Da mesma maneira:

$$A'Q' = P'Q' \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)}; B'P' = P'Q' \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)} \quad (144)$$

$$B'Q' = P'Q' \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)} \quad (145)$$

4) Determinação dos ângulos em torno de A (φ_1 e φ_2) e de B (Ψ_1 e Ψ_2).

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad ; \quad \Psi_1 + \Psi_2 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} (\varphi_1 - \Psi_1) = \text{tg } \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Psi_1) \frac{B'P' - A'P'}{B'P' + A'P'} \quad (145)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} (\varphi_2 - \Psi_2) = \text{tg } (\varphi_2 + \Psi_2) \frac{B'Q' - A'Q'}{B'Q' + A'Q'} \quad (146)$$

$$\varphi_2 + \Psi_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta_2)$$

Conhecidas as somas e as diferenças, $\varphi_1 \pm \Psi_1$ e $\varphi_2 \pm \Psi_2$, achamos os valores dos mesmos.

5) Determinação do comprimento $A'B'$.

$$A'B' = A'P' \frac{\text{sen } (\alpha_1 + \beta_1)}{\text{sen } \Psi_1} = B'Q' \frac{\text{sen } (\alpha_2 + \beta_2)}{\text{sen } \varphi_2} \quad (147)$$

6) Calcularemos, agora, o fator de ampliação ou redução (K), pela relação abaixo:

$$K = \frac{AB}{A'B'} \dots \dots \dots \text{fórmula (142)}$$

$$\dots \dots \dots \text{fórmula (147)}$$

Com o fator K , obteremos os valores reais de PA , PB , QA e QB .

7) As inclinações das retas AP e AQ são:

$$\theta_{AP} = \theta_{AB} - \varphi_1 \quad \text{e} \quad \theta_{AQ} = \theta_{AB} + \varphi_2 \quad (148)$$

e das retas BP e BQ :

$$\theta_{BP} = \theta_{BA} + \Psi_1 \quad \text{e} \quad \theta_{BQ} = \theta_{BA} - \Psi_2 \quad (149)$$

8) Conhecidos os comprimentos e inclinações das retas AP , AQ , BP e BQ , calculam-se as projeções pelas relações conhecidas:

$$x = AP \cdot \text{sen } \theta_{AP}; \text{ etc.}$$

$$y = AP \cdot \text{cos } \theta_{AP}; \text{ etc.}$$

9) Conhecidas as projeções e as coordenadas dadas de A e B , por simples somas algébricas, determinamos as coordenadas de P e Q , em função das coordenadas de A , e, também, de B (verificações).

§ 18 — Determinação da meridiana e das coordenadas geográficas

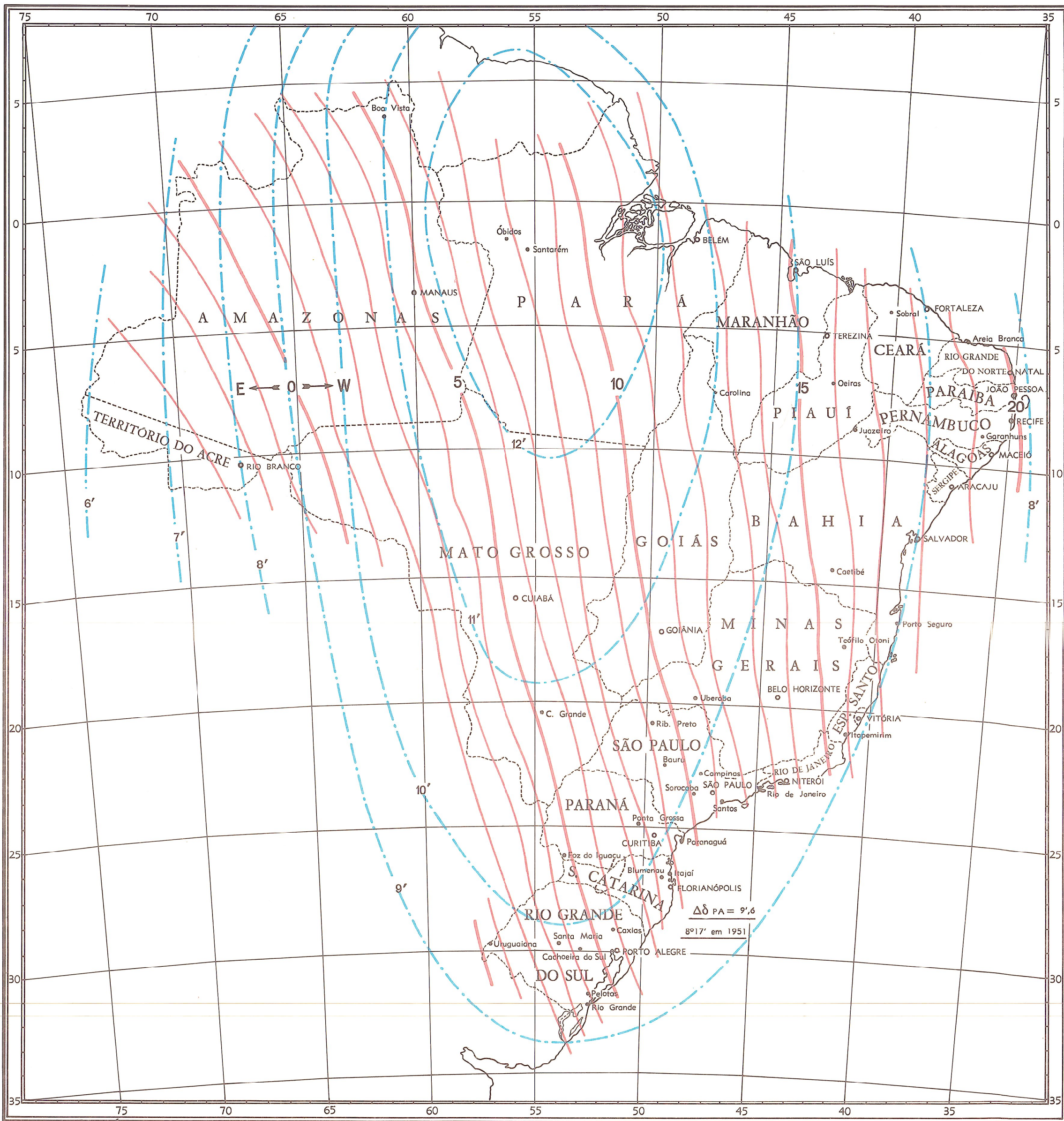
94 — Aparelhagem

a) *Generalidades.* Um reconhecimento executado em estradas por itinerário ou caminhamento a bússola e um levantamento topográfico devem ficar ligados a pontos fixos, que serão localidades atingidas, cujas coordenadas geográficas tenham sido determinadas anteriormente por Comissões de levantamento, por Observatórios astronômicos ou ainda por organizações particulares de topografia, estradas ou urbanismo.

Na falta destes dados é indispensável que, pelo menos, de 50 em 50 km, segundo alguns exploradores, de 100 em 100, segundo outros, sejam feitas as observações astronômicas suficientemente exatas para permitirem fixar o reconhecimento ou levantamento numa planta geográfica.

Óbvio é toda e qualquer consideração sobre o valor inestimável da determinação de coordenadas geográficas num país como o Brasil, onde, devido a sua grande extensão territorial, existem regiões quase desconhecidas, carecendo de representação geográfica suficientemente certa.

Queremos chamar, assim, a atenção para o auxílio relevante que as determinações de orientação (linha meridiana e declinação magnética) e de coordenadas (latitude e longitude geográfica) podem prestar como seguros pontos de verificação das grandes poligonais de reconhecimentos para estudos de estradas e outros, conseguindo-se dessa maneira um meio fácil de reconhecer de antemão a posição exata de todos os pontos de passagem obrigatória dos reconhecimentos, resultando daí a segurança prévia na direção geral das operações a fazer, as quais, sem



PRANCHA VI

MAPA ISOGÔNICO DO BRASIL

(ESBOÇO)

JANEIRO DE 1935

- Linhas isogônicas
- - - Linhas isopóricas
- - - Zonas perturbadas

isto, não passarão de meras tentativas inseguras e que na maioria das vezes acarretam despesas inúteis.

Até há bem pouco tempo era a determinação das coordenadas geográficas no campo um complicado e difícil problema; já pela necessidade do emprego de aparelhagem de muita aproximação e que eram sempre de grande volume e peso e, por isso, de custoso transporte; já pelo imprescindível emprego de uma bateria de cronômetros de marinha, que careciam de grandes cuidados.

Hoje em dia, bem diferente se apresenta a questão, graças ao progresso rápido da rádio transmissão que permite com um pequeno e simples aparelho radiotelegráfico de bateria, em qualquer recanto longínquo do sertão, entrarmos em comunicação com os Observatórios Astronômicos e de lá receber em horas determinadas os sinais horários comuns e científicos, ficando assim a determinação livre da bagagem referida de cronômetros.

Outro fator que também veio muito facilitar este trabalho foi a construção de aparelhos de grande precisão, que ao lado da extraordinária aproximação dos décimos de segundo ($0'',1$) em ambos os limbos, têm disposições e acessórios especiais de comodidade para a astronomia de campo, a par de peso reduzido para fácil transporte.

Assim, a determinação de coordenadas geográficas, que compreende 4 partes, isto é, determinação do meridiano verdadeiro, idem da hora e por fim da latitude e longitude, é um trabalho relativamente fácil, pouco dispendioso e de grande auxílio nos trabalhos de campo.

Sem extrema precisão e utilização de instrumentos caríssimos, mais empregados nos Observatórios, pode-se, pelas coordenadas astronômicas determinadas até décimos de segundo, obter o conhecimento da posição de qualquer ponto com uma tolerância de 30 metros de raio, o que já é suficiente como verificação de grandes itinerários ou poligonais abertas.

Daremos a seguir, na parte de aparelhagem, a descrição de um teodolito de precisão, mais adaptado a observações de precisão, não deixando, no entanto, de dizermos que com qualquer dos teodolitos estudados anteriormente é possível obter a direção da meridiana verdadeira e mesmo as coordenadas com menor aproximação, evidentemente.

A equipagem para a astronomia de campo é a seguinte:

- Um teodolito de precisão, micrométrico, com acessórios para iluminação e trabalho noturno;
- Um cronômetro sideral de bolso, tipo Ulysse Nardin;
- Um aparelho rádio receptor, misto, em ondas de 10 a 50 e de 500 a 1200 metros para obter os sinais horários dos Observatórios astronômicos;
- Uma tábua de logaritmos de 7 decimais;

- Uma efeméride astronômica: Anuário do Observatório do Rio de Janeiro, “*Connaissance des Temps*”, “*Nautical Almanac*”, etc.
- Um mapa celeste detalhado.

Os *sinais científicos* são transmitidos, como dissemos, pelos Observatórios, e em todas as efemérides vem indicadas as horas respectivas de transmissão, intervalos, etc.

b) *Teodolito Universal Wild T2*. O teodolito universal Wild T2 (Fig. 189), concebido e realizado segundo idéias novas, em seu aspecto

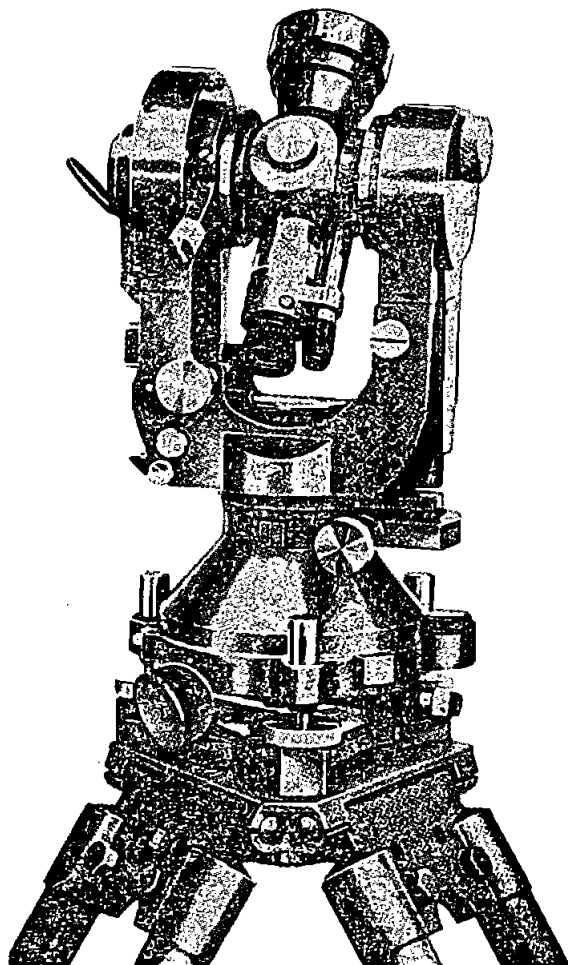


FIG. 189

geral é mais simples do que outros teodolitos, sobretudo do lado do limbo vertical. Este é colocado inteiramente no interior do suporte, cujas nervuras protegem perfeitamente o nível respectivo. Os feixes luminosos que formam as imagens do limbo vertical já não atravessam o espaço vazio situado entre os dois suportes; seguem o interior do eixo horizontal até atingir o microscópio de leitura. Os dois prismas de iluminação do limbo vertical, assim como o difusor que ilumina o micrômetro, são substituídos por um espelho único, orientável em todos os sentidos, adaptado ao suporte do limbo vertical.

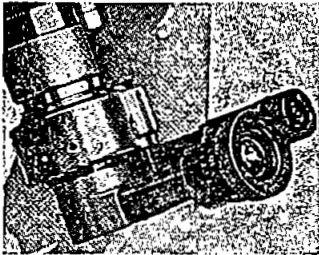


FIG. 190

pontarias zenitais pode ser utilizada uma ocular em cotovêlo (Fig. 190).

Tanto o limbo horizontal, como o vertical são lidos no microscópio, cuja ocular está ao lado da luneta, diretamente a 1" ou 1/10" por estima.

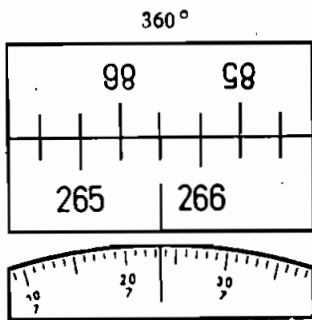


FIG. 191

O teodolito Universal Wild serve para as triangulações topográficas e geodésicas de 3.^a ordem, para observações astronômicas, e taqueometria de precisão.

Pode ser usado com um prumo comum ou prumo óptico.

A luneta, com uma ampliação de 28 vezes, tem focagem interna e é reversível nos dois sentidos, mesmo com a adaptação à objetiva do duplicador taqueométrico, o que é vantajoso pela possibilidade de observação nas duas posições da luneta. Para

Cada leitura dá a média das leituras diametralmente opostas do limbo, sendo por conseguinte livre de todo o erro de excentricidade (Fig. 191).

Para as observações astronômicas é muito útil o emprego de um *nível cavaleiro*, que se coloca sobre o eixo dos munhões, nível cuja precisão é de 5" por 2 mm.

Para aplicação do excelente método das leituras iguais é recomendável o emprego do nível *Horrebow-Talcott*, que se fixa sobre a pinça do movimento vertical.

Leitura no limbo	265°40'
Leitura no micrômetro	7'23''6
	<hr/>
	265°47'23''6

Para observações astronômicas noturnas e para uso em minas ou túneis, se adaptam lâmpadas nos dois lugares dos espelhos de iluminação. A claridade se regula por uma resistência rotativa. A instalação complementar elétrica é completada por um estojo de couro com baterias e uma lâmpada de mão (Fig. 192).

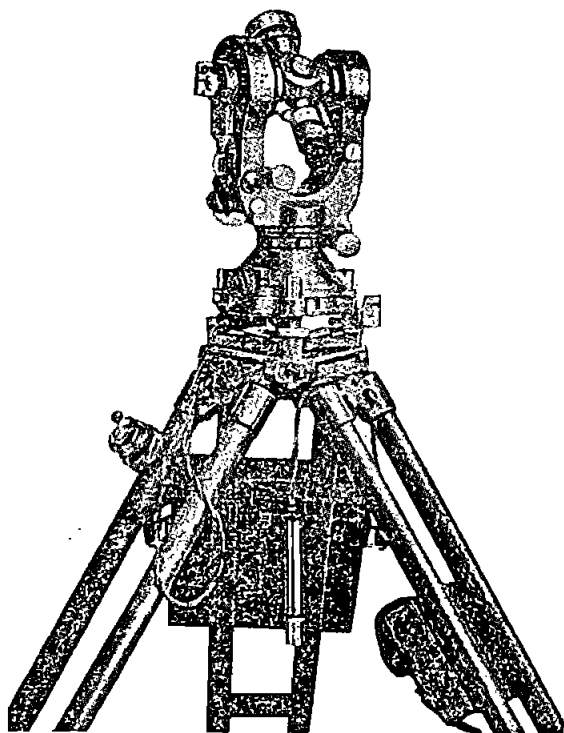


FIG. 192

O sistema do eixo vertical introduzido nesse teodolito representa uma vantajosa combinação dos eixos cônico e cilíndrico. O novo eixo vertical conserva sua centragem por meio de um anel disposto na parte inferior de uma bucha reforçada.

Também o eixo transversal teve uma alteração construtiva em seus mancais de apoio. Para evitar um deslocamento desuniforme as buchas dos mancais possuem, em sua parte inferior, cavidades de alguns milímetros de profundidade. Desta maneira o eixo descansa nas partes laterais das buchas, do que resultam efeitos análogos aos dos mancais em forma de Y.

As *características gerais* deste teodolito são:

Diâmetro do círculo horizontal de cristal — 90 mm

Diâmetro do círculo vertical de cristal — 70 mm

Intervalo de divisão do limbo — 20'

Divisão do micrômetro — 1''

Abertura livre da objetiva — 40 mm

Comprimento da luneta — 145 mm

Aumento da luneta — 28 vezes

Constantes; estadimétrica, 100; instrumental, 0

Sensibilidade:

do nível de verticalidade — 20'' por 2 mm

do nível do círculo vertical — 30'' por 2 mm

do nível cavaleiro — 5'' por 2 mm

do nível Horrebow-Talcott — 5'' por 2 mm

Peso do instrumento — 5,5 kg

Peso da embalagem — 2,5 kg.

Este instrumento é robusto, leve e de dimensões reduzidas que lhe permitirá efetivar nas melhores condições todos os gêneros de trabalho.

O estojo metálico é a embalagem ideal empregada neste instrumento; é fixado à base de embalagem por parafusos e não por calços, o que garante estabilidade, apesar da folga devida ao desgaste normal.

A campânula de aço é mantida sobre a base por um fecho de alavancas muito prático e um anel de borracha assegura um conjunto perfeitamente estanque ao ar e à água.

Para o transporte habitual pode o instrumento ser colocado num *saco mochila* muito prático; para o transporte rodô ou ferroviário, utiliza-se uma *caixa de madeira almofadada*.

95 — Medida do tempo. Definições

É imprescindível para qualquer observação astronômica o conhecimento da hora exata, razão por que damos a seguir noções sobre os diversos tempos e relações principais.

O movimento real da Terra, ou o movimento aparente dos astros servem de medida ao tempo. É a rotação de nosso globo em torno do eixo polar que permite avaliar o tempo, baseado no referido movimento. Em astronomia tem-se necessidade de conhecer o *tempo verdadeiro*, o *tempo médio* e o *tempo sideral*. Na vida prática usa-se apenas o *tempo médio*.

a) *Tempo solar verdadeiro*. Um primeiro meio de medida é com o movimento aparente do Sol, em torno da Terra.

Dia solar verdadeiro. Se se observa o Sol no momento de sua passagem pelo meridiano do lugar (o meridiano do lugar é o que de fato passa pelo centro do Sol), e se conta o tempo a partir desse momento até a próxima passagem, o intervalo correspondente será o do dia solar verdadeiro na data da observação.

Tempo solar médio. O movimento do sol verdadeiro sobre a eclíptica não se faz uniformemente. Assim, por exemplo, a 23 de dezembro o dia solar ultrapassa o dia médio de 30 segundos; o dia mais curto tem lugar a 16 de setembro.

Para obviar os inconvenientes dessas variações imaginaram os astrônomos um sol fictício ou *médio* para obter um regulador do tempo.

O movimento anual desse sol fictício tem a mesma duração que o movimento anual do sol verdadeiro, mas com uma velocidade uniforme sobre o equador. Toma-se o equador e não a eclíptica para a trajetória desse sol fictício, porque a projeção dos arcos de eclíptica sobre o equador não intercepta comprimentos iguais a esses arcos.

Assim, dia médio é o tempo ou intervalo de tempo que se escoa entre duas passagens consecutivas do sol médio pelo meridiano do lugar, e tem, pelo que dissemos, duração constante.

Equação do tempo. A equação do tempo é uma certa quantidade que deve ser somada algebricamente ao tempo verdadeiro para se obter o correspondente tempo médio. O valor dessa quantidade para cada dia do ano é dado nas efemérides, tais como o nosso Anuário do Observatório Nacional.

b) *Tempo astronômico e tempo civil.* Em astronomia zero hora corresponde ao momento em que o sol verdadeiro ou médio passa pelo meridiano e o intervalo de duas passagens consecutivas é dividido de 0 a 24 horas; assim, meia-noite ou 12 horas divide ao meio a duração de um dia astronômico. O *dia civil* se conta de meia-noite à meia-noite e comumente em dois períodos sucessivos de 12 horas cada um, embora os relógios dêem as horas de 0 a 24 horas.

A décima segunda hora do primeiro período, ou meio-dia, é o meio do dia civil e começo do dia astronômico, atrasado 12 horas sobre o tempo civil.

c) *Tempo sideral.* A órbita da Terra não sendo senão um ponto na imensidade do mundo estelar, o deslocamento da Terra ao redor do Sol não produz mudança apreciável no movimento diurno aparente das Estrelas. O tempo sideral medido pelo movimento aparente das Estrelas fixas não é, pois, sujeito às variações do tempo solar.

Dia sideral é o tempo que se escoa entre duas passagens consecutivas duma mesma Estrela, ou melhor, do ponto vernal (γ) pelo meridiano do lugar.

A divisão em horas, minutos e segundos se faz como para o tempo solar. A ascensão reta dum astro em sua passagem pelo meridiano marca o tempo sideral nesse instante.

Quando um astro passa pelo meridiano, a hora sideral é igual à sua ascensão reta α , pois o ângulo horário t é nulo.

O dia sideral vale 23 horas, 56 minutos e 4,09 segundos de tempo médio.

O dia solar é mais longo do que o dia sideral.

d) *Duração do ano sideral e ano solar.* Em virtude do movimento de translação que a Terra efetua ao redor do Sol, ou do movimento aparente deste ao redor daquela, o mesmo se projeta sempre sobre pontos diferentes da esfera celeste e, deslocando-se no mesmo sentido da rotação da Terra, de Oeste para Leste, perde um giro no intervalo de um ano.

É por esse motivo que nas $366 \frac{1}{4}$ passagens do ponto vernal ou dias siderais, que constituem um ano, pelo meridiano, só se dão $365 \frac{1}{4}$ passagens do Sol, ou *dias solares* verdadeiros.

Relação entre as diversas horas

- 1) $H_v = t \odot + 12 \text{ h.}$ A hora verdadeira é igual ao ângulo horário do Sol verdadeiro acrescido de 12 horas.
- 2) $H_o = t \odot - 12 \text{ h} - e.$ A hora verdadeira é igual à hora civil (média) somada algebricamente à equação do tempo (efeméride).
- 3) $H_v = h_o + e.$ Expressão da hora civil em função do ângulo horário do Sol e da equação do tempo.
- 4) $H_B = H_A + \lambda.$ A hora de um lugar B é igual à de outro A + a diferença de longitude λ entre ambos.
- 5) $H_l = H_o + (\lambda - F).$ A hora legal (relógio) em um lugar é igual à hora civil acrescida da diferença de longitude entre o lugar considerado (λ) e o eixo do fuso (F). Esta hora legal é a hora civil do eixo do fuso (no Observatório Astronômico da Escola de Engenharia de Porto Alegre, $\lambda - F$ vale $24^m 53^s 24$).
- 6) $H_l = t \odot + 12 \text{ h} - e + (\lambda - F),$ que permite achar a correção de um relógio.
- 7) $H_o \text{ de GRW} = H_o \text{ do lugar considerado} + \lambda \text{ (longitude).}$

O conhecimento dessa última hora é necessário para o cálculo de δ , e e outros valores obtidos das efemérides astronômicas, dadas para 0 hora tempo universal de Greenwich.

96 - Determinação da meridiana ou do azimute verdadeiro

Para determinar a orientação dos alinhamentos traçados no terreno, é necessário referir os ângulos planimétricos não à direção variável de uma linha arbitrária (direção magnética) tomada no terreno, mas a uma direção invariável.

Esta linha é a *meridiana* da estação ou, melhor, a intersecção dos planos do meridiano e do horizonte que passam pela estação considerada.

Esta direção, *imutável*, uma vez conhecida, será facilmente transportada para outros pontos ou vértices de um levantamento ou triangulação topográfica.

A direção da meridiana que passa por um ponto ou estação pode ser determinada pela bússola (nos levantamentos expeditos) e, mais precisamente, pelas observações astronômicas de Estrelas ou do Sol nos levantamentos a teodolito:

Entre os diversos processos empregados para a determinação astronômica da meridiana, destacam-se:

— Os baseados no método de *duas observações* do mesmo astro, *antes e depois* da passagem pelo meridiano, com diversas leituras, necessárias para a maior precisão da determinação, e os baseados no método de *uma só observação*.

a) *Método de duas observações.*

1) *Alturas correspondentes de uma Estrela.* Chama-se de *altura correspondente* ao mesmo ângulo sob o qual é visto um astro, antes e depois de sua passagem pelo meridiano do lugar.

A meridiana será fixada no terreno pelo azimute de um determinado ponto ou *mira* que se escolhe convenientemente no terreno. Os azimutes são contados em astronomia de zero a 360° , a partir do Sul, no sentido dos ponteiros de um relógio; em Topografia conta-se a partir do *Norte*.

Convenientemente instalado o teodolito, bem retificado, visa-se um ponto fixo *P* (torre, pára-raio, mastro, etc.) (Fig. 193) com zeros do

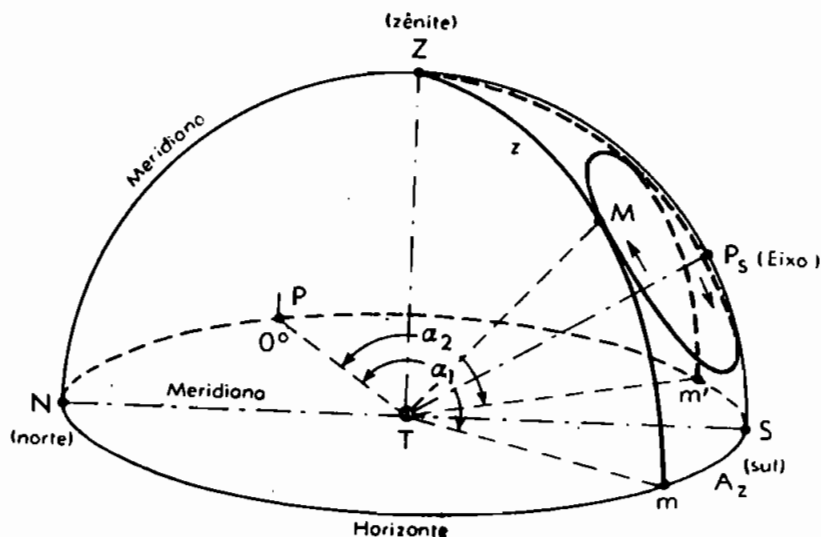


FIG. 193

limbo e vernier, coincidentes. Para as observações noturnas é preciso dotar o teodolito de iluminação própria ou indireta com lanternas e auxílio de um anteparo elíptico.

Visa-se após uma Estrela (M) na direção Sul aproximada que nem esteja muito alta, nem muito baixa sobre o horizonte e anota-se muito cuidadosamente o ângulo zenital z e o ângulo horizontal α_1 , respectivamente nos limbos vertical e horizontal; também num bom relógio ou cronômetro anota-se igualmente a hora.

Desde este momento deve-se tomar muito cuidado a fim de não tocar no círculo vertical do aparelho. Este deve ficar calado em altura, somente girando sobre o limbo horizontal até que a estrela reapareça no campo; mede-se então o novo ângulo horizontal α_2 e a bissetriz do ângulo observado

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

dará a direção Sul da linha meridiana do lugar que será então balizado no terreno.

Este processo permite boa determinação da meridiana, quando o produto dos coeficientes da *correção termométrica* e da *correção barométrica* for o mesmo por ocasião das duas alturas correspondentes. Esta condição é quase sempre suficientemente verificada, pois é raro no intervalo de duas observações haver mudança de temperatura. Quando houver uma variação de 10° na temperatura e 10 mm na pressão atmosférica, o erro não atingirá $5''$.

Havendo variações sensíveis, barométricas e termométricas, deve-se levá-las em conta nos cálculos, recorrendo a tabelas de correção.

Com um bom teodolito é conveniente tomar pares de valores da mesma Estrela ou do Sol, antes e depois da passagem pelo meridiano, a fim de que pela média das observações se obtenha mais exatamente a meridiana.

2) *Alturas correspondentes do Sol.* O método usado é idêntico ao empregado para as Estrelas devendo-se levar em conta as correções da *variação da declinação* do astro entre duas observações. Pela sua importância prática, detalhamos a seguir a técnica aconselhável. Instalado, próximo das 10 horas, o teodolito num terreno bem firme, nivelado cuidadosamente, acertados os zeros do limbo e vernier, aponta-se para um sinal afastado, bem visível (torre, etc.) calando o instrumento em azimute com a maior precisão. Aponta-se em seguida a luneta um pouco acima do disco solar, observando-se a imagem do Sol projetada em cartão branco próximo da ocular ou com prisma solar, em posição invertida, pois a luneta comumente inverte a imagem. Fixada a luneta com o parafuso de pressão move-se o instrumento em azimute com a alidade até que o fio vertical tangencie o bordo da imagem do Sol

ou com o parafuso da chamada em movimento uniforme acompanha-se a marcha do Sol até que sua imagem seja também tangente ao fio horizontal fixado de início, como se vê na (Fig. 194).

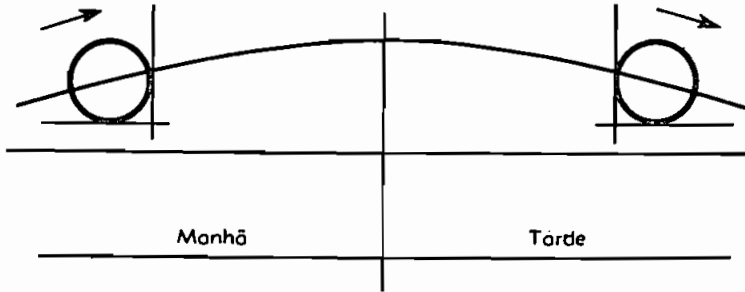


FIG. 194

No momento em que se produz esse duplo contato, abandona-se o parafuso de chamada e anota-se o ângulo zenital, o ângulo horizontal e a hora da observação correspondente.

Para maior exatidão pode-se restabelecer logo o contato do fio vertical com o mesmo bordo precedente e mantê-lo até o momento em que o fio horizontal se torne tangente ao outro bordo do disco solar e anotam-se novamente os valores do ângulo horizontal e hora; quanto ao ângulo vertical é evidentemente o mesmo que na primeira observação, pois a luneta não mudou de inclinação.

As médias das horas e ângulos horizontais lidos darão as observações correspondentes ao centro do Sol; não há na prática necessidade dessa segunda observação, a não ser como verificação.

A hora da passagem do Sol pelo meridiano de um lugar se obtém fazendo $t_{\odot} = 0$ na fórmula $H_1 = t_{\odot} + 12 h + (\lambda - F) - e$, ou seja:

$$H_1 = 12 h + (\lambda - F) - e.$$

Assim é que, a igual afastamento em hora da passagem relativa pelo meridiano, o Sol aparecerá de novo à mesma altura: dez a quinze minutos antes verifica-se a calagem do teodolito e retifica-se se necessário.

Dirige-se a luneta para o Sol pelo movimento horizontal, em azimute, e, sem mudança da inclinação fixada de manhã, aguarda-se o momento em que o astro apareça no campo da luneta.

Procura-se tangenciar o fio vertical com o bordo do disco solar oposto ao da manhã e aguarda-se o momento do contato com o fio horizontal, anotando-se o ângulo horizontal correspondente (Fig. 195).

Finalmente espera-se o contato do segundo bordo com o fio horizontal, conservando o fio vertical tangente ao mesmo bordo precedente e anotam-se o novo ângulo e hora.

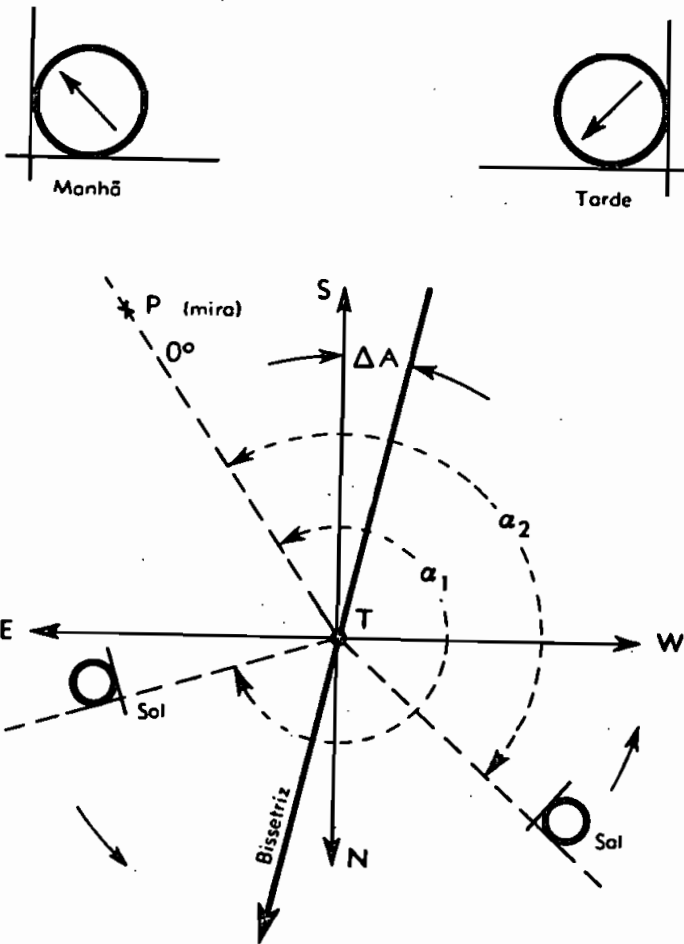


FIG. 195

Faz-se em seguida uma nova pontaria para o sinal *M* observado de manhã e se o vernier não coincidir com a leitura inicial se corrigirá da diferença verificada a média dos azimutes solares lidos.

Se não houvesse variação diurna da declinação do Sol, a semi-soma das médias das observações pela manhã e pela tarde nos daria o valor do azimute desejado.

3) *Correção devido à variação da declinação (δ_{\odot}) do Sol.* Para corrigir a variação da declinação empregamos a fórmula (F. Beuf).

$$\Delta A = \frac{\Delta \delta}{\cos \varphi \operatorname{sen} t} \quad (150)$$

em que $\Delta\delta$ é a variação da declinação do Sol entre a 1.^a e 2.^a observação, *ângulo horário* $t =$ à metade aproximadamente do intervalo de tempo das referidas observações e φ a *latitude* do lugar de observação.

A fórmula simplificada:

$$\Delta A = K \cdot \Delta\delta \quad (151)$$

permite com o auxílio das 2 tabelas que se seguem obter rapidamente a correção acima: nela $\Delta\delta$ é a variação da declinação em 24 horas (Tabela I) e K um fator, variável com a latitude e com o intervalo das 2 observações (Tabela II).

Para calcular a hora aproximada da 2.^a observação ($P \cdot M$), damos ainda na Tabela I o valor da *hora civil* correspondente à culminação do Sol às 12 horas verdadeiras (12 Hv), quando o Sol passa pelo meridiano.

Nos instrumentos cujos ângulos horizontais crescem no sentido dos ponteiros do relógio, isto é, da esquerda para a direita, a correção ΔA é acrescida à semi-soma das duas leituras extremas quando $\Delta\delta$ for *negativa*, e *subtraída* quando $\Delta\delta$ for *positiva*; o inverso se dá com instrumento cujo sentido de gradação do limbo for *inverso*, isto é, da direita para a esquerda.

4) Tabela I. *Variação diária da declinação do Sol ($\Delta\delta$) e hora civil (Hc) no meio dia verdadeiro.*

(Valores aproximados)

Mês — dia	$\Delta\delta$ (24 H)	Hora* civil às 12 Hv (Hc = Hv + e)	Mês — dia	(24 H)	Hora civil às 12 Hv (Hc = Hv + E)
Janeiro 1 ^o	+ 5'	12h 4m	Julho 1	— 4'	12h 4m
11	9	8	11	8	5
21	13	12	21	12	6
Fevereiro 1	+ 17'	12h14m	Agosto 1	— 15'	12h 6m
11	20	14	11	18	5
21	22	14	21	20	3
Março 1	+ 23'	12h13m	Setembro 1	— 22'	12h 0m
11	24	10	11	23	11h56m
21	24	7	21	23	53
Abril 1	+ 23'	12h 4m	Outubro 1	— 23'	11h50m
11	22	1	11	23	47
21	20	11h58m	21	21	47
Mai 1	+ 18'	57	Novembro 1	— 19'	11h44m
11	15	56	11	17	44
21	12	56	21	13	45
Junho 1	+ 8'	11h57m	Dezembro 1	— 9	11h49m
11	4	59	11	5	53
21	0	12h01m	21	0	11h58m

* Para ter a *Hora legal* (relógio) basta somar à hora civil: ($\lambda - F$); em P. Alegre: $\lambda - F = \sim 24^{\text{m}}53^{\text{s}}$.

5) Tabela II

Fator K

Graus	INTERVALO ENTRE AS DUAS OBSERVAÇÕES								
	2 h	3 h	4 h	5 h	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h
0°	0,16	0,16	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19	0,20	0,28
10	16	16	17	17	18	19	20	21	22
20	17	17	17	18	19	19	20	21	23
30	0,19	0,19	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
32	19	19	19	20	21	22	23	24	25
34	20	20	20	21	22	23	24	25	26
36	20	20	20	21	22	23	24	25	27
38	21	21	21	22	23	24	25	26	28
40	0,21	0,21	0,22	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,28
42	22	22	22	23	24	24	26	27	29
44	23	23	23	24	25	25	27	28	30
46	24	24	24	25	26	27	28	30	32
48	24	25	25	26	27	28	29	31	33
50	0,25	0,26	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,32	0,34
52	26	27	27	28	29	30	31	33	35
54	27	28	28	29	30	31	33	34	37
56	29	29	29	30	32	33	34	36	38
58	30	30	31	32	33	34	36	38	40
60	0,32	0,32	0,34	0,34	0,35	0,36	0,38	0,40	0,42

6) *Exemplo prático. Observações do Sol em Porto Alegre* ($\varphi = 30^{\circ}2'$), a 21 de janeiro, com um intervalo de 5 horas e 15^m (com teodolito Wild TI). Média das 5 observações da manhã, feitas de 3 em 3 minutos, sob ângulos verticais diferentes, e a partir das 10 horas $\alpha_1 = 264^{\circ}34'3$.

Média das 5 observações correspondentes da tarde, feitas nos mesmos ângulos verticais, a partir das 15 horas e 15^m $\alpha_2 = 82^{\circ}00'9$.

$$\text{Azimute aproximado } A'_N = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 173^{\circ}17'6.$$

Correção da declinação. $\Delta A = K \cdot \Delta \delta = 0,20 (+ 13') = 2'6$ (Tabelas I e II) e o azimute, a contar do Norte, obtido por observações do Sol, antes e depois da passagem pelo meridiano, será:

$$A_N = A'_N - \Delta A = 173^{\circ}17'6 - 2'6 = 173^{\circ}15'$$

valor este que deverá ser tomado no limbo para que a luneta do teodolito fique dirigida para o Norte geográfico.

As vantagens do emprego desse método de determinação são:

— simplicidade dos cálculos, graças ao emprego das tabelas dadas (I e II);

- aplicação possível com todo o instrumento de luneta mergulhante, embora não munido de círculo vertical, uma vez que a inclinação da luneta possa ser mantida fixa entre as duas observações;
- exigência apenas da *latitude aproximada*, que pode ser obtida de uma carta geográfica por interpolação;
- dispensa das correções da paralaxe e da refração, salvo, para esta última, em dia de grande variação de temperatura;

Os inconvenientes são:

- a duração de cada determinação;
- a necessidade de renunciar ao instrumento durante a determinação;
- os imprevistos do céu - uma nuvem pode prejudicar a segunda observação.

As observações do Sol, embora cômodas por serem feitas de dia, exigem cuidados, pois são visados os bordos e não o centro do Sol, a marcha do mesmo é rápida e, para observações de maior precisão, devem ser levadas em conta as correções de *paralaxe, semidiâmetro e refração*.

As observações com Estrelas, feitas à noite e com céu limpo, embora exigindo iluminação dos limbos, têm a vantagem de dar resultados mais precisos e dispensarem correções de semidiâmetro e da paralaxe, pois as Estrelas parecem pontos no espaço e estão a distâncias infinitamente grandes da Terra.

Tipo de caderneta a usar (Alturas iguais)

MERIDIANA Km Estação..... Ponto visado:.....
 Levantamento..... As. magnético:.....
 As. verdadeiro:.....
 Operador:..... Declinação:.....
 Top. ou Eng.º..... Calculador:..... Data:.....

Observações	Ângulos verticais	LESTE		OESTE		Ângulos médios $\frac{\alpha' + \alpha''}{2}$	Correções com o sol $K\alpha\delta$	Asimutes verdadeiros A_n
		Hora	Ângulo horizontal (α')	Hora	Ângulo horizontal (α'')			
Leste..... {	1							
	2							
	3							
	4							
	5							
		MÉDIA						
Oeste..... {	6							
	7							
	8							
	9							
	10							
MÉDIAS				MÉDIAS				

b) *Estrelas circumpolares.* São chamadas de *circumpolares* as estrelas cujas distâncias do pólo são menores do que a latitude φ do lugar. Como o pólo é, para cada lugar, elevado acima do horizonte de um ângulo igual à latitude, segue-se que as estrelas circumpolares completam seu movimento diurno acima do horizonte, isto é, *não se deitam* e pode-se observar suas duas passagens pelo meridiano.

Passagem superior e inferior, máxima elongação. Seja T a Terra (Fig. 196) um ponto no espaço, isto é, o centro da esfera celeste: P o pólo; $ABA'B'$ o círculo que descreve a estrela circumpolar, ao redor do pólo; Z o zênite; TP_sZ a projeção do meridiano; EW o horizonte; EZW o primeiro vertical.

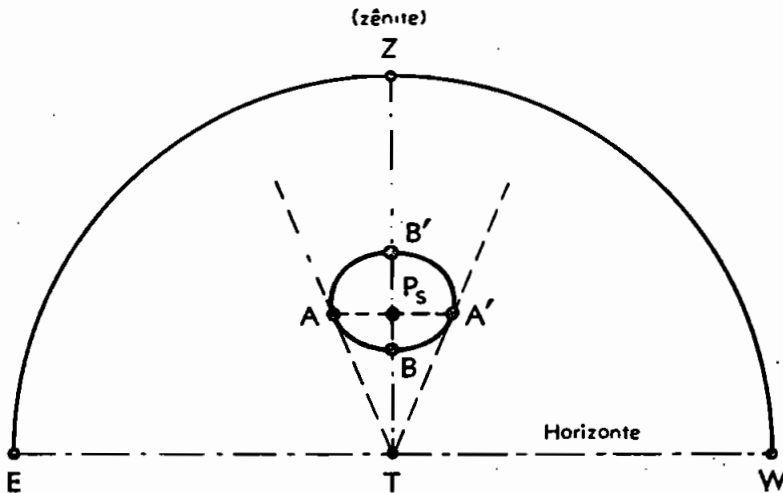


FIG. 196

Chama-se de *passagem superior* da estrela o ponto B' em que a mesma atinge o meridiano entre o pólo e o zênite; *passagem inferior* o ponto B em que a mesma, doze horas depois, passa pelo meridiano novamente, entre o pólo e o horizonte; A e A' são os pontos da *máxima elongação* ou da maior digressão; a estrela está o mais afastado possível do meridiano.

Os pontos de elongação máxima são particularmente interessantes para a determinação do meridiano. Se se escolhe uma estrela muito próxima do pólo se verá que, num tempo notável, próximo à máxima digressão, o astro se afasta ou se aproxima vagarosamente em direção ao meridiano. Praticamente o seu azimute pode ser mantido invariável durante alguns minutos pelo menos. É pois, um excelente e simples meio de traçar a meridiana.

Método de observação. Baseia-se na observação de uma estrela pouco antes até pouco depois (alguns minutos) da sua máxima elongação. A escolha da estrela deve naturalmente recair numa cuja declinação seja maior que a latitude do lugar, isto é, δ maior do que φ do mesmo sinal; para Porto Alegre as estrelas para essa observação deverão ter a declinação superior a 30° .

A hora em que uma estrela atinge a sua máxima elongação *Leste* é dada pela fórmula:

$$\theta = \alpha - t \begin{cases} \alpha - \text{ascensão reta} \\ t - \text{ângulo horário.} \end{cases} \quad (152)$$

e a máxima elongação *Oeste* pela fórmula:

$$\theta = \alpha + t$$

onde δ é obtido das efemérides astronômicas e t é dado pela fórmula:

$$\cos t = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \lambda} \quad (153)$$

O azimute correspondente, nessa ocasião, será dado pela fórmula:

$$\text{sen } A_W = \pm \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \quad (154)$$

que dá o azimute da elongação ocidental, havendo uma elongação oriental simétrica da ocidental, em relação ao meridiano no azimute:

$$A_E = 360^\circ - A_W$$

Para aplicação deste método é necessário conhecer-se a latitude φ do lugar da observação com a aproximação de minuto.

A *altura* (h) ou *distância zenital* (z) da estrela, quando em máxima elongação, será dada pela fórmula:

$$\text{sen } h = \cos z = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \delta} \quad (155)$$

elemento que serve para identificar a estrela observada.

c) *Método de uma observação.*

1) *Observação de uma estrela numa posição qualquer.* Vimos que o azimute de um astro é o ângulo que faz com o meridiano o plano passando pela vertical do lugar e pelo astro; este ângulo é representado por A_s .

$P_s Z$ é a colatitude da estação que é igual a c ; $P_s M$ é a distância polar do astro que é igual a Δ ; ZM é a distância zenital z ; $ZP_s M$ é o ângulo horário t ; $P_s ZM$ é o azimute A_s se o astro é visto no ocidente

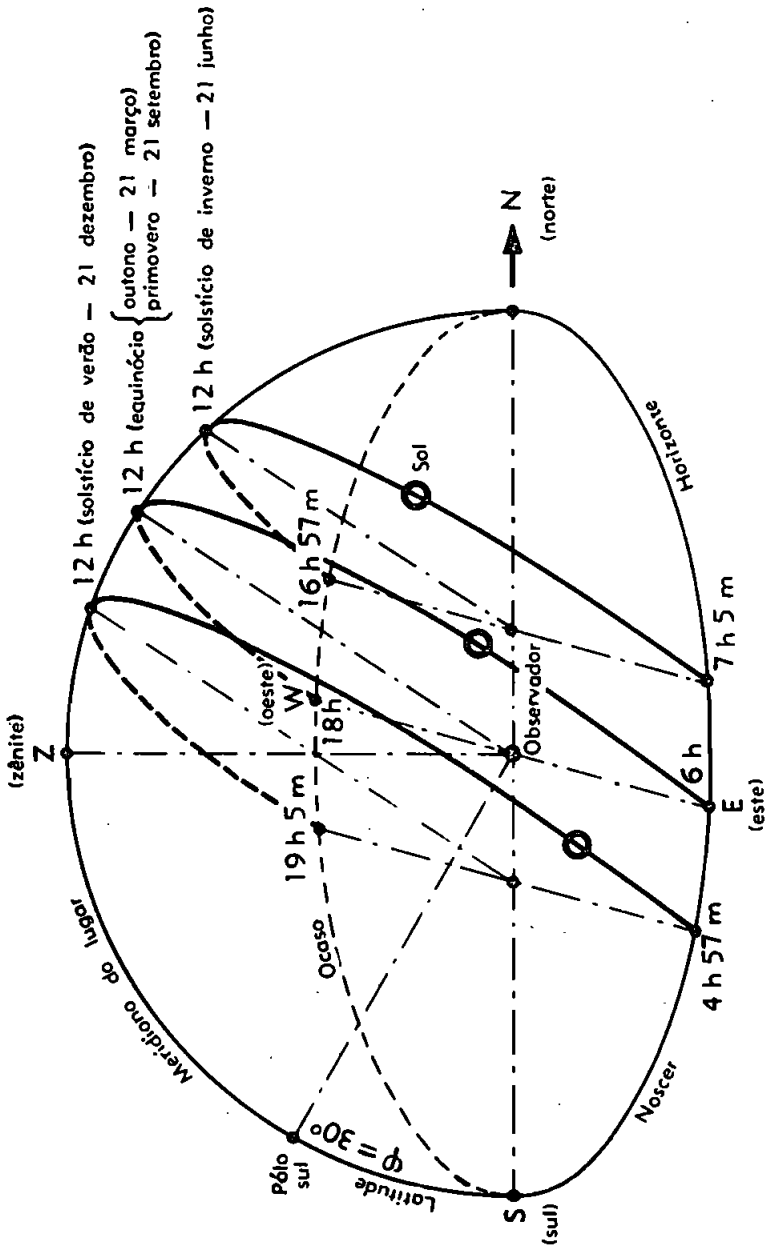


FIG. 197

do lugar e seu replemento ($360 - A_s$) ou *azimute* A'_s , se o astro é visto no oriente.

Para calcularmos A_s ou A'_s , precisamos resolver o triângulo esférico ZMP_s , cujos lados são, respectivamente:

Δ = distância polar, obtida pelas efemérides astronômicas = $90^\circ - \delta$; sendo δ a declinação do astro observado.

c = colatitude da estação $90^\circ - \varphi$ (latitude); φ se avalia suficientemente sobre uma carta geográfica ou por qualquer outro meio.

Resta obter a distância zenital (z) ou seu complemento (h) ângulo de altura, medido com o teodolito de observação.

Qualquer que seja o processo adotado, deve-se corrigir quer a altura aparente (h') quer a distância zenital aparente (z') do erro devido à refração atmosférica (R) e se terá:

$$\begin{aligned} h &= h' - R \\ z &= z' + R \end{aligned}$$

Uma vez conhecidos Δ , c e z ou δ , φ e z , resolve-se o triângulo ZP_sM e deduz-se o azimute verdadeiro A_s . Para isso pode-se empregar a fórmula seguinte:

$$\operatorname{tg} 1/2 A_s = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (p - \varphi) \cdot \cos (p - z)}{\cos p \cdot \cos (p - \delta)}} \quad (156)$$

sendo

$$p = 1/2 (\varphi + \delta + z)$$

O sinal $+$ é para astro observado a oeste e o sinal $-$ para o astro observado a leste, caso em que se deve somar 360° ao resultado, para se ter o azimute contado no sentido comum de contagem.

Para facilitar esta determinação do meridiano pela observação de estrelas, deve-se possuir as *tábuas de posição das estrelas* de uma efeméride astronômica.

2) *Observação do Sol numa posição qualquer.* O método não difere do dado acima para uma estrela qualquer.

Trata-se sempre de resolver o triângulo esférico ZMP_s (zênite — pólo — astro) para deduzir o azimute ou seu replemento conforme o azimute for observado no ocidente ou oriente da estação.

Mas a proximidade relativa do Sol e a grandeza aparente do disco solar obrigam a juntar à correção de refração, duas outras correções quando se procura obter a *distância zenital* ou a *altura* verdadeira.

Destas duas correções, uma é relativa à *paralaxe*, outra ao *semi-diâmetro* do Sol.

Em lugar de fazer observações sobre os bordos opostos, é preferível observar um dos bordos e corrigir a mais ou menos, conforme o bordo observado, o valor do semi-diâmetro dado nas efemérides.

Uma vez conhecida a altura ou distância zenital aparente do centro do astro, aplica-se a correção:

$$\begin{aligned} h &= h' - R + p \\ z &= z' + R - p \end{aligned} \quad (157)$$

na qual R é a correção de *refração* e p a correção de *paralaxe*.

A fórmula a empregar para o cálculo do azimute astronômico é a seguinte:

$$\cos A_s = \cotg z \operatorname{tg} \varphi - \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} z \cdot \cos \varphi} \quad (158)$$

em que

- A_s = azimute a partir do sul
- z = distância zenital absoluta do astro observado
- φ = latitude do lugar de observação (carta geográfica)
- δ = declinação do astro (efeméride).

Querendo-se o azimute topográfico a partir do norte, a fórmula, idêntica, a empregar é a seguinte:

$$\cos A_N = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} z \cdot \cos \varphi} - \cotg z \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (159)$$

Correções:

$$\text{Refração: } R = 60'',154 = \operatorname{tg} z' \frac{P_o \cdot 1}{760 \cdot 1 + 0,00366 \cdot t} \quad (160)$$

$$\text{Paralaxe: } p = \pi \operatorname{sen} z' \quad (161)$$

(sendo π a paralaxe horizontal, cujo valor médio é $8'',80$).

Semidiâmetro (correção em azimute)

$$\operatorname{tg} dA = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{sen} z'} \quad (162)$$

sendo:

- z' — a distância zenital observada
- P_o — a pressão atmosférica lida e reduzida a 0°
- t — a temperatura ambiente
- r — o semidiâmetro, dado pelas efemérides.

3) *Exemplo prático. Determinação do azimute por observações do Sol* (Trabalho de aluno).

Na Avenida das Nações do Parque Farroupilha de Porto Alegre ($\varphi = 30^{\circ}02'$ Sul) foram feitas observações do Sol em 8 de junho de 1959, pelos alunos do 2.º ano de Engenharia Civil, por nós orientados, e dos relatórios entregues destacamos o que vem detalhado abaixo. *Dados fornecidos do Anuário do Observatório Nacional (1959):*

Declinação do Sol (δ) a 0^h tempo universal $+ 22^{\circ}45'16'',5$
 Variação horária $\Delta\delta = + 14'',48$
 Paralaxe horizontal (π) = $8'',7$

PORTO ALEGRE — Parque Farroupilha

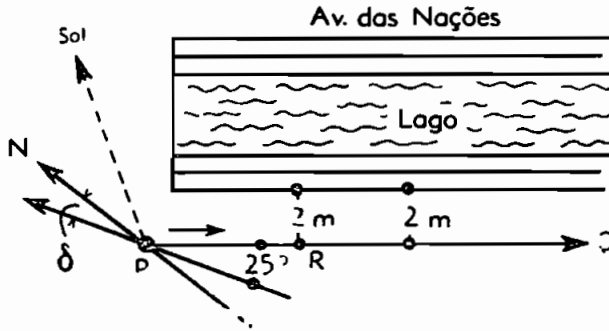


FIG. 198

Valores lidos pelo aluno na estação P:

Alinhamento PQ, com teodolito Vasconcellos.

Visadas Estação Q	Limbo horizontal 0°00'	Limbo vertical (alturas)	Cronômetro (hora legal)
1.ª Obs. sol $\frac{1}{10}$	231°40'	+ 35°7'	11 h 34 m
2.ª Obs. sol $\frac{01}{1}$	232°00'	+ 36°2'	11 h 35 m
Valores médios =	231°50'	+ 35°34'.5	11 h 34.5 m

Valores médios

Pressão atmosférica (aneróide) (H) 766,4 mm

Temperatura do ar (t) = 15°4

Azimute magnético do alinhamento PQ = 155°

Cálculos (feitos a máquina)

1 - *Paralaxe* ($p = \pi \cdot \text{sen } z'$)

$$\pi = 8'',7 \quad \text{e } z' = 90^\circ - 35^\circ 34' 30'' = 54^\circ 25' 30''$$

donde $p = 8'',7 \times \text{sen } 54^\circ 26' = 7'',08$

2 - *Refração* (R)

$$R = 60'',15 \cdot \text{tg } z' \cdot \frac{H}{760} - \frac{1}{1 + 0,00366 \cdot t} = 80'',27 = 1'20'',3$$

3 - *Distância zenital compensada* (z)

$$z = z' - R + p = 54^\circ 25' 30'' - 1'20'',3 + 7'',1$$

$$z = 54^\circ 24' 16'',8$$

4 - *Declinação do Sol, na hora da observação*

Hora	}	Longitude λ do eixo do fuso	3 h
		Hora legal (cronômetro)	11 h 34 m 30 s
		Hora civil GRW	<u>14 h 34 m 30 s = 14,575 h</u>

Declinação do Sol (δ_{\odot}) a 0^h de 8 de junho de 1959:

$$= 22^\circ 45' 16'' 50$$

variação horária ($\Delta\delta_{\odot}$)

$$(+ 14'' 48)$$

variação total

$$14'' 48 \times 14 \text{ h, } 575 = + \frac{3' 31'' 05}{\delta_{\odot} = + 22^\circ 48' 47'' 55}$$

Com todos os elementos calculados, pode-se aplicar a *Fórmula de Borda*, que fornece o *Azimute*, contado da ponta sul.

$$\cos A_{\odot} = \frac{\text{sen } \delta_{\odot}}{\cos \varphi \cdot \text{sen } z} + \text{tg } \varphi \cdot \text{ctg } z \text{ (ponta norte)}$$

$$\cos A_{\odot} = \frac{\text{sen } 22^\circ 48' 48''}{\cos 30^\circ 02' \cdot \text{sen } 54^\circ 24' 17''} + \text{tg } 30^\circ 02' \cdot \text{ctg } 54^\circ 24' 17''$$

$$\cos A_{\odot} = \frac{0,38773}{0,86573 \times 0,81315} + 0,57813 \times 0,71581$$

$$\cos A_{\odot} = 0,5507776 + 0,4138312 = 0,9646088$$

Para este co-seno temos os ângulos $+\alpha$ e $-\alpha$; como a determinação foi feita pela manhã, o Sol deverá estar à direita do norte, portanto o valor que satisfaz é o de $-\alpha$.

Então

$$A_{\odot} = -15^{\circ}17'$$

O azimute de PQ (Az_{PQ}) obtém-se pela relação:

$$AZ_{PQ} = 360^{\circ} - (\text{âng. Horiz} + A_{\odot})$$

substituindo:

$$Az_{PQ} = 360^{\circ} - [231^{\circ}50' + (-15^{\circ}17')] = 143^{\circ}27'$$

e o azimute magnético de PQ :

$$Az_m = 180^{\circ} - 25^{\circ} = 155^{\circ}$$

donde a declinação magnética:

$$Dm = Az_{PQ} - Az_m PQ = 11^{\circ}33'W$$

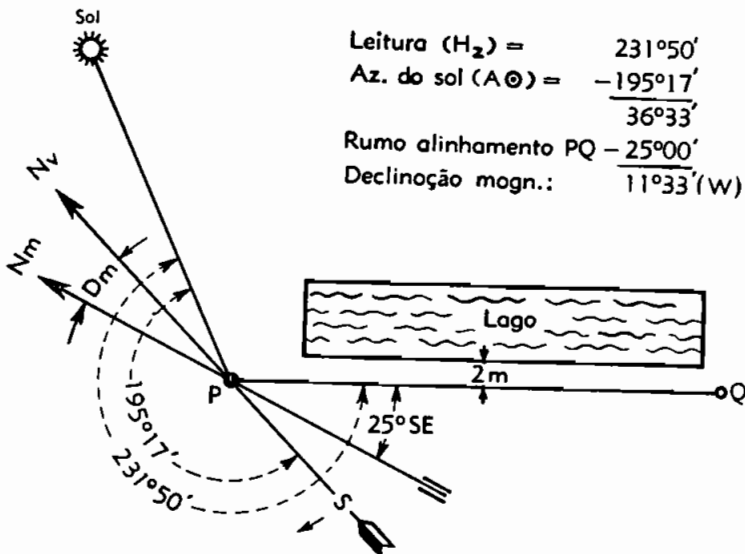


FIG. 199

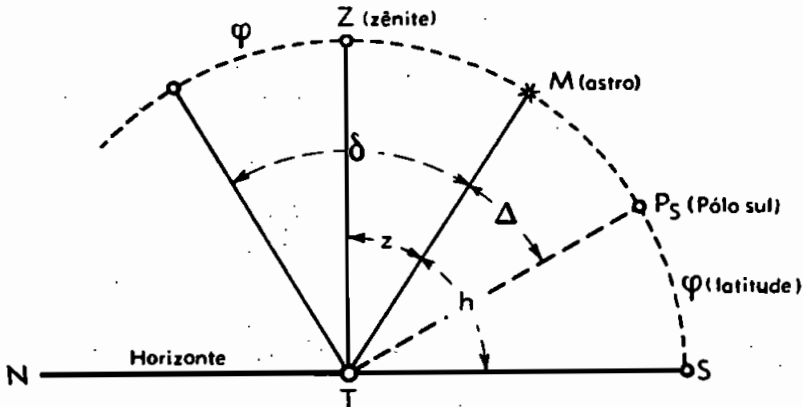
97 – Determinação da latitude

Existem diversos métodos para determinar a latitude:

- 1.º – Pelas passagens no meridiano de estrelas circumpolares;
- 2.º – Pelas observações circummeridianas;
- 3.º – Pelas observações extrameridianas;
- 4.º – Pela observação da altura (ou distância zenital) meridiana de um astro qualquer (Sol ou estrelas);
- 5.º – Pelas observações no 1.º vertical, etc.

Nos limitaremos a expor o 4.º método, pois é o mais simples e permite determinar a latitude com suficiente aproximação para a determinação da meridiana, coordenada necessária nos trabalhos topográficos; quando se dispõe de uma boa carta geográfica da região, pode-se obter essa coordenada por interpolação.

a) *Determinação da latitude*, uma vez conhecida a direção da meridiana, a declinação do astro (efeméride) e medida da altura (h) na passagem pelo meridiano.



Alturo do pólo = latitude do lugar

FIG. 200

Da (Fig. 200), em que vem representado o plano meridiano, recordamos que:

- δ – declinação do astro (efeméride)
- Δ – distância polar = $90^\circ - \delta$
- φ – latitude procurada
- h – altura do astro = $90^\circ - z$ (teodolito).

A fórmula fundamental da Astronomia, deduzida do triângulo de posição (zênite-pólo-astro), é a seguinte:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

No meridiano, o ângulo horário $t = 0h$, e assim

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta)$$

pois $\cos t = 1$ e

$$z = \pm (\varphi - \delta)$$

Se desdobrarmos esta fórmula para os dois casos em que o astro culmine ao *Norte* ou ao *Sul* do zênite, obteremos:

$$z_s = \varphi - \delta_s \quad (163)$$

$$Z_n = \delta_n - \varphi \quad (164)$$

segue-se daí que podemos obter a latitude pelas duas fórmulas:

$$\varphi = \delta_s + z_s \quad \text{e} \quad \varphi = \delta_n - Z_n \quad (165)$$

que podem ser facilmente verificadas na (Fig. 200).

Se não for conhecida senão aproximadamente (bússola declinada) a direção do meridiano, a técnica aconselhada é a de acompanhar em altura a marcha da estrela em ascendência até não variar mais, ocasião que corresponde à passagem meridiana, pois daí em diante começará a decrescer.

Se o astro observado for o Sol, devemos advertir que sua maior altura não se dará no meridiano, e sim próximo dele. Todas as observações feitas devem ser corrigidas da *refração* astronômica, *paralaxe* e *semidiâmetro*, este último no caso do Sol.

Para maior exatidão da determinação de φ , podemos observar duas estrelas, uma culminando ao Norte e outro ao Sul do zênite e a fórmula a empregar será a obtida da fórmula anterior (165) ou

$$\varphi = \frac{\delta_s + \delta_n}{2} + \frac{Z_n - Z_s}{2} \quad (166)$$

Fica destarte corrigido o erro de zênite instrumental, pois se mede somente a diferença das distâncias zenitais ou alturas das estrelas do par escolhido.

Pelas estrelas a determinação será mais exata, pois o ponto luminoso é um único e as observações podem ser feitas a qualquer hora da noite, o que não acontece com o sol, cuja observação somente é possível ao meio-dia aparente.

98 — Determinação da longitude

A determinação desta coordenada foi sempre sério e penoso problema, nunca se conseguindo valores tão seguros como para a latitude.

A influência direta da marcha dos cronômetros sobre o resultado sempre caracterizou os trabalhos para longitude, com uma série de dificuldades e imperfeições.

Hoje em dia o emprego da radiotelegrafia veio extraordinariamente facilitar este trabalho, e torná-lo quase isento da influência da marcha dos cronômetros, dando, assim, maior segurança no resultado final da coordenada.

Não aconselhamos, portanto, a execução da longitude sem o emprego de um aparelho portátil de radiotelegrafia, que apanhe os sinais horários dos diversos Observatórios Astronômicos.

Para a recepção da hora pela radiotelegrafia encontra-se perfeito esclarecimento no Anuário do Observatório Nacional do Rio de Janeiro, publicação que é distribuída gratuitamente aos interessados.

O aparelho de radiotelegrafia deve ser portátil e perfeitamente calibrado para ondas curtas e longas de 10 a 50 e 500 a 1 200 metros, o que presentemente não é difícil obter-se. Deve ser ele também de consumo resumido para o uso de baterias secas, quer para o filamento, quer para a alimentação de placa.

É necessário também o emprego de um cronômetro sidereal de algibeira que tenha sua marcha inferior a um segundo em 24 horas, e seja contador especial (rataplan).

A longitude de um lugar em relação a outro é o valor angular existente entre os meridianos que passam pelos mesmos, ou melhor, é a diferença de horas entre eles.

Para conhecimento, portanto, da longitude entre dois pontos é bastante e suficiente estabelecer a diferença exata de horas, minutos e segundos, entre os mesmos lugares, num dado momento. Para isto o método mais cômodo e seguro, é utilizar-se dos sinais horários de um Observatório Astronômico.

O Observatório do Rio de Janeiro, por exemplo, transmite diariamente em radiotelegrafia, sinais convencionais das 21 horas às 21 horas e 20 minutos do tempo legal.

Durante este tempo é possível apanhar e registrar no cronômetro diversos sinais (tops). Um só deles é suficiente para estabelecer-se a diferença de horas, porém é sempre conveniente registrar pelo menos 6 tops, a fim de controlar o serviço.

Técnica do método: Para que a diferença de horas fique isenta quase que em absoluto da marcha do cronômetro, e portanto, para que o método ofereça toda sua eficiência, necessário e indispensável é que o recebimento dos sinais horários caia entre duas séries de determinações de hora local. Depois de algum exercício, facilmente se con-

segue a determinação de hora local, 10 minutos antes e 10 minutos após a do recebimento dos sinais horários. É esta uma condição essencial para o método, pois compreende-se que tendo o cronômetro uma diferença de apenas um segundo em 24 horas, fará ele dentro do pequeno espaço de tempo de 10 minutos, uma desprezível alteração.

Uma vez feitas as determinações de hora local e registrados os sinais horários, conforme ficou dito, para se ter a longitude, é bastante estabelecer a diferença entre a hora do sinal recebido e a hora que marcava o cronômetro no momento do mesmo sinal horário.

Esta operação não oferece dificuldades e para esclarecê-la basta o seguinte exemplo do cálculo para longitude feito pelo saudoso Professor João Lüderitz:

Porto Lucena, 6 de janeiro de 1932.

Transformação da hora legal do Rio de Janeiro, para hora sideral de Greenwich, no momento do sinal horário.

Sinal horário recebido	21 ^h 20 ^m 00 ^s 00
Diferença de fuso	+ 3 ^h 00 ^m 00 ^s 00
Hora civil de Greenwich	24 ^h 20 ^m 00 ^s 00
Correção <i>K</i> (hora média para hora sideral)	+ 3 ^m 59 ^s 84
Tempo decorrido após meio dia de Greenwich	24 ^h 23 ^m 59 ^s 84
Hora sideral a 0 ^h de Greenwich em 6-1-1932	+ 6 ^h 57 ^m 29 ^s 44
	31 ^h 21 ^m 29 ^s 28
	- 24 ^h 00 ^m 00 ^s 00
Hora sideral em Greenwich no momento do sinal	7 ^h 21 ^m 29 ^s 28
<i>Diferença de horas:</i>	
Hora sideral registrada no cronômetro ...	3 ^h 39 ^m 50 ^s 80
Estado absoluto do cronômetro (ΔT)	+ 1 ^m 33 ^s 89
Hora sideral local no momento sinal horário	3 ^h 41 ^m 24 ^s 69
Hora sideral em Greenwich no momento do sinal horário	7 ^h 21 ^m 29 ^s 28
Longitude de Porto Lucena (em tempo) ..	3 ^h 40 ^m 04 ^s 59

Transformando em arco:

3^h 40^m 04^s 59 = 55°01'08''85 a Oeste de Greenwich — que é a longitude de Porto Lucena.

Nota: Hoje, com a transmissão de sinais horários pelo rádio, obtidos de diversas estações, ligadas a Observatórios Astronômicos, tais como a Rádio Relógio, do Rio de Janeiro, Rádio Belgrano, de Buenos Aires, Rádio da U.F.R.G.S., em Porto Alegre, e outras, o problema ainda tornou-se mais fácil e de resultados mais seguros.

§ 19 – Instrumental e processos do desenho da planta

99 – Instrumental de cálculo e desenho

a) *Mesa de desenho e tecnigrafo.* Grande é o número de tipos de mesas empregados para o desenho de plantas topográficas ou outros, com pranchetas de madeira compensada e suportes de madeira, ferro, ou mistos, mas sua escolha precisa ser bem orientada.

O ajuste da mesa deve ser suave e fácil, tanto em inclinação como em altura; a fixação da prancheta em qualquer posição deve ser per-

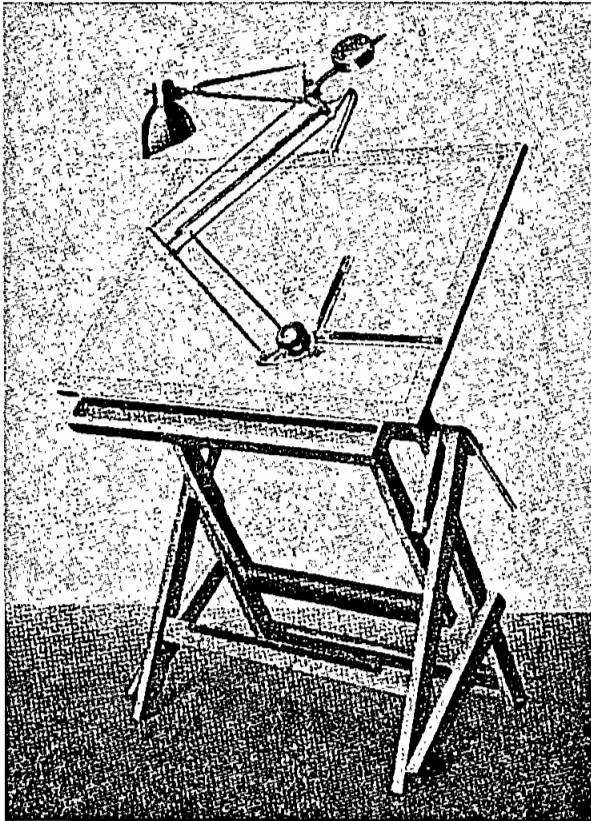


FIG. 201

feita e independente do emprego de molas, havendo ausência de desgastes ou perigo de tombamento; a construção da armação e da prancheta deve ser esmerada, para que não haja empeno ou falta de apoio.

A mesa de desenho, *Sistema Isis* (Fig. 201) é toda de madeira, com equilíbrio compensado, de funcionamento suave e fixação segura por movimento manual ou pedal e é fabricada com pranchetas de 80 x 110 cm, 100 x 150 cm ou 125 x 200 cm. Podem ter ainda suporte metálico, com equilíbrio perfeito em qualquer posição.

Para o traçado de linhas horizontais podem ser empregadas as régua-tê, as régua ajustadas e fios móveis por roldanas e os *Tecnígrafos*.

Estes últimos são aparelhos práticos, eficientes e cômodos, produzindo trabalho rápido e de precisão.

Na (Fig. 201) a prancheta é montada com um tecnígrafo que permite o traçado de linhas horizontais, verticais, ou com uma inclinação qualquer em toda a sua extensão e, ainda mais, dotada de iluminação adequada para um bom trabalho.

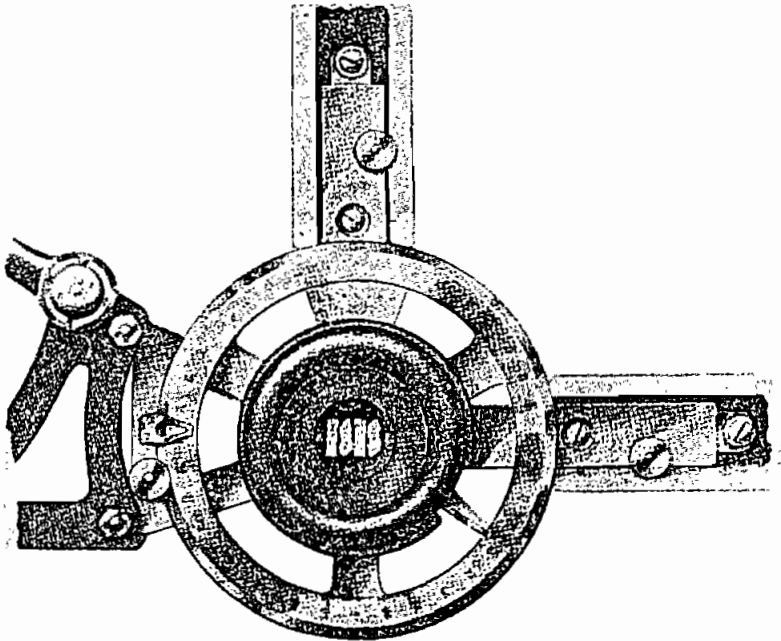


FIG. 202

Os tecnígrafos são equipados com goniômetro topográfico com vernier para a marcação de ângulos com a aproximação de um minuto (Fig. 202).

Todos os tecnógrafos são submetidos a um exame de precisão, antes de deixar a fábrica, a fim de merecer a devida confiança no traçado de linhas paralelas, tanto horizontais como verticais.

b) *Coordenatógrafo*. Para a demarcação precisa de abscissas e ordenadas em uma plança, em papel especial branco colado na prancheta, é conveniente o emprego do coordenatógrafo ortogonal (Fig. 203).

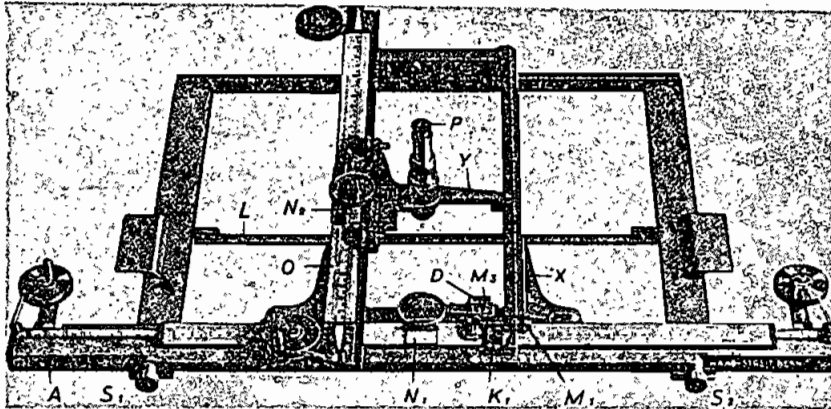


FIG. 203

Trata-se de um aparelho tipo *Original – Haag – Streit*, formato de 50 x 40 cm, com litas graduadas móveis, permitindo o ajuste certo correspondente aos valores das coordenadas a demarcar. Precisão de marcação 1/20 mm com microscópio de observação.

Escalas normais usadas no coordenatógrafo: 1:250, 1:500, 1:1 000 e 1:2 000.

Peso do instrumento – 16 kg.

Descrição (Fig. 203).

- | | |
|--|--|
| $S_1 - S_2$ – Parafusos de chamada, micrométricos. | K_1 – Pressão do carro das abscissas. |
| A – Régua das abscissas. | M_1 – Micrômetro do carro das abscissas. |
| O – Régua das ordenadas. | P – Microscópio – agulha punção. |
| X – Carro da régua das abscissas. | $N_1 - N_2$ – Verniers de vidro. |
| Y – Carro da régua das ordenadas. | |

Há coordenatógrafos de maiores dimensões, por exemplo, para abscissas até 670 mm e ordenadas até 1 000 mm e outros tipos, bem como polares para diversos raios de ação e precisão de marcação de 1/10 e 1/20 de mm.

É lógico que para o emprego de um coordenatógrafo, o papel para o desenho deve ser indeformável; um dos tipos empregados na prática é o papel Metrograf, compensado com folhas de alumínio, que não sofre deformação devido à diferença de temperatura, ou de umidade, existindo em fôlhas com as dimensões de 70 x 100 cm, ou em rolos com 70 cm de largura.

c) *Pantógrafo de precisão.* Para a reprodução de plantas, mapas, desenhos em escalas reduzidas, ampliadas ou iguais, o aparelho usado é o pantógrafo, invenção do Padre jesuíta *Scheiner*.

A *Casa Coradi*, de Zurich, se especializou em construção de grande número de aparelhos, planímetros, coordenatógrafos e pantógrafos de precisão.

A (Fig. 204) apresenta um pantógrafo de Coradi, com pólo fixo; as varas 2, 3 e 4 são metálicas e ocas, de secção retangular, sendo articuladas entre pontas, com o que se consegue um movimento suave e leve.

As articulações de *A* e *B* são montadas sobre corredejas que podem deslizar sobre as respectivas varas ajustando-se nos pontos convenientes por meio de parafusos de pressão e de coincidência.

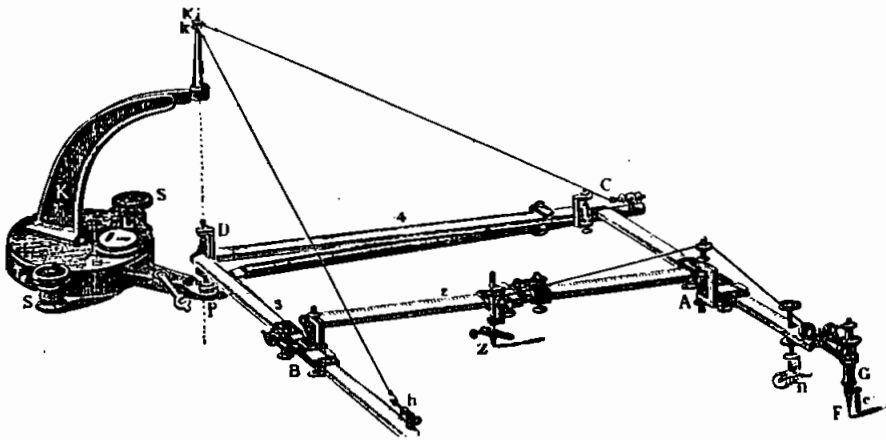


FIG. 204

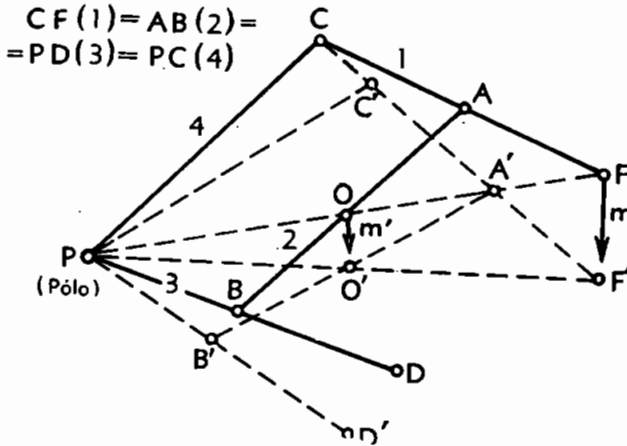
Também o lápis traçador é montado em uma corredeja desta classe. As três varas nas quais deslizam estas corredejas são divididas em milímetros e numeradas de tal modo que as leituras dos verniers correspondentes dão as distâncias respectivas dos pontos *A*, *B* e *Z* às articulações *C*, *D* e *B*.

O suporte do pantógrafo é constituído por uma peça de ferro muito pesada *K* que, no extremo em que se apóia na mesa, tem uma pequena cavidade *P* e uma rosca cilíndrica no extremo superior; por meio do

nível L se consegue que o ponto médio da cavidade P e o eixo da rosca superior estejam sobre a mesma vertical. O extremo inferior de forma esférica, na cavidade P da articulação D , e por meio dos arames de aço $K'h$ e $K'c$ suspendem-se os extremos das varas articuladas em D .

Em condições normais, consegue-se com esse pantógrafo uma precisão de 0,1 mm, o que corresponde a uma exatidão de transporte de 1:5 000. Os pantógrafos permitem uma graduação das varas para as proporções de $1/20$, $1/12$, $1/10$, $1/8$, $1/6$, $1/5$, $1/4$, $1/3$, $2/5$, $1/2$, $3/5$, $2/3$, $3/4$ e $4/5$ e um ajuste certo por outra escala milimétrica, para introduzir qualquer proporção desejada ao trabalho.

Teoria. Os elementos fundamentais do pantógrafo são as quatro varas horizontais (Fig. 205) todas iguais: $PC = CF = PD = AB = L$.



As graduações iguais em P , A e B situam-se nas réguas CF , PD e AB , respectivamente. Com o auxílio das graduações pode-se dispor o pantógrafo em condições de ser usado, desde que faça-se: $PB = CA = BO$; assim a posição da vara BA é paralela à PC e o lápis traçador em O se encontra sobre a diagonal PF , porque os triângulos PBO e FAO são semelhantes e dessa semelhança resulta:

$$\frac{PO}{PF} = \frac{PB}{PD} \quad (167)$$

No caso de *redução* de uma planta, fixado o ponto P como pólo, se recorrermos com o estilete em F o contorno da figura geométrica, o traçador (lápis) em O descreverá uma figura homóloga, na mesma relação em que foram dispostas as graduações, como passamos a demonstrar para um ponto.

Se o estilete percorrer o segmento FF' ou m , o traçador percorrerá o segmento paralelo OO' ou m' , com o movimento das varas na indicação tracejada; necessário torna-se porém, achar os comprimentos $PB = CA = BO = x$, de acordo com a razão de redução, isto é, na relação m/m' desejada.

Da semelhança dos triângulos $PF'F'$ e POO' resulta

$$\frac{m}{m'} = \frac{PF}{PO} = \frac{CF}{PB} = \frac{L}{x}$$

donde

$$x = \frac{m'}{m} L$$

Se fizermos a relação $\frac{m'}{m} = \frac{1}{n}$, virá ainda

$$x = \frac{1}{n} L$$

No caso de *ampliação*, a técnica é a mesma, somente com a inversão do estilete em O e traçador em F .

d) *Régua de cálculo*. A régua de cálculo serve para efetuar com precisão suficiente, na maioria dos casos da prática, multiplicações, divisões e operações derivadas, bem como problemas correntes, às vezes bastante complicados, substituindo, assim, o uso de tabelas e diagramas.

Datam de bem longe as experiências feitas para a construção de régua de cálculo e dizem terem sido os chineses os primeiros a estudar este assunto. Resultados satisfatórios, porém, baseados sobre pesquisas científicas, foram conseguidos por *Edmundo Günther*, professor do Gresham College, em Londres, em 1626. Mas, o seu aparelho exigia o emprego de um compasso. O mérito de ter construído a primeira régua com corredeira coube ao inglês *Wingsgate*, um ano mais tarde. Um último e importante melhoramento trouxe à régua, em 1851, o tenente de artilharia da França, *De Metz*, com a invenção do cursor ou retículo móvel, indispensável para a resolução de problemas complexos.

A régua de cálculo é uma representação ou transformação gráfica da tábua de logaritmos de Briggs, substituindo-a efetivamente, no uso, quando não é exigida grande precisão.

Há um grande número de tipos de régua, correntemente com o comprimento médio de 30 cm (unidade logarítmica de 25 cm), tanto para as operações enumeradas (régua "Universal"), como especiali-

zadas, para construção de concreto armado, cálculo taqueométrico, para engenheiros eletricitas, químicos, comerciantes, etc., e, finalmente, vários tipos de régua de bolso com a unidade logarítmica de 12,5 cm.

As régua de cálculo e de desenho que podemos atestar como de ótima qualidade e perfeição de acabamento, são fabricadas no País, desde 1943, por *Archimedes*, e cuja exatidão invariável é atestada pelo I.N.T. (Instituto Nacional de Tecnologia) do Rio de Janeiro.

Os tipos de régua de cálculo, que *Archimedes* fabrica (tipo clássico 25 cm) são:

Universal (sistema Rietz), Concreto I (1 200/1 500), Concreto II (1 400/1 500), Química, Topográfica, Log-Log (Darmstadt), Eletro e Bolso-Universal 15 cm.

Suas *escalas de redução* de secção triangular muito usadas em topografia pela sua nitidez e exatidão, contem as escalas:

n.º 1 — 1:20, :25, :50, :75, :100, :125

n.º 2 — 1:100, :200, :250, :300, :400, :500

n.º 3 — 1:20, :25, :33 $\frac{1}{3}$, :50, :75, :100

n.º 4 — 1:500, :1 000, :1 250, :1 500, :2 000, :2 500

Poleg. — 3/32, 3/16, 1/8, 1/4, 1/2, 3, 16.

1) *Régua de cálculo universal Nestler*. Este tipo de régua de cálculo Universal, construído com muito esmero e precisão, presta ótimo serviço aos topógrafos, agrimensores e engenheiros, nos cálculos em geral, sendo, por conseguinte, recomendável seu emprêgo.

Todas as escalas trigonométricas desta régua tem a unidade logarítmica de 25 cm, vantagem importante pela maior precisão, em comparação com as que tem estas escalas na unidade de 12,5 cm.

Por conseguinte se obtém com esta régua um grau uniforme de precisão para os cálculos trigonométricos e taqueométricos. Para uso nos escritórios há ainda as de 50 cm e de 2,50 m de comprimento. Todas as operações são mecânicas e efetuam-se sobre comprimentos logarítmicos. A aproximação dos resultados é, em geral, 1:1 250.

Descrição. As partes componentes da régua (Fig. 206) são as seguintes:

1.º — *Corpo ou Barra (B)* da régua, tendo na face superior 4 escalas; na inferior constantes diversas que muito auxiliam os cálculos; na interior uma escala em cm, que com a da correção (C) permite medidas até 56 cm, e nos bordos laterais, uma em bisel com uma escala milimétrica de 28 cm e outra vertical com duas outras escalas;

2.º — *Régua correção (C)* ou simplesmente *correção* adaptada justamente em sulcos feitos no corpo da régua, com 3 escalas em cada face;

3.º — *Reticulo, janela ou cursor (D)* adaptado em ranhuras da régua, com três traços finos de referência gravados em vidro, para as coinci-

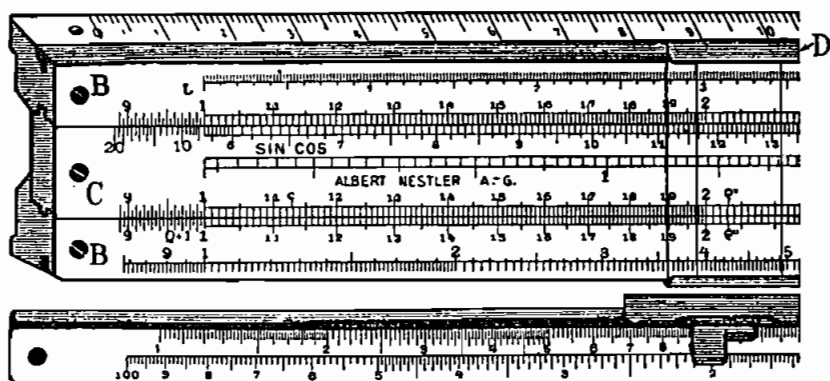


FIG. 206

dências e leituras. As vezes o cursor é dotado de lupa de aumento para facilitar as operações.

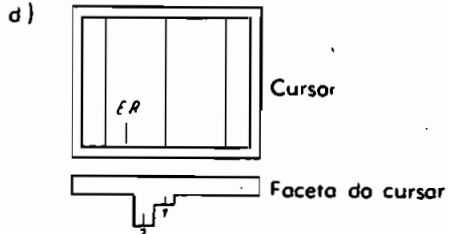
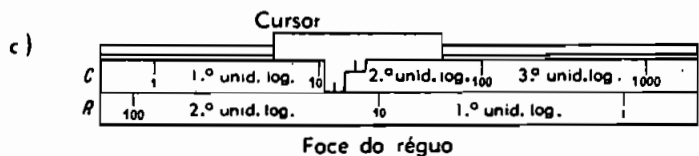
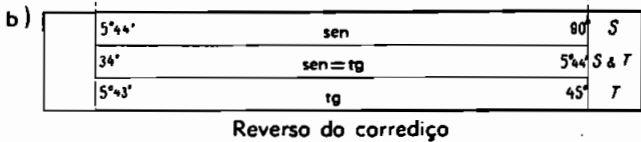
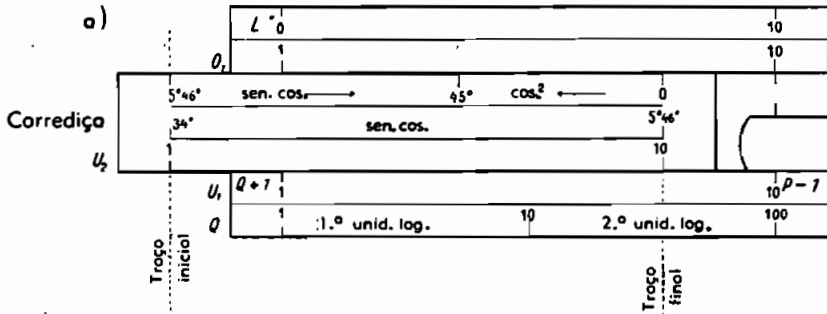
Uma régua comum difere essencialmente de qualquer régua de cálculo pelo fato de que na primeira a justaposição de duas medidas dá o valor da soma, ao passo que nesta última, que é logarítmica, tal justaposição dá o produto das medidas ($\log \cdot a \cdot b = \log \cdot a + \log b$).

Escala e seu emprego. No diagrama a) da (Fig. 207) que representa a régua universal em sua posição normal, vemos 4 escalas — L , O_1 , U_1 e Q .

Logaritmo de um número. A escala L serve em combinação com a de O_1 , para a determinação dos logaritmos do sistema de Briggs; ambas estão gravadas na parte superior da régua, sendo o número tomado, de 1 a 10, de 10 a 100, de 100 a 1000, etc., na escala O_1 em todo o comprimento da régua, com subdivisões que facilitam seu encontro; o fio médio do cursor, ajustado no número, dá o valor da mantissa do logaritmo correspondente, na escala L ; assim, por exemplo, a mantissa de 343 lida na régua é: $0,535 + 2$ (característica) = 2,535 e verdadeiro logaritmo é 2,53529.

Quadrado e raiz quadrada. A escala U_1 é traçada em uma unidade logarítmica de 25 cm e idêntica à de O_1 e a escala Q em duas unidades de 12,5 cm cada uma; pela coincidência desta escala com a de U_1 , se obtêm os quadrados e as raízes quadradas. Como as escalas O_1 e L e U_1 e Q são contíguas, os resultados correspondentes se lêem precisa e facilmente com o fio axial do cursor.

Cubo e raiz cúbica. A escala C dos cubos no bordo vertical da régua se compõe de 3 unidades logarítmicas, cada unidade tendo um terço de comprimento da escala principal U_1 (Fig. 207-c).



1 = traço de referência para escala cúbica "C"
 2 = traço de referência para escala recíproca "R"

FIG. 207

A cada número colocado na escala U_1 corresponde na escala C com o índice curto vertical do cursor o cubo correspondente e, vice-versa, no caso da raiz cúbica.

A escala dos cubos consiste de 3 unidades. O número de cifras C do cubo, se a base tiver n cifras inteiras, será:

- $C = 3n - 2$, se o cubo for lido na primeira unidade da escala;
- $C = 3n - 1$, se o cubo for lido na segunda unidade da escala;
- $C = 3n$, se o cubo for lido na terceira unidade da escala.

Para a raiz cúbica. A raiz cúbica tem tantas cifras quantos grupos de 3 cifras tem o radicando ou tantos zeros depois da vírgula quantos grupos completos de zeros tiver o radicando. Se o grupo determinante tiver um só algarismo coloca-se-o na primeira unidade, se tiver 2 na segunda e se tiver 3 na terceira, lendo-se a raiz cúbica em U_1 .

Quadrados recíprocos ($1/n^2$). A escala inferior do bordo vertical da régua R permite obter com o traço médio do cursor na escala U_2 dos quadrados e o índice longo em R o valor recíproco correspondente; esta mesma escala permite, além de outras operações, a determinação das diferenças de nível para medidas de alturas trigonométricas.

As escalas O e U em ambos os lados e a dos quadrados recíprocos à direita são prolongadas em vermelho para reduzir o número de transposições da correção.

Multiplicação e divisão. A escala U_2 no bordo inferior da correção, em sua posição normal, serve em combinação com U_1 para as multiplicações e divisões. Situa-se a extremidade 1 da correção sob o multiplicador tomado na escala inferior U_1 da régua, obtendo-se na mesma escala o produto em frente ao multiplicando, levado à escala da correção.

Os números são lidos nas escalas, independentemente da posição ocupada pela vírgula. O número de algarismos do produto é igual à soma dos algarismos ou igual a essa soma dos algarismos ou igual a essa soma menos um, conforme a posição do produto na escala da régua.

Somente quando é usado o traço inicial de U_2 , seja no produto para colocação de um fator, ou, na correção invertida, para ler o produto, ou, afinal, na divisão para obter o quociente, será considerada a inscrição da régua $P - 1$ (produto menos um) ou $Q + 1$ (quociente mais um).

Para escolher o traço inicial ou final de U_2 , multiplicam-se simplesmente os dois primeiros algarismos arredondados dos dois fatores e verifica-se se o produto é menor ou maior que 10. Se for menor, usa-se o traço inicial e se for maior emprega-se o traço final.

As divisões auxiliares em vermelho permitem, no caso do produto ficar próximo de 10 (entre 9 e 11), usar qualquer dos traços, inicial ou final de U_2 .

Funções trigonométricas. As escalas angulares sobre a face da régua correção, sendo "sen · cos" e "cos²" são chamadas escalas Topográficas ou taqueométricas; as escalas "S" (sen), "S & T" (sen e tg) o "T" (tangente) no reverso da régua correção, são denominadas trigonométricas.

Para as escalas topográficas encontramos imediatamente os valores naturais correspondentes às funções angulares e vice-versa, na própria face da régua correção, na escala U_2 . Um dos traços do cursor serve como linha de referência.

Sobre a face da corredeira, em cima, do traço inicial para a direita, o produto dos $\text{sen} \cdot \text{cos}$ vai de $5^{\circ}46'$ até 45° ; e do traço final para a esquerda, a escala de cos^2 vai de 0° até 45° , cujo traço é comum para as duas escalas.

Na escala do meio, dos "*sen, cos*" os ângulos vão de $34'$ até $5^{\circ}46'$.

No reverso da régua corredeira, em cima, a escala dos "*S*" dá os valores dos senos entre 0,1 a 1,0, isto é, para os ângulos entre $5^{\circ}44'$ e 90° . No meio, a escala "*S & T*" dá, por causa da diferença insignificante, os valores médios dos senos e tangentes entre 0,01 e 0,1, isto é, para os ângulos de $34'$ a $5^{\circ}44'$. Embaixo, a escala "*T*" dá os valores das tangentes entre 0,1 a 1,0, isto é, $5^{\circ}44'$ a 45° .

e) *Máquina de calcular*. As duas fases mais importantes na construção das máquinas de calcular se devem a Pascal, com o invento de sua máquina de somar, em 1642, e, logo a seguir, a de Leibniz, com a sua máquina de calcular.

Entretanto, somente no século XIX foi iniciada a construção de máquinas realmente práticas e com fins comerciais, iniciadas pelo alsaciano Carlos Javier Thomas, seguido por Burkhardt, Maurel e Fayet (1849), Hamann, Selling e muitos outros.

Grande é o número de tipos de máquinas de calcular e de somar lançados no mercado, tanto manuais como elétricas. Seu emprego nos cálculos é extraordinário, pois à par da rapidez e exatidão dos resultados, permite o emprego de maior número de casas decimais, tanto nas funções trigonométricas, como nas constantes e valores obtidos, e, por conseguinte, maior aproximação dos resultados obtidos.

As máquinas suecas "*Facit*", americanas "*Monroe*", alemãs "*Mercedes*" "*Curta*" (portátil) as somadoras "*Addo*", "*Remington*" e outras são muito boas, e seu emprego está disseminado em escritórios técnicos de engenharia, comerciais, escolas e repartições públicas, prestando relevantes serviços.

1) *Máquina de calcular "Facit Nea"*. A máquina "*Facit Nea*", modelo E (Fig. 208) é munida de motor universal que permite seu uso tanto com corrente contínua como alternada.

Nomenclatura de uma máquina "Facit":

- 1) Alavanca de retorno a zero para o registro do produto;
- 2) Idem, idem, para o registro do quociente;
- 3) Registro do produto;
- 4) Registro de inscrição;
- 5) Teclas do tabulador;
- 6) Registro do quociente;
- 7) Teclado dos números;
- 8) Tecla para a divisão;
- 9) Teclas elétricas;

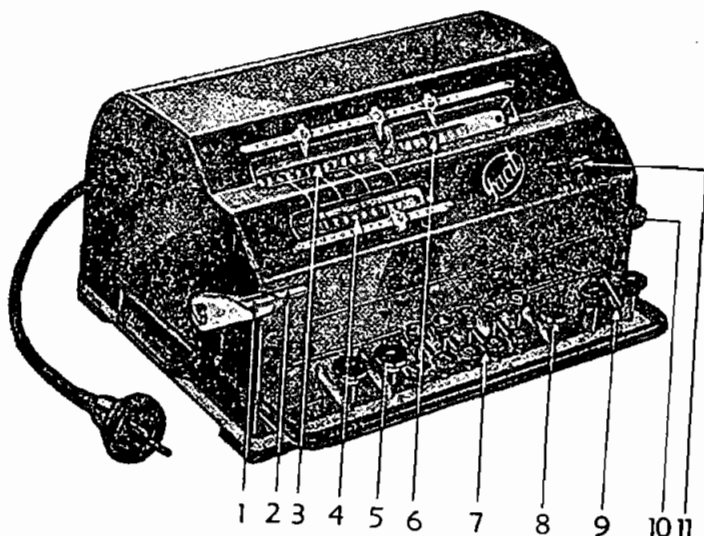


FIG. 208

- 10) Tecla de correções no registro de inscrição ou para retorno a zero;
- 11) Alavanca para colocar o dispositivo calculador em posição de adição ou subtração.

Este tipo de máquina oferece as seguintes vantagens:

- Eletro-automatismo de todas as operações;
- Alavanca principal (câmbio) permitindo a utilização da máquina em três diferentes operações automáticas: multiplicação com tabulação automática para a esquerda e para a direita e para divisão inteiramente automática;
- Tecla especial "Add" para adições com volta automática a zero do registro da inscrição, como também o transporte do dividendo, podendo a alavanca principal estar colocada em qualquer posição.
- Manuseio cómodo *com uma só mão*, principalmente com a esquerda;
- Controle de direção do registro de quociente para, quando necessário, indicar o número de voltas negativas.

2) *Máquina de calcular "Curta"*. Fabricado pela *Contina S.A. Mauren* (do condado de *Liechtenstein*), este tipo de máquina, portátil, pois pesa apenas 230 gramas, é adaptado a cálculos de campo e de escritório no decorrer do trabalho, executando com segurança e relativa rapidez as 4 operações e a raiz quadrada.

A capacidade é de 8 x 6 x 11 casas.

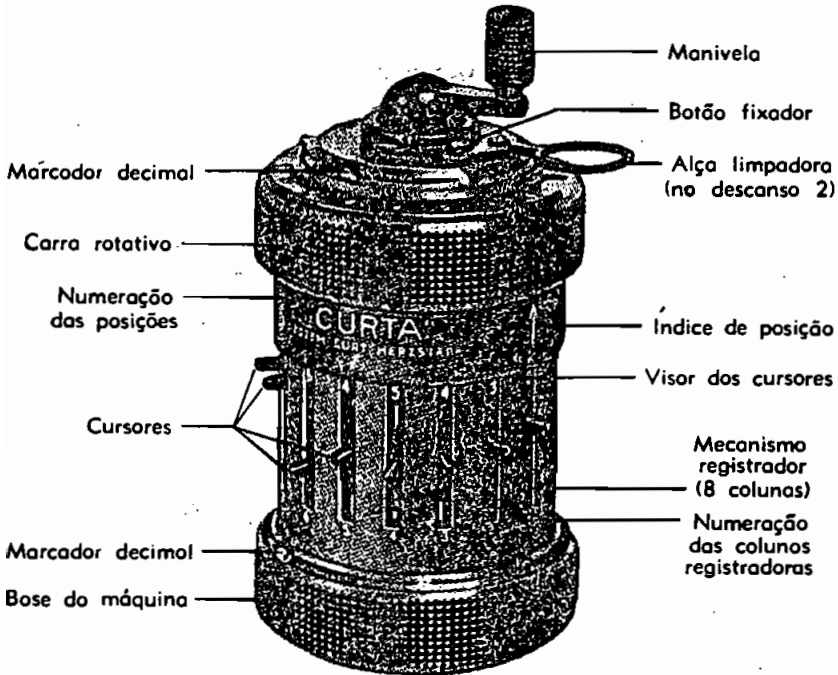


FIG. 209

Compõe-se a máquina (Figs. 209 e 210) de 3 partes principais:
 1 — O corpo principal, cilíndrico, com o *mecanismo registrador* de 8 colunas;
 2 — A *manivela*;

3 — O *carro rotativo*, em cuja superfície são visíveis os algarismos dos *contadores*, isto é, os 11 lugares do *totalizador* (algarismos em fundo escuro) e do *contador de rotações* (Fig. 210) de 6 lugares (algarismos em fundo claro).

O número que for graduado nos cursores se-



FIG. 210

rá transportado para o totalizador tantas vezes, quantas se executar o movimento rotativo da manivela.

A quantidade destas voltas fica marcada no contador de rotações.

A máquina tem 8 cursores que saem das aberturas verticais no corpo da máquina; os cursores são movimentados com a ponta do dedo indicador.

Os detalhes sobre o manejo e cálculos que podem ser feitos com a "Curta", vêm explanados com clareza no folheto de instruções, em português, que acompanha cada máquina, e distribuído em nosso País pela Organização Ruf S.A.

100 — Processos de desenho de uma planta

a) *Formatos de papel. Indicação da Associação Brasileira de Normas Técnicas (A.B.N.T.).* A recomendação NB — 8 R para a execução de Desenhos Técnicos em nosso País, aprovada na VI Reunião da A.B.N.T. em setembro de 1945, preconiza os formatos de papel que devem obedecer às seguintes prescrições:

1.^a — O formato básico do papel designado por A0 (A zero) será o do retângulo de lados medindo 841 mm e 1 189 mm, tendo a área de um metro quadrado. Do formato básico se derivam os demais formatos.

2.^a — Do formato A0 se deriva a série A (Tabela I) pela bipartição ou duplicação sucessiva feita de acordo com as seguintes regras:

- 1 — Cada formato se obtém pela bipartição do anterior imediato (Fig. 211), sendo a linha de corte paralela ao menor lado do retângulo;
- 2 — Os retângulos são geometricamente semelhantes entre si (Fig. 212);

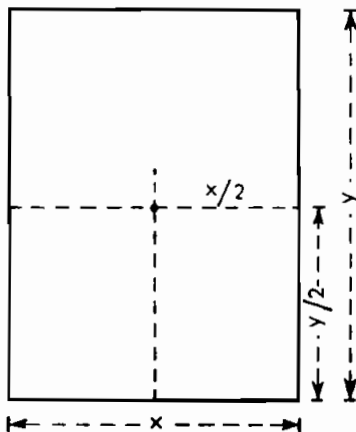


FIG. 211

TABELA I

Formato Série A	Linha de corte mm/mm (~)	Área
2 A0	1 682 × 1 682	2 m ²
A0	841 × 1 189	1 m ²
A1	594 × 841	0,50
A2	420 × 594	0,25
A3	297 × 420	0,1250
A4	210 × 297	0,0625
A5	148 × 210	0,0313

3 – Os lados x e y de um formato qualquer guardam entre si a mesma razão que existe entre o lado de um quadrado e a sua diagonal;

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (168)$$

Para o formato básico A0:

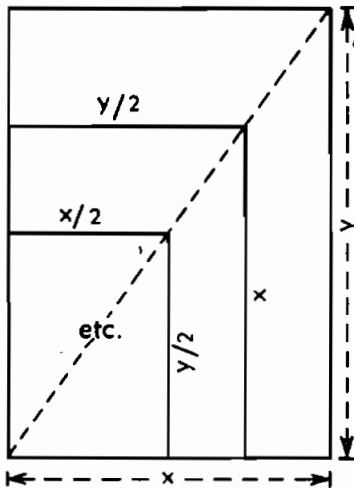


FIG. 212

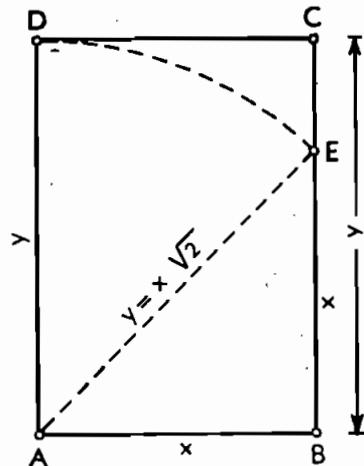


FIG. 213

$$x \times y = 1 \text{ m}^2$$

Resolvendo as 2 equações, obtém-se:

$$\begin{aligned} x &\cong 841 \text{ mm} \\ y &\cong 1189 \text{ mm} \end{aligned}$$

- 4 – Sendo a área do formato básico A0 igual a 1 m^2 , as áreas dos demais formatos serão múltiplas ou submúltiplas desta unidade;
- 5 – Poderão ser usados formatos compostos obtidos pela *conjugação de formatos* iguais ou consecutivos (Fig. 214).

3.^a – Em cada lado da fôlha deve ser deixada margem de 15 a 5 mm e no lado vertical esquerdo de 25 a 30 mm para arquivo do desenho em classificadores, após a dobragem, das fôlhas em “bordereau”.

Os formatos dados na Tabela I são os mesmos dos formatos DIN 476, adaptados na Argentina e outros países: Austria, Bulgária, Checoslováquia, Finlândia, Holanda, Suíça, Rússia, ...

Para o traçado de uma perpendicular BB' com um compasso de régua faz-se centro em O e $I2$ e descrevem-se arcos de raio iguais que se cortam em B e B' . A linha BB' deve passar exatamente por 6 e será dividida para cima e para baixo nos mesmos segmentos de 10 cm. Repete-se a operação com o raio 06 , a partir dos extremos, e verifica-se se as linhas horizontais e verticais passam exatamente pelos pontos assinalados nos eixos, caso em que o reticulado estará em condições de receber as coordenadas das poligonais da planta a ser feita.

2) *Método diagonal.* Para empregar este método, traçam-se pelos cantos M_1, M_2, M_3 e M_4 (Fig. 216) da folha de papel 2 retas em diagonal, M_1, M_3 e M_2, M_4 .

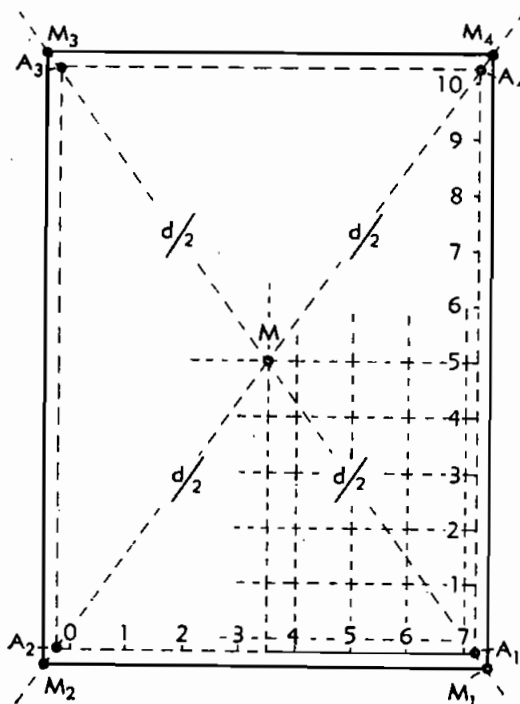


FIG. 216

Do ponto M , com compasso (de régua) e raio igual à semidiagonal $d/2$, determinam-se os 4 vértices A_1, A_2, A_3 e A_4 do retângulo base.

Verifica-se com compasso de ponta seca quantos retângulos exatos cabem em cada lado do retângulo e a metade do excesso verificado é marcada a partir do extremo: assim, na (Fig. 216) o excesso vertical foi distribuído, em A_48 e A_40 . Procede-se do mesmo modo nos lados horizontais e ligando as malhas tem-se o quadriculado certo e ajustado para o traçado.

c) *Marcação dos vértices no quadriculado.* Quando um vértice V deve ser marcado por suas coordenadas planas, x_v e y_v , numa planta com

quadriculado, sem usar coordenatógrafo, começa-se por assinalar a malha correspondente.

Seja, por exemplo, a malha 1-2-3-4 (Fig. 217). Designando por X e $X+l$ as abscissas dos lados 1-3 e 2-4 da malha e por n a diferença $X_v - X$ a linha $a-a'$ se situará em $X+n$; igualmente a linha bb' em $Y+m$, e assim se procederá para todos os vértices.

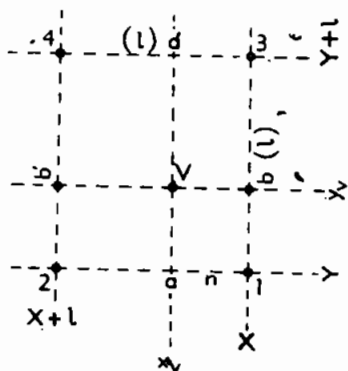


FIG. 217

Quando todo o polígono for implantado pelos seus vértices na planta e *verificados* os comprimentos dos lados, serão os mesmos ligados por traços finos, segundo a ordem em que forem levantados.

Com um *balaústre* são assinalados todos os vértices, antes do traçado dos lados de acordo com as convenções adotadas, isto é, por pequenos círculos, em preto ou carmim; após procede-se à marcação dos detalhes, como a seguir indicaremos.

d) *Marcação de vértices auxiliares* (interiores). Na amarração de detalhes interiores, afastados da poligonal

exterior de contorno, recorre-se às poligonais auxiliares, cujos vértices podem ser traçados por coordenadas polares. Recorre-se, para a deter-

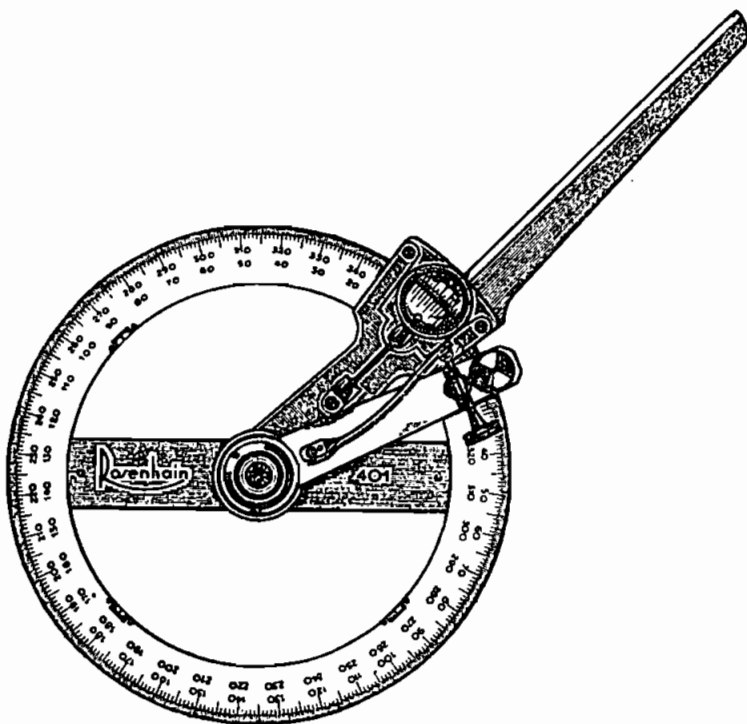


FIG. 218

minação dos ângulos horizontais, a um *transferidor metálico, com vernier* (Fig. 218), a uma tabela de *cordas*, ou às *linhas trigonométricas naturais*.

1) *Com transferidor de precisão.* Esse transferidor é de metal com centro assinalado por uma pequena cruz numa placa de celulóide transparente. Ao redor do centro gira um braço ou *alidade* adaptado a uma janela com *duplo vernier* e que termina numa régua de bordo biselado.

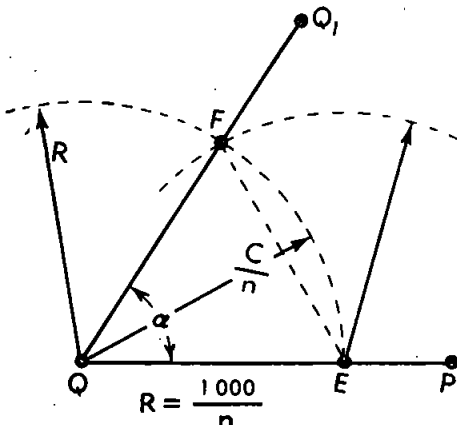


Fig. 219

O prolongamento desse bordo passa pelo zero do vernier graduado nos 2 sentidos, e pelo centro do transferidor. A aproximação do vernier é de 3'. Sua utilização é semelhante a um transferidor comum de desenho.

2) *Pelas cordas. Operações.* Marca-se no lado PQ (Fig. 219) a partir de Q um comprimento igual ao raio R da tabela (1 000) reduzido numa escala qualquer $\frac{1}{n}$,

mas a maior possível;

— Procura-se na tabela o valor da corda C correspondente ao ângulo lido α ; se o ângulo for maior do que 90° , deve-se graficamente construir o ângulo reto e somente procurar a corda para $\alpha - 90^\circ$;

— Com o centro de um compasso em Q descreve-se o arco EF, com o raio $\frac{1\ 000}{n}$, e com centro em E outro arco com o raio $\frac{C}{n}$; no cruzamento desses dois arcos, em F fica determinado graficamente o ângulo FQE ou α ;

— No prolongamento de QF, na *escala da planta*, marca-se com uma régua milimetrada a posição certa da estação Q_1 , donde por irradiação podem, então, ser amarrados os detalhes.

3) *Pelas tangentes.* Numa tabela de linhas trigonométricas naturais, das tangentes, lê-se o valor correspondente ao ângulo α e com ele e o traçado de uma normal a compasso, obtém-se a posição de Q_1 , como indica a (Fig. 220).

e) *Marcação dos detalhes.* O traçado e a marcação dos detalhes numa planta topográfica, baseado num esboço claro de campo, é operação complementar importante para a exatidão do levantamento.

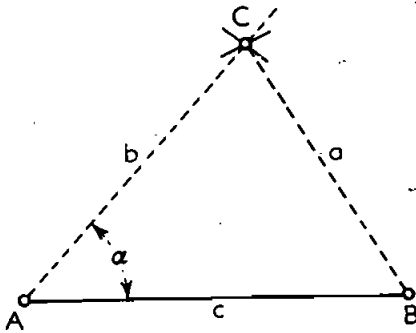


FIG. 221

Deve haver o cuidado de também medir m e verificar o comprimento l .

Prolongamento de arestas de edifícios, cercas, divisas podem ser amarrados pelo mesmo método, sendo indispensável clareza nos esboços para facilitar o desenho, com medidas superabundantes de contróle.

A vantagem do método, além do reduzido instrumental de medida, é a da não propagação dos erros e as intersecções normais que facilitam a determinação das áreas; seu inconveniente é o de não se adaptar ao levantamento de densa edificação.

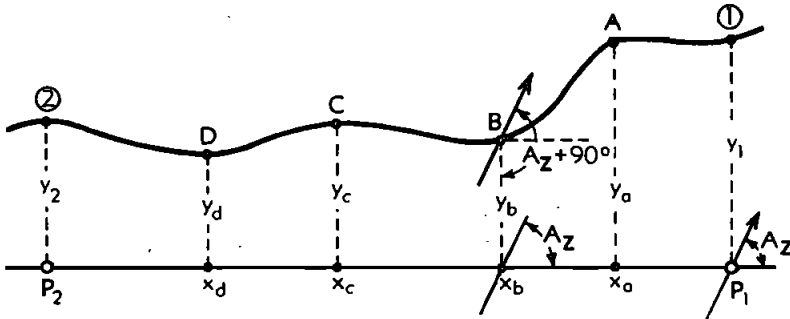


FIG. 222

3) *Método de coordenadas polares.* Este método, usado em triangulação topográfica, permite facilmente determinar a posição de um ponto com a medida de um ângulo e uma distância, isto é, suas coordenadas polares. Seja Q (Fig. 223) a estação do instrumento, M um ponto de mira, bem visível, onde é feita a ajustagem dos zeros e A, B, C, D, \dots os pontos de detalhe no terreno.

Com as medidas angulares de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e lineares de d_1, d_2, \dots , tem-se os elementos para marcá-los em escala na planta. Com maior rapidez e comodidade, obtêm-se as distâncias por meios *ópticos* ou *taqueométricos*, que daremos em *taqueometria*.

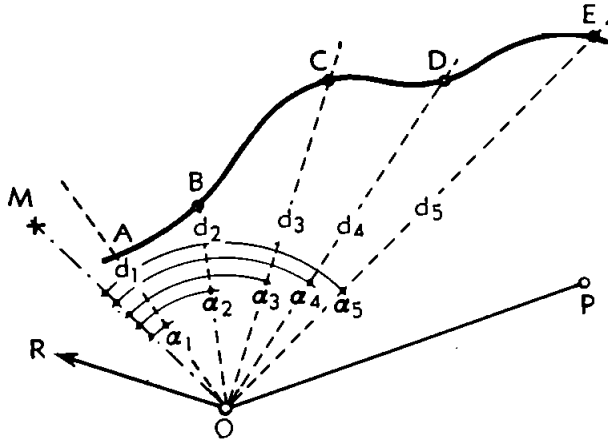


FIG. 223

Este método, combinado com o da poligonal, é aplicável a condições locais difíceis, porém exige o emprego de um teodolito, que pode abranger pontos bem afastados e verificações importantes.

Um *quarto método* seria o das coordenadas bipolares, com a medida de um *lado* que pode ser um alinhamento da poligonal de contorno, e dois ângulos, um em cada extremo, que diminui muito as medidas lineares, exigindo, no entretanto, maior visibilidade dos extremos de cada alinhamento.

Para pontos muito afastados, pode-se ainda recorrer aos problemas dados de Pothénot e Hansen.

No levantamento de *edifícios de forma regular*, basta ligar dois ou três pontos à poligonal e completar a planta com *medidas diretas* dos lados perpendiculares entre si; convém anotar no esboço todas as medidas do contorno, para as necessárias verificações.

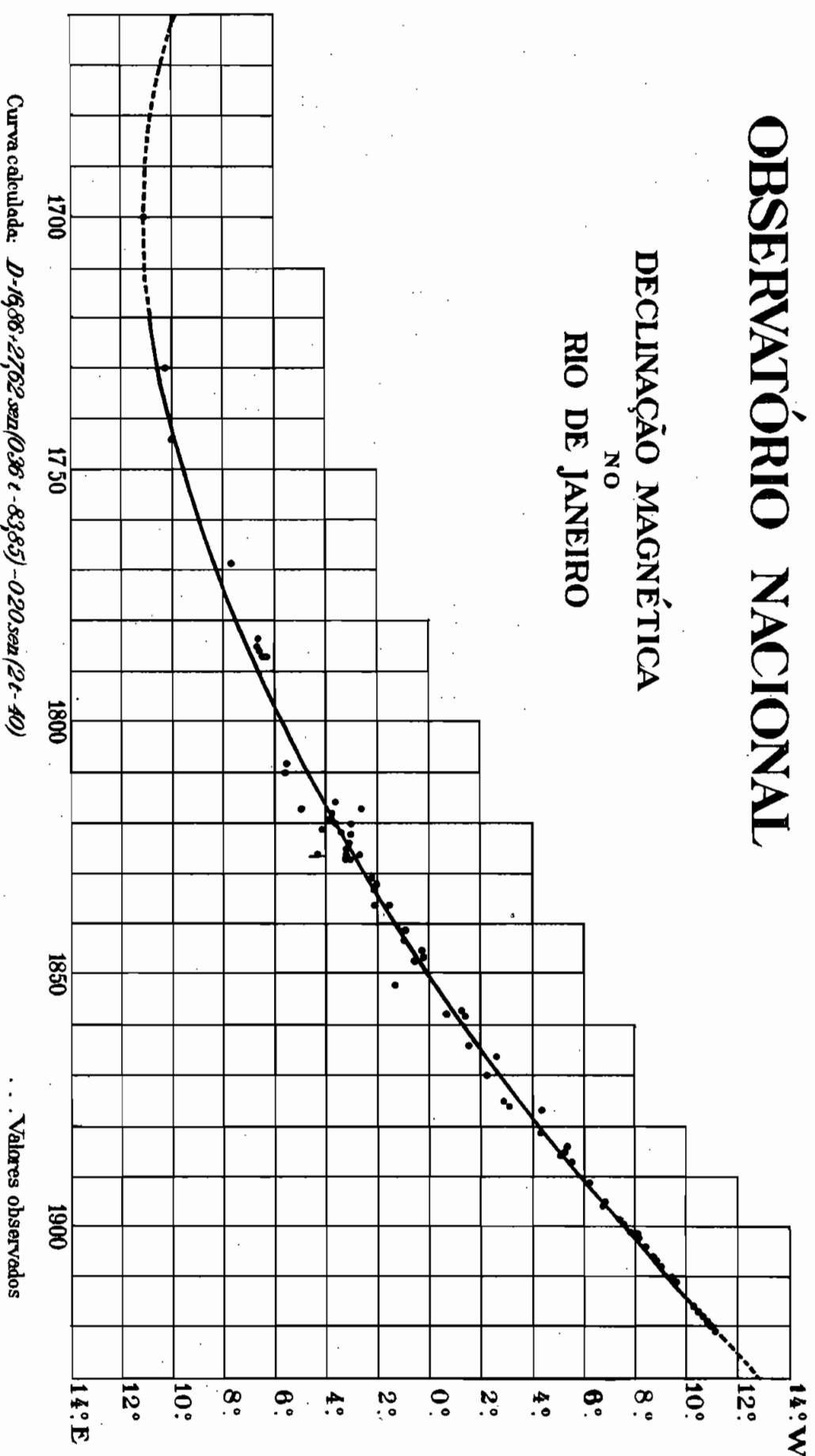
f) *Acabamento do desenho. Cópia, redução e ampliação da planta.*

1) *Acabamento do desenho.* O desenho topográfico deve ser feito de preferência em papel especial, com os bordos presos por tiras gomadas; o papel deve ser umedecido e distendido na prancheta e colado. A secagem, ao abrigo de correntes de ar, dá como resultado uma superfície perfeitamente plana, facilitando o desenho.

O traçado a lápis deve ser tão preciso como o posterior a tinta, sem deixar sulcos fortes, que a borracha não consegue eliminar por completo. As tintas empregadas, de acordo com as convenções adota-

OBSERVATÓRIO NACIONAL

DECLINAÇÃO MAGNÉTICA NO RIO DE JANEIRO



O Assistente chefe Alix Lemos, do Observatório Nacional, obteve por interpolação trigonométrica, a fórmula seguinte:

$$\delta_m = 16^{\circ}86 + 27^{\circ}62 \operatorname{sen}(0^{\circ}36t - 83^{\circ}85) - 0^{\circ}2 \operatorname{sen}(2t - 40)$$

δ_m — declinação magnética,

t — intervalo de tempo decorrido do ano de 1720, época inicial, à data para a qual se deseja obter a declinação

Exemplo: Declinação magnética para 1935.0:

$$t = 1935 - 1720 = 215$$

Aplicando-se a fórmula, obtemos:

$$\delta_m = 13^{\circ}39' \text{ W}$$

$$\text{Variação anual: } \Delta\delta_m = 10'' \text{ W}$$

Declinação magnética, em 1952.0, no

Observatório Nacional (Morro de São Januário)

$$\delta_m = 15^{\circ}10' \text{ NW}; \text{ variação anual} = 7''.2 \text{ W}$$

PRANCHA VII

Curva de Variação da Declinação magnética
no Rio de Janeiro, no período de 1660-1930
(Observatório Nacional)

das, devem ser *negras* (nanquim ou tinta-da-china) ou de *córes*. Os traços devem ser feitos a tiralinha, reto ou de curva ou com pena adequada.

Nas *escalas grandes* (1/1 000, 1/2 000, 1/5 000) os traços devem ser: *finos* (1/10 mm), *médios* (2/10 mm) ou *fortes* (4/10 mm).

Nas *escalas médias e pequenas*, não se utilizam senão os traços finos e fortes.

Os *sinais convencionais*, a empregar, devem ser os oficiais empregados nos serviços do I.B.G.E. e S.G.E. (Serviço Geográfico do Exército).

Em muitos casos, faz-se uso de tintas de cor para os traços. Traçam-se em azul os limites das águas, *suas cotas* e suas curvas de nível em profundidade (linhas isobatas); em *carmin* as *alvenarias* de toda a espécie, e *suas cotas*; em *bistre* (terra de sena queimada) as *curvas de nível* do terreno e cotas, assim como as linhas de mudança de declive, pontilhadas; em *verde* (nas grandes escalas), os jardins, bosques, alamedas e grupos de árvores isoladas; enfim em *preto* os limites de culturas, estradas e caminhos, ferrovias, construções em madeira e todas as cotas, bem como todos os letreiros das legendas.

Não deve deixar de constar em qualquer planta topográfica a direção do meridiano, *magnético*, *geográfico* ou ambos representado por uma *rosa* ou *flecha* de orientação.

2) *Cópia de uma planta. Reprodução.* Para a reprodução de plantas na mesma escala, é necessário copiá-las em papel vegetal ou papel tela transparente, ou em papel fino de desenho (manteiga) semitransparente, que permitem ver as linhas do desenho através da luz, natural ou artificial.

Para as cópias em *papel vegetal* transparente, obtido em rolos de 10 metros de comprimento, por alturas variáveis de 70 a 110 cm, deve-se cortar uma folha com dimensões pouco maiores que o desenho a copiar e prendê-la bem justaposta à prancheta com fita durex ou contrapesos, no caso de desenhos rápidos. Para a ajustagem fácil devem ser traçadas referências nos bordos do papel e usadas as convenções em preto para cópias, também oficializadas pelas convenções cartográficas. O cuidado principal a tomar, para evitar as deformações do papel que acompanha as variações de umidade atmosférica, é marcar, em primeiro lugar, todas as estações ou vértices das poligonais, tanto exteriores, como interiores, bem como linhas principais de referência do desenho.

Se a cópia for interrompida, poderá ser ajustada por pequeno deslocamento no trecho onde vão ser copiados os detalhes e, assim, sucessivamente em todos os cantos das folhas; é preferível, se possível, não interromper a cópia, embora com maior soma de trabalho.

Para as cópias em *papel tela*, muito mais forte e duradouro, os cuidados devem ser dobrados; é chamado de papel tela a um tecido

de algodão, acetinado numa das faces, a que se desenha. Para evitar o inconveniente de interrupção ou grossura desigual dos traços a nanquim, deve-se, antes de iniciar o desenho, esfregar talco ou pó de giz, suavemente no papel para tirar o brilho e permitir o desenho uniforme.

Deve-se evitar no papel tela qualquer borrão, derrame de água ou arranhão, que ofenda o gomado produzindo manchas na cópia heliográfica. Pode-se atenuar um pouco, restabelecendo o brilho com um pedaço de estearina, fortemente esfregada na parte atingida da tela.

Para a *reprodução das cópias*, obtidas por ação da luz natural ou artificial, sobre *papéis de cópia*, usam-se prensas especiais ou máquinas de copiar.

Os papéis empregados são emulsinados à base de produtos químicos, *revelados* por via seca ou úmida; entre estes, destacam-se: o papel ferro-prussiato, papel sépia, papel de galato de ferro, papel "Ozalid" e outros.

O papel "Ozalid" não se deforma com as operações de revelação, pois estas são feitas a seco, razão por que é muito usado; damos a seguir alguns detalhes sobre seu emprego e obtenção das cópias. Dá linhas negras sobre fundo branco e, se necessário, as cópias podem ser coloridas.

Existem 3 tipos de papel "Ozalid", em rolos fornecidos com diversas alturas pelo fabricante, que os classifica em:

- Para cópias positivas — tipo "M" de 55 gr/m²
- Para cópias positivas — tipo "M" de 80 gr/m²
- Para cópias negativas — tipo "MS" (transparente)

— Aberta a prensa de copiar coloca-se o original, desenhado em vegetal ou tela, com o lado desenhado em contato com o cristal da tampa da prensa;

— Coloca-se o papel "Ozalid" atrás do desenho, com o lado emulsionado em contato direto com o verso do desenho;

— Distende-se bem o feltro intermediário e o caixilho que prende com molas o conjunto da prensa;

— Expõe-se à ação da luz, de preferência a solar, num tempo previamente determinado de acordo com o desenho a copiar e intensidade luminosa;

— Se o original tem traços bem pretos, leva-se a exposição até que o papel "Ozalid" branqueie completamente. No caso de ser o original desenhado a lápis ou com linhas finas, não se deve deixar branquear por completo, pois resultariam cópias "queimadas" sob fundo manchado.

A *revelação* (aparecimento nítido do desenho), a *seco*, se realiza com vapores de amoníaco.

As cópias enroladas são levadas para um caixão revelador, em cujo fundo existe uma vasilha com 100 cm³ de amoníaco, com 10 a 15% de concentração; a revelação termina dentro de 15 a 20 minutos, obtendo-

se com um original normal cópias com linhas marrom escuro, quase pretas, sobre fundo branco.

3) *Redução ou ampliação de uma planta.* Os melhores resultados para a redução ou ampliação de uma planta, são obtidos com o emprego de um pantógrafo de *precisão*, tipo Coradi, cuja descrição já foi feita.

Também pode-se recorrer a um reticulado, menor ou maior, com o traçado a lápis no original, com o qual, usando um compasso de redução (Fig. 224), pode-se obter a reprodução, em escala ampliada ou reduzida.

Se, por exemplo, se quer ampliar uma planta, o reticulado de pequena malha será desenhado no original e o de malhas grandes na cópia a ser feita. Cada malha deve conter os detalhes existentes, que podem ser trasladados com escalas de redução ou a compasso, na relação de ampliação; um comprimento l , na ampliação dupla, por exemplo, deverá conter a compasso ou régua $2l$. A operação torna-se mais fácil empregando o compasso de redução, como dissemos.

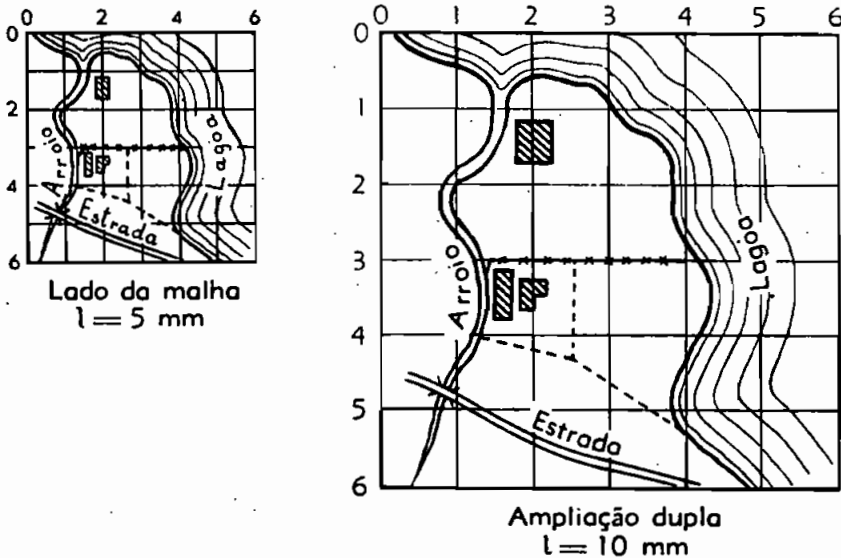


FIG. 224

Inventado por Lambert se diferencia do compasso comum por ter cada braço terminado em 2 pontas. Ambos os braços apresentam ranhuras longitudinais onde desliza um parafuso de fixação e outro de coincidência, que podem ser ajustados em qualquer traço das graduações. As razões de escala são as seguintes:

$1/10, 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5.$

CAPÍTULO III

AGRIMENSURA

§ 20 — Divisão e demarcação de terras (Parte topográfica)

101 — Generalidades

a). *Objeto e importância da Agrimensura.* A *Agrimensura*, etimologicamente *medida dos campos*, pela sua importância constitui um capítulo à parte da Topografia, e se incumbem de todos os problemas relacionados com a *divisão de terras*, tais como estudos sobre a legislação de terras, marcha processual para a execução dos trabalhos, divisão e demarcação dos lotes e execução das novas plantas de cada lote. A divisão ou partilha de terrenos em lotes ou quinhões nasceu com a evolução da agricultura nos mais remotos tempos da antiguidade, e constitui o principal problema da Agrimensura.

Podemos dizer que a divisão de terras tem por fim *dividir uma superfície dada em um certo número de quinhões, equivalentes entre si ou proporcionais a números dados*. A divisão pode ser feita quer numérica, quer graficamente. Esta segunda modalidade de resolver a *partilha* é útil no caso de contornos complicados, em que a melhor solução se encontra com o estudo da planta. Pode-se, após esse estudo, precisar os resultados com o auxílio do cálculo numérico baseado em comprimentos medidos no terreno.

É impossível calcular a área da superfície de um terreno, nem dividi-la, sem o conhecimento exato de seus limites, razão por que deve anteceder o problema da partilha um levantamento topográfico atualizado da propriedade, com o valor das terras e imóveis existentes.

Plantas antigas existentes, muitas das quais incompletas ou com medidas rudimentares e imprecisas, devem de preferência ser abandonadas.

Em pequenas extensões territoriais a questão se simplifica, pois as superfícies a demarcar, medir ou dividir podem ser consideradas como planas, fazendo-se abstração da convexidade da terra.

Em se tratando de grandes extensões, como a superfície de muitos Municípios, de um Estado ou País, não se pode desprezar a forma da terra, e o problema é mais complexo, envolvendo a Topografia de precisão, Astronomia de posição e a Geodésia, com o cálculo rigoroso das grandes extensões territoriais e demarcação das respectivas linhas

limitrofes, cuja importância política, social e econômica é bem importante.

As questões de limites e cálculo das áreas muito interessam ao nosso País, e múltiplos têm sido os trabalhos realizados e não poucos os técnicos que se tem dedicado a seu estudo.

A título informativo, a *Comissão da Carta Geral do Império*, com aplicação das fórmulas de *Bessel*, encontrou para a superfície do Brasil o valor 8 550 200 km²; o Eng. Theodoro Sampaio e Padre Padtberg 8 550 645 km²; o Professor Henrique Morize 8 500 000 km². A Comissão encarregada da feitura da *Carta Geográfica do Brasil*, comemorativa do *Centenário* da nossa Independência (1922), sob a direção do Eng. Francisco Bhering, de acordo com as fórmulas e tabelas decorrentes do elipsóide de Clark, atribuiu à superfície do Brasil o valor 8 511 200 km², fixando também os valores para as superfícies de todos os Estados componentes.

b) *Divisão amigável e judicial. Processos de demarcação e divisão.* A execução de uma partilha de terras é amigável ou judicial; na maioria das vezes é judicial, e sempre que houver menores, essa deve ser a *Ação* proposta. Embora se trate de ação amigável, isto é, quando as *partes* concordam em escolher o Agrimensor, assistir à medição, requerer ao Juiz a sua homologação e repartir entre si as despesas, a sentença do Juiz é que torna efetiva a partilha.

— Os processos empregados na prática para uma partilha são os *gráficos*, os *numéricos* e os *analíticos* onde intervém a Geometria, nos primeiros, e a Aritmética, a Trigonometria e a Geometria Analítica nos últimos.

Calculada a superfície total da propriedade a ser partilhada, estabelecidas as condições das linhas divisórias, de acordo com as partes interessadas, valor das terras e imóveis, tem-se os elementos imprescindíveis para iniciar o trabalho.

O estudo *preliminar* de uma Divisão é feito na Planta Geral com a escolha aproximada das linhas divisórias, separando os *Quinhões* de cada condômino, por processo geométrico ou pelo planímetro; o cálculo definitivo é feito depois, analítica ou trigonometricamente.

1) *Processo numérico.* Este processo consiste em separar da superfície total do terreno outras superfícies de formas diversas, determinando-se somente os valores necessários ao traçado das linhas divisórias no terreno ou na planta.

Com os dados obtidos, o operador no campo, servindo-se da Geometria e da Trigonometria, fará os cálculos necessários para a implantação definitiva das linhas, jogando-as em torno de um ponto (caso do triângulo) ou paralelamente a um lado (retângulo ou trapézio) até que as áreas sejam as da partilha.

2) *Processo analítico.* O *processo analítico*, com o emprêgo das fórmulas de Geometria Analítica, oferece muitas vantagens sôbre este, que só deverá ser empregado na divisão de pequenas superfícies.

3) *Processo gráfico.* Consiste este processo em fazer as divisões no desenho do levantamento, medindo com a escala de redução e transferidor todos os comprimentos e ângulos e transportando-os em seguida para o terreno.

Este processo, sendo pouco preciso, tem emprêgo muito restrito.

102 — Determinação geral do problema

1) *Superfície total S* da área a dividir. Devem ser dados ou calculados todos os elementos necessários para a sua determinação.

2) *Superfície de cada uma das porções* nas quais se quer dividir a área total. Sendo dados os números m, n, p, \dots aos quais devem ser proporcionais as áreas A, B, C, \dots das diversas partes, ter-se-á:

$$A : B : C : \dots = m : n : p : \dots$$

Fazendo $A + B + C + \dots = S$ e $m + n + p + \dots = s$, obtém-se:

$$A = m \cdot \frac{S}{s}; \quad B = n \cdot \frac{S}{s}; \quad C = p \cdot \frac{S}{s}; \dots$$

Reduz-se sempre o problema à divisão da área total em duas partes A_1 e A_2 , das quais a primeira seja igual à soma de tôdas as outras.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n + p + q + \dots}$$

O conhecimento da área total a dividir e das áreas parciais não basta para a determinação do problema; é necessária uma outra condição de caráter geométrico para cada reta de divisão que estabelece sua direção ou a posição de um dos seus pontos.

Como um problema de divisão, na sua parte final, reduz-se à resolução de figuras elementares, estudaremos em primeiro lugar posições de linhas divisórias no caso dos triângulos, seguindo-se as dos quadriláteros, trapézios e polígonos e finalizando com um exemplo completo, teórico, resolvido com as fórmulas da geometria analítica.

a) *Divisão das áreas triangulares. Linhas divisórias.* Dados: O triângulo ABC com os seus elementos: lados a, b, c ; ângulos A, B, C ; e área S .

As duas áreas F_1 e F_2 das duas partes:

$$F_1 + F_2 = S; \quad \text{ou a relação: } \frac{F_1}{F_2} = \frac{m}{n}$$

Ou ainda a relação entre uma das áreas parciais e a área total:

$$\frac{F_1}{S} = \frac{m}{m+n}$$

— *Equação de um quinhão.* Deriva da área triangular de uma das partes nas quais a linha divisória procurada divide o triângulo dado.

Sendo F_1 essa área; x e y as distâncias medidas ao longo dos dados do triângulo, entre os pontos onde a linha divisória encontra estes lados e o vértice do encontro dos mesmos; A o ângulo compreendido; ter-se-á:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen } A \quad (169)$$

— *Equação de condição.* Deriva das condições geométricas estabelecidas no problema para a linha de divisão.

1) A linha divisória deve ser paralela a um dos lados do triângulo (Fig. 225).

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$

2) A linha divisória deve ser perpendicular a um dos lados do triângulo (Fig. 226).

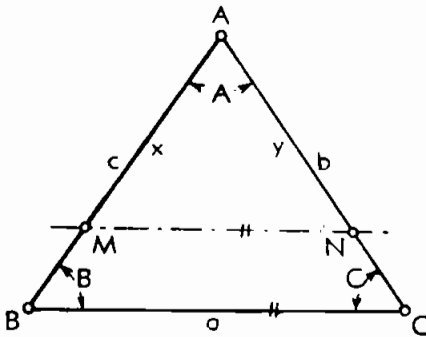


FIG. 225

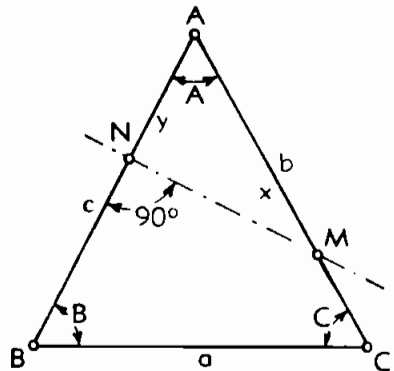


FIG. 226

$$y = x \cdot \cos A$$

3) A linha divisória deve cortar um lado do triângulo a uma distância D do vértice (Fig. 227).

$$x = D \quad \text{ou} \quad y = D$$

4) A linha divisória deve passar por um dos vértices do triângulo (Fig. 228).

$$x = c \text{ ou } y = b$$

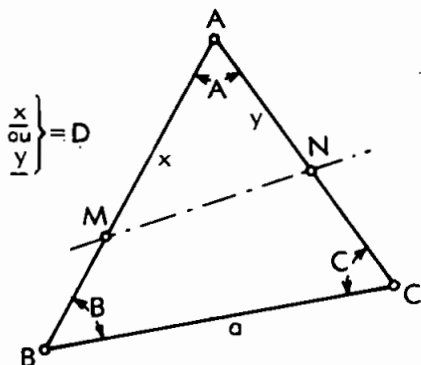


FIG. 227

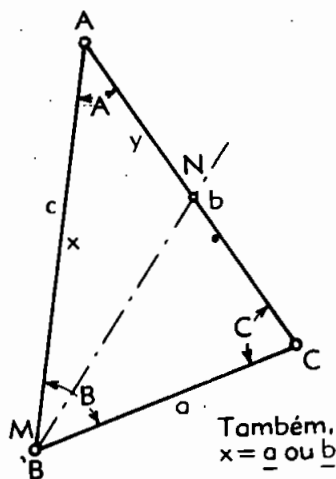


FIG. 228

5) A linha divisória deve passar por um ponto dado por suas coordenadas (Fig. 229).

A esta condição podem corresponder dois casos segundo o ponto dado é exterior ou interior ao triângulo; no primeiro caso é necessário ainda considerar qual a área mínima que se pode separar do triângulo. Seja MN a linha divisória passando pelo ponto $O(x', y')$; baixemos deste ponto as perpendiculares OP e OP_1 , sobre os lados AB e AC ; unamos o vértice A ao ponto O , e façamos:

$$AM = x; \quad AN = y; \quad OP = h; \quad OP_1 = h_1; \\ ABC = S; \quad AMN = s;$$

Teremos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \text{sen } A \quad \text{e} \quad s = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \text{sen } A$$

$$y = \frac{2s}{x \cdot \text{sen } A} \quad (170)$$

A figura também dá:

$$x \cdot h + y \cdot h_1 = 2s$$

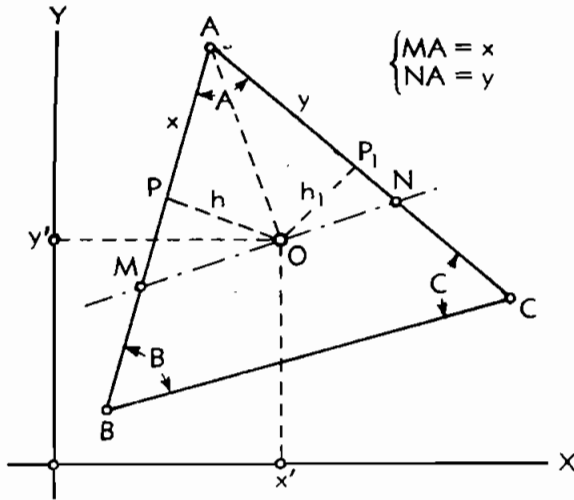


FIG. 229

Portanto: $2s = x \cdot h + \frac{2s}{x \cdot \text{sen } A} \cdot h_1$

ou ainda: $2s \cdot x = hx^2 + \frac{2sh_1}{\text{sen } A}$

finalmente: $hx^2 - 2sx + \frac{2sh_1}{\text{sen } A} = 0$

donde: $x = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - \frac{8 \cdot h \cdot s \cdot h_1}{\text{sen } A}}}{2h}$ (171)

Pode haver duas soluções, uma ou nenhuma, conforme os valores relativos dos dois termos sob o radical.

Sendo a e a' os coeficientes angulares das retas BA e AC teremos respectivamente para expressões dos comprimentos das perpendiculares OP e OP_1 :

$$h = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{e} \quad h_1 = \frac{a_1x' + b_1 - y'}{\sqrt{a_1^2 + 1}}$$

(Geometria Anal: "Dist. de um ponto a uma reta").

6) A linha divisória deve fazer um ângulo (α) com um dos lados do triângulo (Fig. 230).

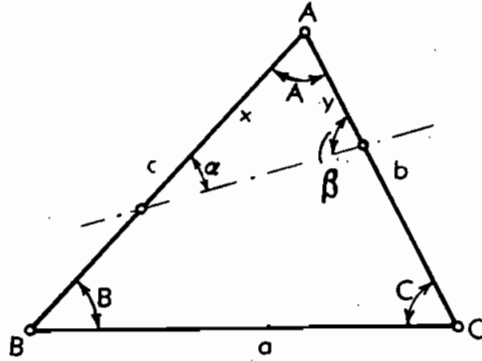


FIG. 230

$$S = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \text{sen } A \quad (172)$$

O triângulo ADE dá:

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } [180 - (\alpha + A)]}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } (\alpha + A)}{\text{sen } \alpha}$$

donde:

$$x = \frac{y \cdot \text{sen } (\alpha + A)}{\text{sen } \alpha}$$

Substituindo em (172) virá:

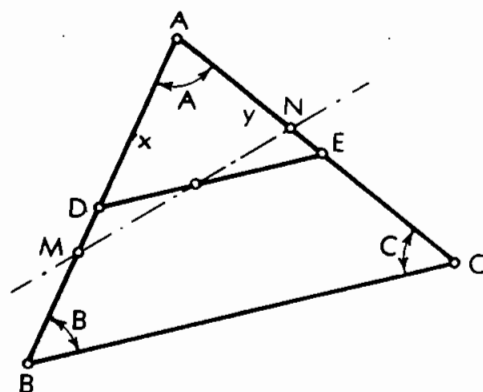
$$y^2 = \frac{2 \cdot S \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + A) \text{sen } A};$$

$$y = \sqrt{\frac{2 \cdot S \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + A) \text{sen } A}}$$

$$x = \frac{2 \cdot S}{y \cdot \text{sen } A} = \frac{2 \cdot S}{\text{sen } A \sqrt{\frac{2 \cdot S \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + A)}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot S \cdot \text{sen } (\alpha + A)}{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } A}} \quad (173)$$

7) A linha divisória deve ter um comprimento mínimo (Fig. 231)

$$S = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \operatorname{sen} A \quad \text{ou} \quad xy = \frac{2 \cdot S}{\operatorname{sen} A}$$



$$x(AD) = y(AE)$$

FIG. 231

A expressão acima mostra que o produto xy é constante e não depende do comprimento do terceiro lado z . Temos também:

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos A = x^2 + y^2 - \frac{4 \cdot S \cdot \cos A}{\operatorname{sen} A} = \\ &= x^2 + y^2 - 4 \cdot S \cdot \cotg A \end{aligned}$$

Ora, o terceiro termo do segundo membro sendo constante, o comprimento de z depende somente da soma dos quadrados de x e y , e o mínimo desta soma verifica-se para $x = y$; donde se conclui que o triângulo $ADE = S$ deve ser isósceles, e para determinar $DE = z$ basta fazer:

$$S = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} A \quad \text{donde:} \quad x = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{\operatorname{sen} A}} \quad (174)$$

Portanto:

$$z^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos A = 2x^2(1 - \cos A) = \frac{4 \cdot S}{\operatorname{sen} A} \cdot (1 - \cos A)$$

$$z = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\operatorname{sen} A} \cdot (1 - \cos A)} \quad (175)$$

8) Dividir a área de um triângulo em três partes equivalentes, por meio de duas divisórias partindo dos vértices A e B (Fig. 232). Com os dados da figura:

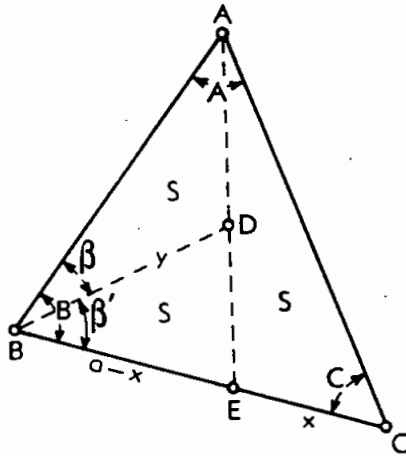


FIG. 232

$$S = \frac{bx \cdot \text{sen } C}{2} \quad (176)$$

$$S = \frac{(a-x)y \cdot \text{sen } \beta'}{2} \quad (177)$$

$$S = \frac{c \cdot y \cdot \text{sen } \beta}{2} \quad (178)$$

donde: $x = \frac{2 \cdot S}{b \cdot \text{sen } C}$; $y = \frac{2 \cdot S}{c \cdot \text{sen } \beta}$

Substituindo em (177) virá:

$$S = \frac{\left(a - \frac{2 \cdot S}{b \cdot \text{sen } C} \right) \cdot \frac{2 \cdot S \cdot \text{sen } \beta'}{c \cdot \text{sen } \beta}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a - \frac{2 \cdot S}{b \cdot \text{sen } C} \right) \cdot S \cdot \text{sen } \beta'}{C \cdot \text{sen } \beta} = l \quad (179)$$

$$\text{donde } \operatorname{sen} \beta' = \frac{c}{a - \frac{2 \cdot S}{\operatorname{sen} C \cdot b}} \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{Fazendo } \frac{c}{a - \frac{2 \cdot S}{b \cdot \operatorname{sen} C}} = K, \text{ vem:}$$

$$\operatorname{sen} \beta' = K \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Porém $\beta = B - \beta'$; portanto $\operatorname{sen} \beta' = K \cdot \operatorname{sen} (B - \beta')$

$$\operatorname{sen} \beta' = K \cdot (\operatorname{sen} B \cdot \cos \beta' - \operatorname{sen} \beta' \cdot \cos B)$$

$$\operatorname{sen} \beta' + K \cdot \operatorname{sen} \beta' \cdot \cos B = K \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos \beta'$$

$$\operatorname{sen} \beta' (1 + K \cdot \cos B) = K \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos \beta'$$

Donde:

$$\frac{\operatorname{sen} \beta'}{\cos \beta'} (1 + K \cdot \cos B) = K \cdot \operatorname{sen} B$$

ou

$$\operatorname{tg} \beta' (1 + K \cdot \cos B) = K \cdot \operatorname{sen} B$$

Finalmente

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{K \cdot \operatorname{sen} B}{1 + K \cdot \cos B} \quad (180)$$

Desta fórmula deduz-se o valor do ângulo β' e $\beta = B - \beta'$.

Ora, o valor de x sendo dado também, tem-se os elementos necessários para determinar a intersecção D dos dois alinhamentos AE e BD . Isto é:

$$y = \frac{2 \cdot S}{c \operatorname{sen} \beta} \quad (181)$$

O coeficiente K pode ser calculado por uma fórmula mais simples. Vejamos:

$$K = \frac{c}{a - \frac{2 \cdot S}{b \cdot \operatorname{sen} C}}$$

Mas S sendo um terço da área total F do triângulo, teremos:

$$S = \frac{F}{3} = \frac{\frac{ab \cdot \operatorname{sen} C}{2}}{3} = \frac{ab \cdot \operatorname{sen} C}{6}$$

Portanto:

$$K = \frac{c}{\frac{2ab \cdot \text{sen } C}{6}} = \frac{c}{a - \frac{ab \cdot \text{sen } C}{3b \cdot \text{sen } C}} = \frac{c}{a - \frac{a}{3}} = 3/2 \frac{c}{a} \quad (182)$$

b) Divisão de um terreno quadrilateral.

1) Divisória paralela a um dos lados. Solução analítica-trigonométrica. Seja o quadrilátero $ABCD$ (Fig. 233) da área S a ser dividido por meio da reta MN (x) paralela ao lado DA em 2 quinhões s e s_1 .

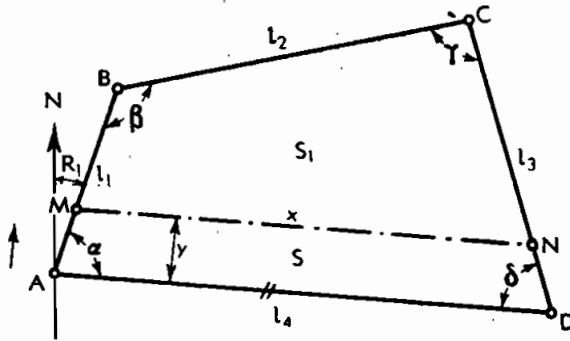


FIG. 233

Com os dados de campo, ângulos α , β , γ e δ , comprimentos dos lados l_1 , l_2 , l_3 e l_4 , e rumo R_1 calculam-se analiticamente as coordenadas dos vértices e a área total S .

De acordo com a relação de proporcionalidade $\left(\frac{m}{n}\right)$, determinam-se as áreas a separar, S e S_1 .

A determinação das incógnitas x e y resulta das relações:

$$(l_4 + x)y = 2s \quad (183)$$

$$l_4 - x = y \cdot \text{ctg } \alpha + y \text{ ctg } \delta = y (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \delta) \quad (184)$$

Multiplicando (183) por (184), resulta:

$$y (l_4^2 - x^2) = 2sy (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \delta)$$

$$l_4^2 - x^2 = 2s (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \delta)$$

donde obtemos: $x = \sqrt{l_4^2 - 2s(\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \delta)}$
 e, da relação (183):

$$y = \frac{2s}{l_4 + x}$$

e, finalmente, para os segmentos AM e DN :

$$AM = \frac{y}{\text{sen } \alpha} \quad \text{e} \quad DN = \frac{y}{\text{ctg } \delta} \quad (185)$$

Com maior exatidão podem-se obter os ângulos α e δ , em função das coordenadas dos vértices, *compensadas*, em lugar de usar os valores lidos, mas tal se fará somente para grandes extensões.

2) *Divisória em qualquer posição.* Seja o quadrilátero $ABCD$ a dividir em 2 quinhões (Fig. 234) s e s_1 , proporcionais a m e n , por uma divisória MN passando pelo meio de um dos lados, AB , por exemplo.

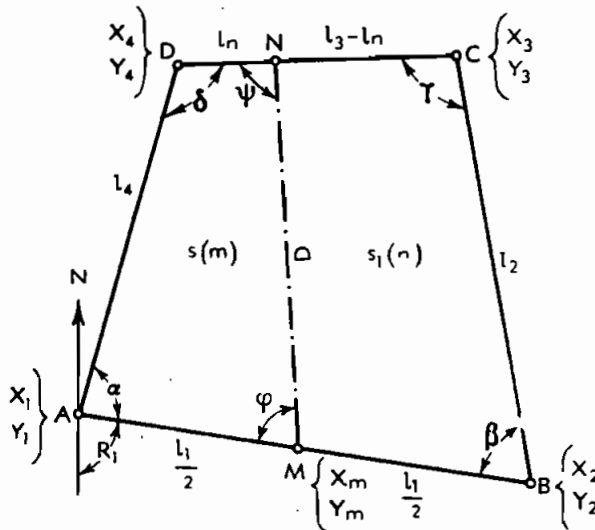


FIG. 234

Analicamente, determinam-se as coordenadas dos vértices do quadrilátero e a respectiva área S , em função dos elementos medidos no terreno, isto é, lados l_1 , l_2 , l_3 e l_4 e ângulos internos α , β , γ e δ , bem como o rumo R do 1.º lado.

Resolução. Coordenadas do ponto médio M , um dos extremos da divisória MN :

$$X_m = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{e} \quad Y_m = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

Coordenadas do outro extremo N :

Antes:

Equação analítica da reta CD :

$$Y - Y_3 = \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} (X - X_3) \quad (186)$$

Equação de Gauss, aplicada à área S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{2} \left[X_m (Y - Y_2) + X_2 (Y_m - Y_3) + X_3 (Y_2 - Y) + X (Y_3 - Y_m) \right] \quad (187)$$

Resolvendo o sistema comum das 2 equações (186) e (187) determinam-se as coordenadas X e Y do ponto N da divisória.

Análiticamente se achará também:

– comprimento ND (l_n):

$$l_n = \sqrt{(X_4 - X)^2 + (Y_4 - Y)^2} \quad (188)$$

como verificação deve-se também calcular CN ($l_3 - l_n$).

– comprimento da divisória (D):

$$D = \sqrt{(X_m - X)^2 + (Y_m - Y)^2} \quad (189)$$

– Orientação da divisória com AB (φ)

$$\text{tg } \varphi = \text{tg } (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha_2}{1 + \text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2}$$

Fazendo $\text{tg } \alpha_1 = a_1$

e $\text{tg } \alpha_2 = a_2$

$$\text{tg } \varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 - a_1 \cdot a_2} \quad (190)$$

Os coeficientes angulares a_1 e a_2 das retas AB e MN se obtêm das equações respectivas; teremos:

$$a_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{Y - Y_m}{X - X_m}$$

Determinado φ , pode-se do mesmo modo obter Ψ e obter a verificação de cada quadrilátero parcial.

3) *Divisória paralela às bases de um trapézio.* Seja o trapézio $ABCD$ (Fig. 235) de área S a ser dividido em 2 partes s e s_1 , proporcionais a m e n , por uma divisória MN , paralela às bases.

Com as medidas dos lados l_1, l_2, l_3 e l_4 e os ângulos α e β , podem-se calcular as áreas, totais e parciais, bem como a altura h .

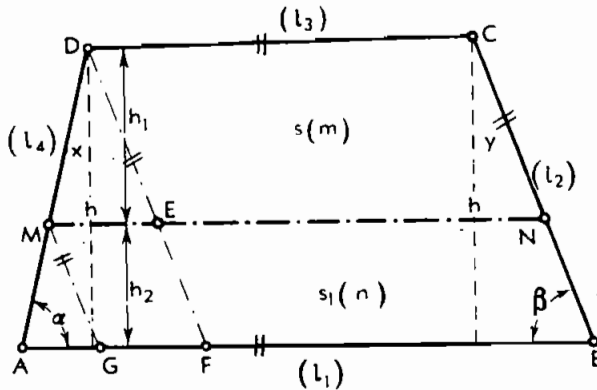


FIG. 235

$$S = \frac{l_1 + l_3}{2} h$$

$$h = l_2 \cdot \text{sen } \beta$$

$$h = l_4 \cdot \text{sen } \alpha$$

$$s = \frac{m}{m+n} S$$

$$s_1 = \frac{n}{m+n} S$$

Traçando as retas MG e DF paralelas ao lado BC e chamando o comprimento da divisória MN de D , teremos: $AF = l_1 - l_3$; $AG = l_1 - D$ e $ME = D - l_3$ e assim

$$s = \frac{D + l_3}{2} h_1 \quad (191)$$

$$s_1 = \frac{l_1 + D}{2} \cdot h_2 \quad (192)$$

também
$$\frac{s}{s_1} = \frac{m}{n} = \frac{(D + l_3) h_1}{(l_1 + D) h_2} \quad (193)$$

Dos triângulos AMG e MDE

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{D - l_3}{l_1 - D}, \text{ que, substituído em (193)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{(D + l_3)(D - l_3)}{(l_1 + D)(l_1 - D)} = \frac{D^2 - l_3^2}{l_1^2 - D^2}$$

$$m(l_1^2 - D^2) = n(D^2 - l_3^2)$$

donde

$$D = \sqrt{\frac{ml_1^2 + nl_3^2}{m+n}} \quad (194)$$

Conhecido D , é fácil achar h_1 e h_2 ; os comprimentos a marcar no terreno, DM (x) e CN (y), em função dos ângulos, se encontram por:

$$x = \frac{h_1}{\text{sen } \alpha} \quad (195) \quad \text{e} \quad y = \frac{h_1}{\text{sen } \beta} \quad (196)$$

em função dos lados:

$$x = \frac{D - l_3}{l_1 - l_3} \cdot l_4 \quad \text{e} \quad y = \frac{D - l_3}{l_1 - l_3} \cdot l_2$$

O comprimento y serve para a verificação do traçado da divisória, marcada a partir de M com o mesmo ângulo α de orientação.

103 - Divisão de áreas poligonais pelo processo analítico

1) *Divisórias partindo de dois vértices de um polígono dado.* Antes de descrever o processo analítico usado em quase todas as partilhas de importância, daremos alguns princípios, que devem sempre nortear os topógrafos ou agrimensores na solução do problema.

Princípios:

- a) Constituir os lotes ou quinhões de modo a que cada um forme um todo completo e independente.
- b) Evitar, o quanto possível, condições de servidão entre os condôminos.
- c) Evitar ângulos agudos e diferença grande entre os lados ou dimensões principais do polígono de cada quinhão.
- d) As linhas divisórias devem ser de preferência retas, paralelas e não convergentes.
- e) Todas as benfeitorias da propriedade em estradas, arroios, etc., devem ser distribuídas igual ou proporcionalmente a cada herdeiro.
- f) O perímetro de cada quinhão deve afetar de preferência a forma de um polígono de mais de 3 lados, para evitar o emprego do triângulo.

Seja dividir, *analiticamente*, a área do polígono $ABCDEF$ (Fig. 236) em 3 quinhões proporcionais a m , n e p . Pelo processo analítico é

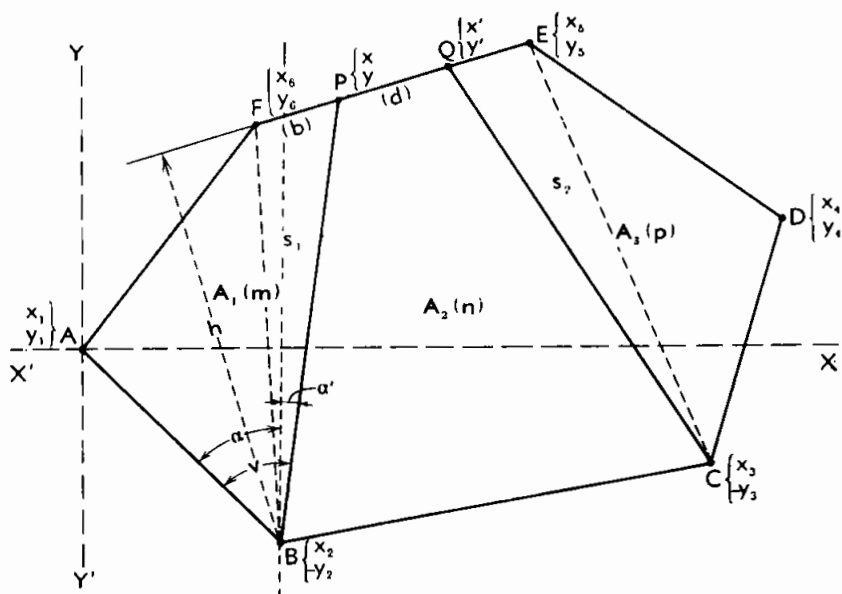


FIG. 236

calculada a área total S . As áreas parciais a separar são facilmente calculadas por:

$$\frac{S_1}{m} = \frac{S_2}{n} = \frac{S_3}{p} \quad \text{e} \quad S_1 + S_2 + S_3 = S$$

ou

$$S_1 \cdot n = S_2 \cdot m \quad S_1 \cdot p = S_3 \cdot m \quad S_1 + S_2 + S_3 = S$$

Admitamos que as linhas divisórias partam dos vértices B e C e, graficamente, achamos que as mesmas vão passar pelos pontos P e Q do alinhamento EF e cujos valores exatos vamos determinar.

Com os dados da própria planilha da poligonal, podemos separar a área dos triângulos ABF e CDE , que comparadas às áreas S_1 e S_3 a separar, dão-nos as áreas dos triângulos suplementares BFP (s_1) e CEQ (s_2).

Sabemos da Geometria Analítica que:

– a distância de um ponto (x', y') a uma reta $(y = ax + b)$ é dada por:

$$h = \frac{ax' + b' - y'}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

— a equação de uma reta que passa por dois pontos dados (x', y') e (x'', y'') é:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$$

— o ângulo de duas retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ é obtido pela equação:

$$\operatorname{tg} V = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

• Determina-se em primeiro lugar a altura (h) do triângulo BFP que é a distância do ponto B a EF , dada pela equação:

$$h = \frac{a_1 X_2 + b_1 - Y_2}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

As coordenadas de B são X_2 e Y_2 e a equação de EF é:

$$y - Y_5 = \frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} (x - X_5)$$

ou

$$y = \frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} x - \frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} X_5 + Y_5 :$$

temos ainda

$$y = a_1 x + b_1$$

fazendo-se

$$\frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} = a_1 \quad \text{e} \quad \frac{Y_6 - Y_5}{X_6 - X_5} X_5 + Y_5 = b_1$$

Resta-nos determinar a base b do triângulo em questão com auxílio da fórmula $s_1 = \frac{bh}{2}$, onde $b = \frac{2s_1}{h}$.

Resolvido o triângulo suplementar, pode-se determinar as coordenadas do ponto P sobre a reta EF pelas fórmulas

$$x = \frac{mx' + m'x''}{m + m'}$$

$$y = \frac{my' + m'y''}{m + m'}$$

que para o nosso caso se transformam em:

$$x = \frac{mX_5 + m'X_6}{m + m'} \quad \text{e} \quad y = \frac{mY_5 + m'Y_6}{m + m'}$$

sendo as coordenadas de $E(X_5, Y_5)$, de $F(X_6, Y_6)$ e os comprimentos $m = PF = b$ e $m' = EP = d - b$.

A distância d igual ao comprimento EF é obtida pela fórmula

$$d = \sqrt{(X_6 - X_5)^2 + (Y_6 - Y_5)^2}$$

O Eng.^o Fernandes Tavora apresenta uma solução original para determinar diretamente as coordenadas do ponto P .

Aplica a fórmula das áreas de Gauss a cada quinhão, entrando com as coordenadas a determinar de cada ponto da divisão, resolve depois as equações resultantes entre si ou com as das retas que contêm os pontos de divisão e encontra por fim as coordenadas de cada ponto.

Assim, no nosso exemplo, para o quinhão (S_1), teremos

$$2S_1 = X_1(Y_6 - Y_2) + X_2(Y_1 - Y) + X(Y_2 - Y_6) + X_6(Y - Y_1)$$

Transformando a expressão acima, onde X_1 e $Y_1 = O$, obteremos a equação de condição

$$Y = \frac{Y_6 - Y_2}{X_6 - X_2} X - \frac{2S_1}{X_6 - X_2} \quad (197)$$

que pode ser posta sob a forma $Y = aX + b$.

Resolvendo a equação (197) com a da reta EF , já dada, obteremos diretamente as coordenadas procuradas X, Y do ponto P .

Do mesmo modo, serão calculadas as coordenadas do ponto Q , correspondente ao quinhão S_3 .

A verificação será obtida com a aplicação da fórmula das áreas de Gauss ao quinhão S_2 , em função das coordenadas dadas de B e C e calculadas de P e Q .

Para a locação das linhas divisórias no terreno, devemos, ainda, calcular os ângulos de orientação das retas com os lados do polígono.

No nosso caso, para determinar, por exemplo, o ângulo v que BP forma com BA , teremos

$$\operatorname{tg} v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

em que a e a' são os coeficientes angulares das retas referidas e de valores

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \quad \text{e} \quad a' = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{X - X_2}{Y - Y_2}$$

O comprimento das linhas divisórias será obtido pela fórmula da distância de dois pontos.

104 – Divisão de áreas poligonais pelo processo gráfico

1) O ponto comum é um dos vértices do polígono. Com o auxílio de um transferidor de precisão ou pelas cordas, desenha-se o polígono $ABCDE$ pelos rumos e comprimentos dos alinhamentos, R e l (Fig. 237).

Qualquer pequeno erro de fechamento pode ser compensado graficamente.

Transforma-se a seguir, pelo processo gráfico de redução (Garceau), a figura poligonal em um triângulo equivalente B_1CE_1 , de base BE e altura CC_1 .

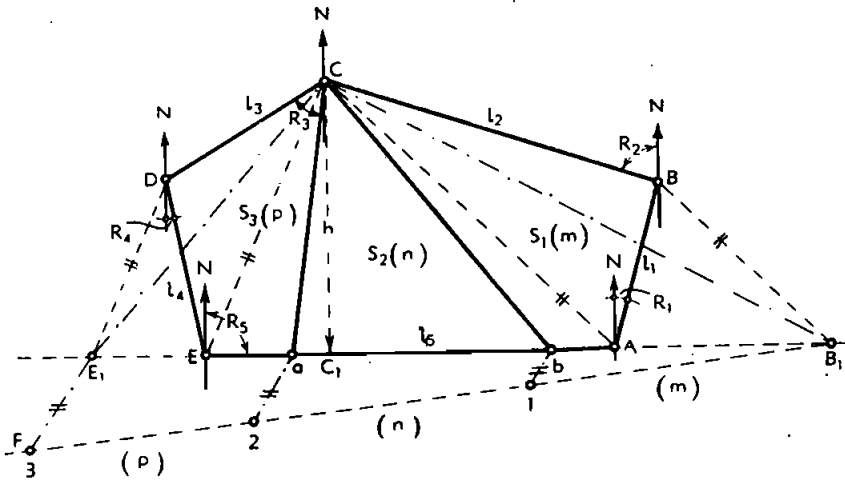


FIG. 237

Pelo ponto B_1 , traça-se uma reta B_1F , de inclinação qualquer, e nela marcam-se os segmentos B_1-1 , $1-2$ e $2-3$, proporcionais a m , n e p , correspondentes aos quinhões S_1 , S_2 e S_3 ; ligando E_1 a 3 e traçando paralelas por 2 e 1 , determinam-se os pontos de divisão, a e b .

As retas Cb e Ca são as divisórias obtidas graficamente; a área $S_1(m)$ é dada pelo triângulo bCB , ou quadrilátero equivalente $bCBA$; a área $S_2(n)$ é a do triângulo aCb ; a área $S_3(p)$ é a do triângulo E_1Ca , equivalente à do quadrilátero $aCDE$.

Para achar o valor das áreas S_1 , S_2 e S_3 , basta medir com uma escala de redução as bases dos respectivos triângulos e a altura comum $CC_1(h)$ e efetuar os produtos.

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot h}{2}; \quad S_2 = \frac{b_2 \cdot h}{2} \quad \text{e} \quad S_3 = \frac{b_3 \cdot h}{2}$$

A verificação é feita com a igualdade

$S = S_1 + S_2 + S_3$, que se deve encontrar, avaliando S , geométrica ou graficamente.

2) *O ponto comum está situado em um dos lados do polígono.* Dividir um terreno de forma poligonal em 3 partes proporcionais às quantidades m , n e p de modo que os lotes se possam utilizar de uma fonte situada em um dos lados.

Seja $ABCDE$ (Fig. 238) um polígono a dividir em 3 quinhões S_1 (m), S_2 (n) e S_3 (p), e as divisórias devem passar pelo ponto M (fonte). A resolução do problema pelo método gráfico obedecerá sempre à seguinte ordem:

Transformar o polígono em um triângulo de superfície equivalente, tomando um vértice do polígono, como no 1.º caso, ou o próprio ponto, para origem. Dividir depois a base do triângulo assim formado em partes proporcionais ou equivalentes e unir esses pontos de divisão ao vértice; deslocá-lo para o ponto dado M (Garceau) e completar a divisão, como indicado na (Fig. 238).

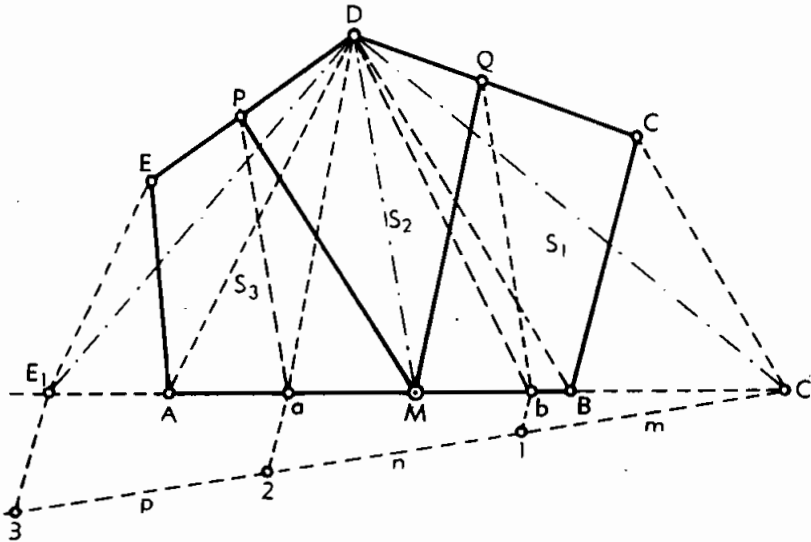


FIG. 238

105 - Avaliação da área por determinantes e aplicação a um pentágono

1.º caso: um dos vértices coincidindo com a origem (Fig. 239).

Área do $\Delta 123$.

$$A = \frac{1}{2} \overline{1 \cdot 2 \times 3 M}$$

A altura $3M = \overline{1 \cdot 3} \operatorname{sen} \gamma$; $\gamma = \beta - \alpha$ e $A = \frac{1}{2} \overline{1 \cdot 2} \times \overline{1 \cdot 3} \operatorname{sen} (\beta - \alpha)$

desenvolvendo $\operatorname{sen} (\beta - \alpha)$

$$\operatorname{sen} (\beta - \alpha) = \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{logo } A = \frac{1}{2} \overline{1 \cdot 2} \times \overline{1 \cdot 3} (\operatorname{sen} \beta \cos \alpha - \cos \beta \operatorname{sen} \alpha)$$

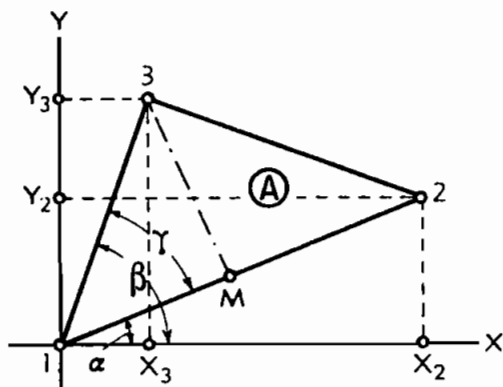


FIG. 239

Sabendo que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{3X3}}{\overline{3 \cdot 1}} = \frac{Y3}{1 \cdot 3}; \quad \cos \beta = \frac{\overline{1X3}}{\overline{1 \cdot 3}} = \frac{X3}{1 \cdot 3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{1X2}}{\overline{1 \cdot 2}} = \frac{X2}{1 \cdot 2}; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{2Y2}}{\overline{1 \cdot 2}} = \frac{Y2}{1 \cdot 2}$$

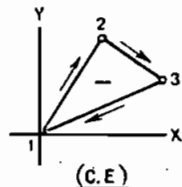
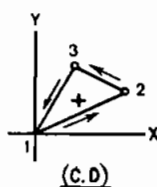
substituindo, vem:

$$A = \frac{1}{2} \overline{1 \cdot 2} \times \overline{1 \cdot 3} \left(\frac{Y3 \cdot X2}{1 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} - \frac{X3 \cdot Y2}{1 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} (X2Y3 - X3 \cdot Y2) \quad (198)$$

Colocando, sob a forma de *matriz*:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_2 Y_2 \\ X_3 Y_3 \end{vmatrix} \quad (199)$$



2.º caso: *Triângulo fora da origem* (Fig. 240).

$$A = \Delta_{123} + \Delta_{012} + \Delta_{023} - \Delta_{013}$$

O 2.º membro enquadra-se no caso anterior e pode ser expresso por:

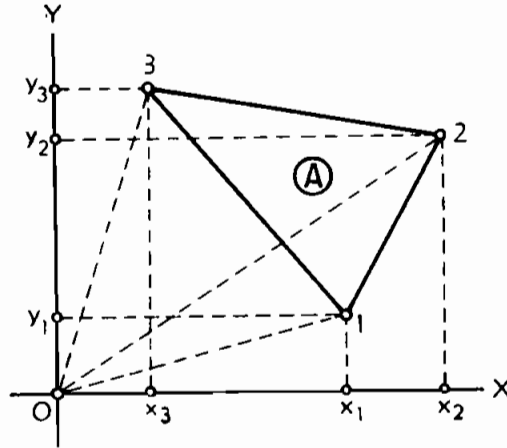


FIG. 240

$$\Delta_{012} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\Delta_{023} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

$$\Delta_{013} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_3 y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 y_3 - x_3 y_1)$$

o que resulta

$$\Delta_{123} = A = \frac{1}{2} \left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) \right] \quad (200)$$

em forma de matriz:

$$\Delta_{123} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou ainda} \quad \Delta_{123} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \\ x_1 y_1 \end{vmatrix}$$

3.º caso: No caso de um polígono, podemos dividi-lo em tantos triângulos quantos são os vértices menos dois.

Exemplo:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

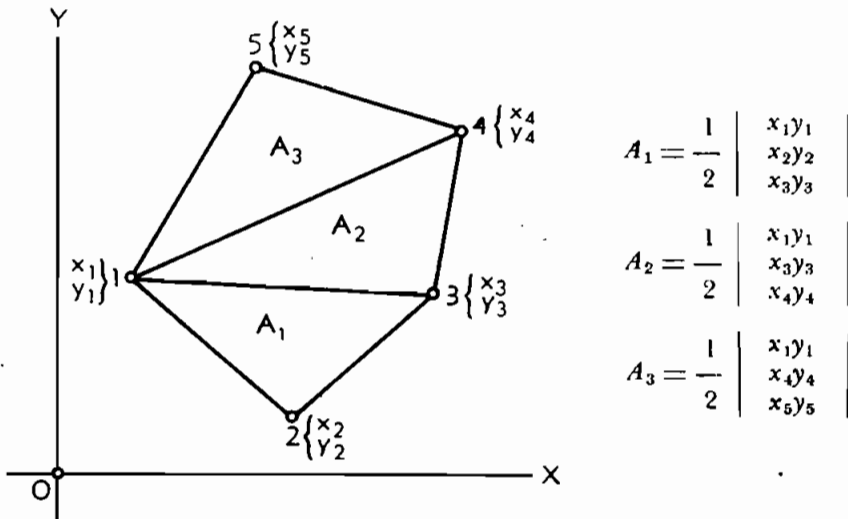


FIG. 241

Desenvolvendo as matrizes:

$$A_1 = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - y_3 x_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + x_4 y_1 - x_1 y_4)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_4 y_5 - x_5 y_4 + x_5 y_1 - x_1 y_5)$$

A soma resultante será:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A = \frac{1}{2} \left[(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_5 + x_5 y_1) - (x_1 y_5 + x_5 y_4 + x_4 y_3 + x_3 y_2 + x_2 y_1) \right] \quad (201)$$

ou ainda:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & \\ & X_2 & Y_2 \\ & & X_3 & Y_3 \\ - & X_4 & Y_4 & \\ & & & X_5 & Y_5 \\ & & & & X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

Generalizando:

Resultado é a diferença entre a soma dos produtos das diagonais à direita e a correspondente à esquerda.

ou

	$x_1 \ y_1$	
$x_2 \ y_1$	$x_2 \ y_2$	$x_1 \ y_2$
$x_3 \ y_2$	$x_3 \ y_3$	$x_2 \ y_3$
$x_n \ y^{n-1}$	$x_n \ y_n$	$x_{n-1} \ y_n$
$x_1 \ y_2$	$x_1 \ y_1$	$x_n \ y_1$

= Exemplo prático = (Pentágono)

CÁLCULO DA ÁREA (Determinantes)

Produtos	Abcissas	Ordenadas.	Produtos
	0	0	
- 2937,0864	+ 36,80	- 33,24	- 975,5680
- 2921,9322	+ 88,36	- 26,51	+ 2130,3596
+ 1004,9048	+ 110,22	+ 24,11	+ 4537,7574
	+ 41,68	+ 41,17	
	0	0	
$\Sigma'xy = 4854,1138$			$\Sigma xy = +5692,5490$

$$A = \frac{1}{2} |\Sigma xy - \Sigma' xy| = \frac{1}{2} (5692,5490 - (-4854,1138))$$

$$A = 1/2 (10546,6628) = 5273,3314 \text{ m}^2$$

§ 21 – Divisão e Demarcação de Terras
(Rápida digressão jurídica)

106 – Ações de divisão e demarcação

1. Nas ações judiciais de divisão e demarcação, o agrimensor é chamado a intervir decisivamente.

Considerando a grande importância que assume o trabalho do agrimensor nestas ações, torna-se de todo cabível uma rápida digressão em torno desta matéria jurídica.

A ação de divisão tem por escopo atribuir a cada condômino, de modo claro e inconfundível, o quinhão que lhe cabe na coisa comum. O direito à divisão radica-se na disposição do art. 629 do Código Civil, que reza: "A todo tempo será lícito ao condômino exigir a divisão da coisa comum." Este direito, entretanto, está condicionado a que a coisa seja, por sua natureza, suscetível de divisão. Não cabe a divisão sempre que, em consequência dela, possam advir prejuízos à coisa, ou quando evidente a impraticabilidade material da divisão. A propósito, cabe notar que a divisão, em sentido jurídico, não consiste apenas na separação da coisa em partes, mas, como acentua Tito Livio Pontes, em "transformar uma unidade em outras que constituam todos distintos, sem lhe destruir a substância ou torná-la inapta ao fim a que se destina". (Divisões — Demarcações — Tapumes, pág. 20.)

A ação de demarcação tem por fim fixar e assinalar por meio de marcos a linha divisória entre prédios, segundo a definição de Clóvis Bevilacqua. O fundamento desta ação é o art. 569 do Código Civil, assim redigido: "Todo o proprietário pode obrigar o seu confinante a proceder com ele à demarcação entre os dois prédios, a aviventar rumos apagados e a renovar marcos destruídos ou arruinados, repartindo-se, proporcionalmente, entre os interessados as respectivas despesas." A expressão *prédio* não é aqui empregada em sua acepção vulgar de casa, mas na ampla acepção de propriedade.

Sempre que existam dúvidas quanto aos verdadeiros limites entre dois prédios, o meio de dirimi-las é a ação de demarcação, que irá promover a fixação dos rumos novos ou a aviventação dos existentes.

2: São, portanto, duas ações distintas. Mas o art. 416 do Código de Processo Civil permite que elas sejam cumuladas. Neste caso, será preliminarmente promovida a demarcação total ou parcial do imóvel comum, passando-se após à divisão propriamente dita.

Posto que a lei torne facultativo o concurso das duas ações, casos há em que ele se torna absolutamente necessário. Tal se verifica, por exemplo, quando se pretenda determinar exatamente o quinhão de cada condômino.

Consoante ficou acentuado, os procedimentos não são aqui simultâneos, mas sucessivos. Primeiro virá a demarcação, depois a divisão. E nos casos de divisão em que preliminarmente se torne necessária a demarcação, os confrontantes nesta interessados serão, após concluídas as linhas de demarcação, havidos como estranhos ao processo divisório. A razão disso está em que, na demarcatória, são chamados não apenas os condôminos, mas também os confrontantes. Assinale-se, além disso, que a divisão é privativa dos condôminos, enquanto que na demarcação não há necessidade de condomínio.

O julgamento dos dois pedidos se processa em separado, recebendo cada um deles sentença homologatória própria.

3. As ações conjuntas de divisão e demarcação são iniciadas mediante uma petição dirigida ao Juiz da comarca em que estiver situado o imóvel.

Esta petição deverá ser acompanhada dos títulos de propriedade. Sem esta prova liminar da propriedade, ou seja, o título transcrito no Registro de Imóveis, ninguém pode ser admitido a propor as ações de divisão e demarcação.

Ainda, na petição inicial, deve o requerente pedir a citação dos interessados, para que estes venham a juízo alegar o que entenderem útil a seus interesses.

4. Primeira providência do Juiz, ao despachar a petição inicial, será a nomeação, para a execução do processo divisório ou demarcatório, de um agrimensor, dois peritos e respectivos suplentes. As partes, à sua vez, poderão fazer-se assistir por perito de sua confiança. Mas, realmente, na divisão e demarcação, o agrimensor, os peritos e os suplentes são de livre escolha do Juiz.

Não significa isso, entretanto, que a escolha do Juiz possa recair em pessoas leigas ou desprovidas de habilitação profissional. Cumpre que o agrimensor designado seja diplomado e portador da carteira profissional expedida pelo órgão competente. O mesmo deve dizer-se a respeito dos peritos e seus suplentes.

Observe-se, porém, que nos lugares onde não haja agrimensores e peritos diplomados, os Juizes admitem a intervenção de práticos.

Outrossim, a simples habilitação profissional não autoriza qualquer pessoa a funcionar nestes feitos como agrimensor ou perito. Está este sujeito ao processo de suspeição, podendo ser recusado pelas partes pelos mesmos motivos que servem de base à suspeição dos Juizes e das testemunhas.

Não podem, assim, servir como agrimensores ou peritos nos processos de divisão e demarcação, as pessoas que se encontrarem nas seguintes hipóteses: a) parentesco consanguíneo ou afim, com alguma das partes ou seus procuradores até o terceiro grau; b) amizade íntima ou inimizade capital com qualquer das partes; c) particular interesse na decisão da causa; d) quando o Juiz ou qualquer dos seus parentes consanguíneos ou afins até o terceiro grau tiver interesse direto em transação em que haja intervindo, ou esteja por intervir, alguma das partes.

5. Feitas as citações, terão os réus prazo comum de dez dias para a contestação. Se a contestação não for oferecida no prazo da lei, prosseguir-se-á no processo.

A contestação a que se refere a lei versará todas as questões que se articulam diretamente com o pedido do autor da ação. Através da contestação, o réu poderá contestar o domínio do autor, impugnar os limites por ele indicados na petição inicial, ou alegar em seu favor o usucapião ou prescrição aquisitiva.

Seguir-se-á a decisão do Juiz, na qual este: a) julgará procedente o pedido, ou b) homologará o acordo das partes. Nesta sentença, o Juiz dará o prazo de cinco dias para que as partes exibam os seus títulos, indiquem suas testemunhas e juntem os documentos capazes de esclarecer os peritos a respeito da confinação do imóvel e a constituição do quinhão de cada condômino.

6. Isso feito, o Juiz despachará designando o dia em que deverá ter começo a divisão ou demarcação, devendo as partes serem cientificadas deste ato.

Inicia-se, então, a fase executória da divisão ou demarcação. Esta fase do processo compete especificamente aos técnicos (peritos e agrimensor). Envolve ela matéria de ordem técnica, embora devam os técnicos cingir-se aos elementos jurídicos assinalados na documentação exibida e junta aos autos.

Depois de colher as informações das testemunhas, de examinar os títulos e os documentos juntos aos autos, o agrimensor procederá às diligências necessárias à verificação do ponto de partida para a medição do perímetro dividendo ou demarcando, ou ao reconhecimento do marco primordial, rumos e vestígios que sirvam para fixar a base das operações de demarcação.

Deste trabalho, o agrimensor apresentará ao Juiz relatório e parecer fundamentado. Entregues pelo agrimensor o relatório e o parecer, e intimadas as partes, o Juiz designará uma audiência especial em que: a) procederá ao exame e conferência dos títulos; e b) à determinação do *ponto de partida*, fundamentando a sua decisão.

O ponto de partida é o ponto por onde se começará a medição. Em razão disso, nele se colocará o primeiro marco, para começo dos trabalhos. A assinalação se fará, assim, *in loco*, por marco de madeira ou de pedra, possuidor de fixidez no tempo.

O ponto de partida é determinado pelo Juiz, mas a assinalação e a colocação do marco inicial cabem ao agrimensor. Para a assinalação, o agrimensor ouvirá os peritos, sendo dispensável a presença do Juiz.

7. Praticados estes atos processuais, o agrimensor passará à elaboração do memorial descritivo, ao levantamento da planta do imóvel dividendo e à delimitação, total ou parcial, do imóvel demarcando. Nesta operação, deverá ele atender à força dos títulos ou à sentença, ao mesmo tempo que obter esclarecimentos por informações da vizinhança e fama da vizinhança. Compreende-se como *fama* da vizinhança, segundo De Plácido e Silva ("Comentários ao Código de Processo Civil", vol. 2.º, 1131) — "a tradição, que possa haver, a respeito dos rumos e vestígios antigos, que possam servir para orientar as diretrizes a serem seguidas nos novos limites".

O Juiz determinará prazo razoável, que poderá ser prorrogado quando para isso houver motivo justo. Se dentro do prazo o agrimensor

não concluir o seu trabalho, qualquer interessado poderá pedir ao Juiz a sua substituição.

Sempre que, durante os trabalhos de medição e demarcação, o agrimensor for assaltado por dúvidas que reclamem o parecer dos peritos e a deliberação do Juiz, deverá proceder da seguinte forma: o agrimensor comunicará ao Juiz, por escrito, as suas dúvidas. O Juiz, após ouvir os peritos, resolverá as dúvidas. Outrossim, o Juiz ouvirá o agrimensor ou os peritos sempre que qualquer interessado alegar falta passível de correção.

8. O art. 432 do Código de Processo Civil estabelece as seguintes regras para o levantamento da planta:

- a) empregar-se-ão goniômetros ou outros instrumentos de maior precisão;
- b) a planta será orientada segundo o meridiano do lugar, determinada a declinação magnética;
- c) fixação dos pontos de referência necessários a verificações ulteriores e de marcos especiais, ligados a pontos certos e estáveis nas sedes das propriedades, de maneira que a planta possa incorporar-se à carta cadastral.

Por outro lado, o art. 433 do Código de Processo Civil exige que a planta indique:

- a) a conformação altimétrica ou orográfica aproximativa do terreno;
- b) as construções existentes, designando os fins a que se destinam;
- c) os valos, cercas e muros divisórios;
- d) as águas principais e o seu valor mecânico;
- e) por meio de cores convenientes, as culturas existentes, os pastos, campos, matas, capoeiras e divisas do imóvel.

O art. 434 do Código de Processo Civil estatui que as escalas das plantas, na medição das propriedades de mais de cinco quilômetros quadrados (5 km²), poderão variar entre os limites: 1:500 m (1/500) a 1:5 000 m (1/5 000).

Deverão ser anexados às plantas as planilhas, o memorial e as caderetas das operações de campo, autenticadas pelo agrimensor.

9. O memorial descritivo a ser feito pelo agrimensor constitui um relatório a respeito dos trabalhos técnicos por ele realizados. Destina-se a esclarecer todos os pontos assinalados na planta.

Segundo a exigência do art. 436 do Código de Processo Civil, o memorial descritivo indicará minuciosamente:

- a) o ponto de partida, os rumos seguidos e a aviventação dos antigos, com os respectivos cálculos;

- b) os acidentes, as cercas, valos, marcos antigos, córregos, rios, lagoas;
- c) os novos marcos cravados, as culturas existentes e a sua produção anual;
- d) a composição geológica dos terrenos, a cultura ou destino a que melhor se prestem;
- e) as indústrias agrícolas, pastoris, fabris, extrativas, exploradas ou suscetíveis de exploração;
- f) as vias de comunicações existentes e as que devam ser abertas;
- g) quaisquer outras informações que possam concorrer para o conhecimento cabal da propriedade, ou de seu valor.

107 — Ações complementares

10. O agrimensor deverá entregar a planta e o memorial descritivo em cartório. O escrivão os juntará aos autos, que serão enviados ao Juiz, a fim de que este designe dia para os atos complementares da divisão ou da demarcação, mandando intimar as partes representadas e os peritos.

Assim concluídas as operações da divisão ou demarcação, o Juiz fixará às partes e aos litisconsortes o prazo comum de cinco dias para dizerem do seu direito. Nesta oportunidade, os interessados manifestarão a sua aprovação ou impugnação aos atos da divisão ou demarcação, segundo lhes sejam ou não prejudiciais.

Decorrido o prazo para essa audiência dos interessados, o Juiz marcará a audiência de instrução e julgamento, na qual homologará ou não a divisão e a demarcação. Proferida a sentença, deve ela ser transcrita no Registro de Imóveis da jurisdição em que se encontra situada a propriedade, quando se tratar de divisão. Tratando-se de sentença homologatória de demarcação, a transcrição torna-se indeclinável desde que por ela se tenham estabelecido novos limites à propriedade.

11. Tanto a divisão como a demarcação, podem ser efetivadas por acordo entre as partes. Mediante este acordo, o processo se simplificará de maneira considerável: o processo se inicia com a homologação do próprio acordo firmado entre as partes.

O agrimensor será escolhido por petição assinada por todos os interessados, ou nomeado pelo Juiz. Procederá ele então à divisão ou demarcação na forma estabelecida pelo Código de Processo Civil, ou então na forma convencionada pelas partes.

O agrimensor apresentará por escrito a divisão ou demarcação e o Juiz, após ouvir no prazo comum de cinco dias as partes interessadas, proferirá a decisão.

12. Nos artigos 441 a 447, o Código de Processo Civil estabelece disposições peculiares à divisão. Devem aqui ser atendidos os requisitos para o pedido da ação conjunta de divisão e demarcação.

A petição inicial, além dos requisitos forenses que sempre devem revestir estas peças processuais, conterá: a indicação da causa ou origem da comunhão; a designação da propriedade comum a ser dividida, com seus característicos, situações e denominação; a descrição dos limites da propriedade; a indicação dos condôminos e dos representantes dos incapazes, bem como da sua residência; a indicação dos interessados estabelecidos com benfeitorias próprias ou comuns; a declaração ou estimativa do valor da causa; e o pedido de abono, *pro rata*, das despesas da causa. Poderá o requerente pedir os frutos e rendimentos que surgirem no curso da lide.

Inicialmente, o Juiz designará o dia para os atos complementares da divisão. E depois de feitas as intimações necessárias às partes interessadas, os peritos procederão ao exame, classificação e avaliação das terras, sendo calculadas pelo agrimensor, em separado, as áreas de cada gleba.

Determina o Código de Processo Civil que o agrimensor avalie em globo o imóvel, se se tratar de terras de valor igual, classificando-o em áreas no caso de diversidade de valores. Em seguida, os peritos apresentarão o plano da divisão. Neste plano, os peritos levarão em conta, tanto quanto possível, a comodidade das partes. E o Juiz adjudicará a cada sócio terrenos contíguos às suas moradas e benfeitorias, evitando o retalhamento dos quinhões em glebas separadas.

Determinará o Juiz, em seguida, que sejam ouvidos os interessados sobre o plano de divisão feito pelos peritos. Para esse fim, fixar-lhes-á o prazo de cinco dias.

Desdobra-se depois o processo da seguinte maneira: se não houver impugnação por parte dos interessados, o Juiz determinará a divisão topográfica ou geodésica do imóvel, de acordo com o laudo dos peritos: no caso de impugnação, o Juiz terá que se pronunciar sobre os motivos da impugnação, considerando os pedidos feitos e os títulos exibidos. Neste caso, faculta a Lei ao Juiz a realização de uma diligência, no sentido de que o processo divisório se ultime com a sua presença na situação do imóvel, se o valor deste exceder de cinquenta mil cruzeiros e se assim o requerer a maioria dos interessados.

Procede-se, em seguida, ao *cálculo do orçamento*. Este cálculo compete ao agrimensor, depois de realizadas pelos peritos as investigações e operações para a distribuição dos quinhões entre os sócios. No cálculo do orçamento da divisão, o agrimensor rateará entre todos a diferença verificada na medição.

Na elaboração do cálculo do orçamento, o agrimensor deverá atender aos seguintes elementos: confinação e área do imóvel, de acordo com o memorial e a planta; a classificação das terras, com o cálculo das áreas de cada parte, e o respectivo preço, ou, quando homogêneos, o valor do imóvel; a quantidade geométrica que deverá caber a cada condômino nas terras dividendas, as reduções e compensações proporcionais, feitas em virtude da diversidade de preços das glebas de cada quinhão.

Com base nos dados fornecidos pelo agrimensor, o escrivão lavrará um auto do orçamento, subscrito pelo Juiz, pelos peritos e demais partes presentes.

13. Em uma segunda etapa da fase executória da divisão, seguindo-se à apresentação do orçamento, o agrimensor executará as operações geodésicas e topográficas para a separação, medição e demarcação dos quinhões. Procederá o agrimensor, neste ato, de acordo com as indicações dos peritos, as quais se subordinam ao despacho de deliberação de partilha. Para cada quinhão, será feita uma folha de pagamento, a qual será lançada nos autos pelo escrivão e assinada pelo Juiz, pelo agrimensor e pelos peritos.

Na conformidade do prescrito pelo Código de Processo Civil, a folha de pagamento conterá a descrição precisa das linhas e dos rumos divisórios, a indicação dos marcos cravados ou assinalados, bem como a relação das benfeitorias e plantações compreendidas na gleba discriminada. Determina ainda o Código de Processo Civil, que na mesma folha de pagamento sejam declaradas as servidões que recaírem sobre o quinhão demarcado ou a seu favor forem instituídas, designando-se o lugar, modo e condições do seu exercício.

Depois de lançadas as folhas de pagamento, serão os autos do processo entregues ao agrimensor, que deverá completar a planta dentro de cinco dias, assinalando as linhas divisórias de cada quinhão.

Como ato final do processo divisório, verifica-se a homologação do Juiz.

14. Estabelecendo as disposições peculiares à demarcação, determina claramente o Código de Processo Civil que a petição inicial contenha a designação do imóvel, com seus característicos, situação e denominação; a descrição minuciosa dos limites que devam ser fixados ou aviventados; os nomes dos confrontantes do imóvel e a indicação das respectivas residências, se se tratar de demarcação total, ou dos confrontantes da linha demarcada, se parcial a demarcação; a declaração ou estimativa do valor da causa; e o pedido de abono, *pro rata*, das despesas da causa.

Para o processo demarcatório, quer este seja feito isoladamente, quer juntamente com a ação de divisão, prevalecem e se aplicam as regras instituídas pelo artigo 415 do Código de Processo Civil.

15. Os artigos 449 e 450 do Código de Processo Civil contêm prescrições relativas aos honorários dos agrimensores e aos emolumentos dos peritos.

Os honorários do agrimensor serão previamente ajustados com as partes interessadas. Caso, entretanto, não cheguem a um acôrdo, deverá o agrimensor apresentar em cartório a sua proposta. Sobre esta o Juiz ouvirá os interessados, resolvendo afinal como lhe parecer razoável.

Caso os honorários pedidos pelo agrimensor sejam impugnados pela maioria dos condôminos e se o agrimensor não estiver de acôrdo com a impugnação, será nomcado outro.

CAPÍTULO IV ALTIMETRIA

A) GENERALIDADES

§ 22 – Definições e referências

108 – 1) Altitudes e cotas. Nível verdadeiro e aparente

A altimetria ou hipsometria tem por fim a medida da distância vertical ou diferença de nível entre diversos pontos.

Quando as distâncias verticais são referidas à superfície média dos mares, tomam o nome de altitudes; recebem o nome de cotas quando se referem a uma superfície de nível fictícia, situada acima ou abaixo das superfícies dos mares.

Deve-se distinguir o nível verdadeiro e o nível aparente ou sensível, o primeiro é o nível da superfície dos mares ou do esferóide terrestre, e o segundo é o do plano tangente a essa superfície. Trata-se, está claro, de nível de um conjunto de pontos, porque para um ponto isolado o nível verdadeiro confunde-se com o nível aparente.

2) *Métodos gerais de nivelamento.* A altimetria compreende dois métodos gerais. O primeiro método refere todas as medidas ao nível verdadeiro; o segundo ao nível aparente.

Referência ao nível verdadeiro – 1) Método barométrico. *Métodos baseados na determinação dum plano horizontal.*

Referência ao nível aparente – 2) Método geométrico ou por gravidade.
3) Método trigonométrico.

Vamos classificar estes métodos na ordem decrescente da precisão dos resultados:

- 1 – Nivelamento geométrico;
- 2 – Nivelamento trigonométrico;
- 3 – Nivelamento barométrico.

3) *Nivelamento Geométrico. Erro cometido.* Vamos, em primeiro lugar, indagar a natureza do erro, que resulta da substituição do nível

verdadeiro pelo nível aparente. Vimos nas linhas preliminares da planimetria que o erro altimétrico, abstração feita da refração atmosférica, tinha por expressão:

$$h = \frac{D^2}{2R}, \text{ sendo (Fig. 242) } D = AB \text{ a distância entre os pontos } A$$

e B e $R = AO$ o raio da Terra. O efeito da refração diminui porém o erro.

Com efeito: o objeto visado segundo a linha AB está na realidade abaixo do ponto B , em vista da diferença de densidade das camadas de ar. O ângulo de refração é variável, porém, segundo experiências de Gauss, $Bx = 0,1306 h$, de modo que o erro será:

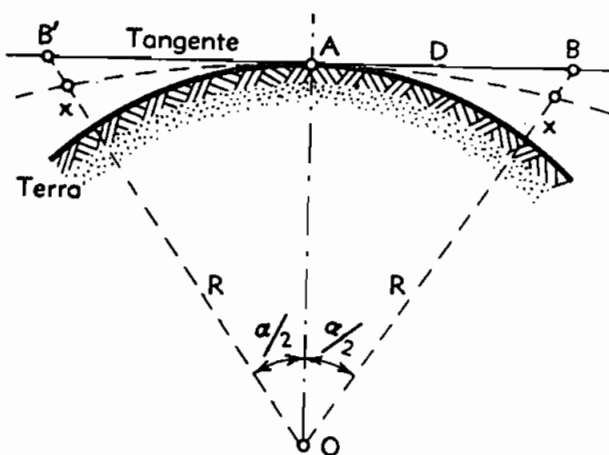


FIG. 242

$$\varepsilon \text{ (c. r.)} = \frac{D^2}{2R} - \frac{0,1306 \cdot D^2}{2R} = 0,4347 \cdot \frac{D^2}{2R} \quad (R = 6\,370\,000 \text{ m})$$

ou

$$\varepsilon = 0,000\,000\,068\,28 \cdot D^2 \quad (202)$$

Para $D = 100$ m, o erro $\varepsilon = 0,000\,683$ m.

Para $D = 1\,000$ m, o erro $\varepsilon = 0,068\,3$ m.

Vê-se que para grandes distâncias o erro não poderá ser desprezado; entretanto, poder-se-á sempre anular os seus efeitos, como veremos adiante, instalando os instrumentos a igual distância dos pontos a nivelar.

O método de nivelamento geométrico ou por gravidade consiste em determinar um plano horizontal e as interseções dele com uma série

de verticais tiradas pelos pontos a nivelar, e em seguida determinar as distâncias desses pontos a esse plano o qual toma o nome de *plano de referência*.

4) *Aparelhos de nivelamento. Miras.* Este método necessita de duas espécies de aparelhos:

- 1 — Um nível, servindo para determinar um plano horizontal.
- 2 — Uma mira, servindo para medida das linhas retas verticais.

5) *Níveis em geral. Classificação.* Estes aparelhos baseiam-se em alguns princípios diferentes que vem explanados a seguir:

1.º *Tipo.*

Instrumentos que dão uma linha de visada horizontal ou um plano horizontal descrito pela linha de visada girando em torno do eixo principal do aparelho.	{	Nível de pedreiro Nível d'água Níveis de bolha de ar	{	Nível de pínulas. Nível de luneta.
--	---	--	---	---------------------------------------

2.º *Tipo.*

Instrumentos que dão os ângulos verticais que a linha de visada faz com a horizontal passando pelo centro do instrumento.	{	Eclímetros.
---	---	-------------

3.º *Tipo.*

Instrumentos que dão a inclinação da linha de visada pela tangente trigonométrica do ângulo que essa linha faz com o horizonte.	{	Clisímetros.
---	---	--------------

4.º *Tipo.*

Instrumentos que dão o ângulo que a linha de visada faz com a horizontal assim como o ângulo azimutal da linha de visada com uma direção qualquer.	{	Clisigoniômetros.
--	---	-------------------

A prática do nivelamento *geométrico* exige somente o conhecimento dos aparelhos do primeiro tipo. Dispensamo-nos de qualquer referência aos dois primeiros níveis por serem aparelhos rudimentares e já conhecidos de Física.

6) *Nível de pínulas.* É uma simples régua munida de pínulas nas extremidades e tendo no centro um nível de bolha de ar. Este aparelho é montado numa articulação e suportado por um bastão ou tripé.

B) NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

§ 23 – Instrumental. Níveis e miras

109 – Nivelamento expedito

Uma carta topográfica é a representação gráfica em projeção horizontal de todos os detalhes e do *relevo* do terreno, donde a necessidade da *altimetria*. Esta é obtida pela determinação dos ângulos verticais ou inclinações das linhas do terreno sobre o plano horizontal, a fim de deduzir as *cotas* ou *altitudes* dos diversos pontos do terreno em relação a um *plano arbitrário* inicial de cota zero (datum), ou ao nível médio do mar.

A altimetria ou nivelamento, em levantamentos rápidos, é feita pelas bússolas e pantômetros com perpendicular ou eclímetro, pelo trânsito de mão, pelo telêmetro, ou ainda pelos níveis de mão, clinômetros, clisímetros, barômetros, aneróides e nipsômetros, sem falar nos instrumentos rudimentares conhecidos, isto é, nos transferidores de perpendicular, réguas verticais graduadas, níveis-esquadro e outros.

a) *Nível de mão*. O emprego do nível de mão tem importância, não só em levantamentos expeditos, como em nivelamentos em geral (Fig. 243).

Principalmente os niveladores ainda não muito experimentados, lucram bastante com seu uso, para a instalação conveniente dos níveis de luneta, a fim de conseguirem maior rendimento diário.

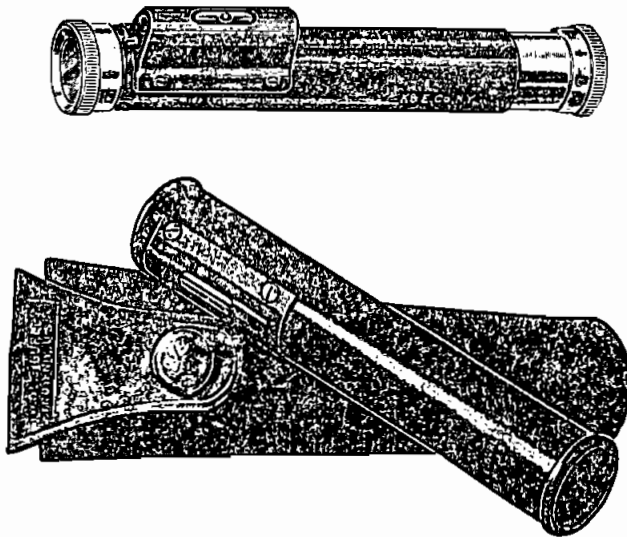


FIG. 243

O nível de mão é constituído de uma luneta encimada por um nível de bolha, visível no interior da mesma.

No interior da luneta há um fio transversal *nivelador*, que deve interceptar o centro da bolha, indicando, nesta ocasião, o ponto em que o mesmo se projeta no terreno ou numa régua.

É acondicionado em um estojo, para facilidade de transporte.

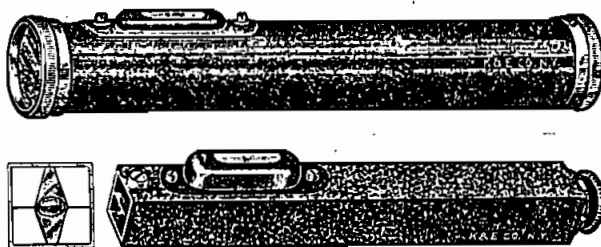


FIG. 244

A Fábrica Keuffel & Esser produz níveis de mão de vários tipos (Fig. 244), com luneta cilíndrica ou retangular, medindo de 12,7 a 15,24 cm (5 a 6"), algumas com lente amplificadora para bússola e outros aperfeiçoamentos.

b) Jogo de réguas. O nivelamento das seções transversais aos alinhamentos pode ser feito a nível, taqueômetro, clinômetro ou com réguas; embora esse último seja o mais rudimentar, é um processo ainda empregado, por permitir levantamento de seções transversais com muita simplicidade.

Um jogo de réguas (Fig. 245) consta de uma régua vertical (a) de 3 metros, graduada de 5 em 5 cm, ou mesmo, de centímetro em centímetro, de outra horizontal (b) de 3 metros, mais reforçada, munida de um nível de bolha de ar, graduada de 10 em 10 cm e de uma terceira régua com encaixe (c), mais curta, com 1 metro de comprimento, denominada cavalete ou *cavalo*.

Acessoriamente pode ser adaptado à régua vertical um fio de pendicúlo ou nível esférico.

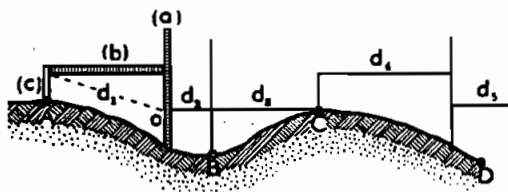


FIG. 245

Enquanto um operador segura uma extremidade da régua horizontal no encaixe do *cavalo*, outro a mantém justaposta com a vertical, enquanto um terceiro, apontador e encarregado da turma, faz levantar ou baixar a régua até que o nível de bolha fique centrado. Nesta ocasião anota-se a distância horizontal de 3 metros ou menor, e a diferença de nível na régua vertical.

A verificação a fazer na régua com nível é constatar se a mesma é horizontal com a bolha entre reparos, o que se consegue apoiando-a em dois pontos, nivelando e invertendo-a de posição. A metade do afastamento, se houver, deve ser corrigida pelo deslocamento do nível ou aplainamento da face inferior da régua.

c) *Clinômetro*. O clinômetro ou eclímetro é um instrumento, geralmente sem tripé, que permite medir as rampas pelos ângulos de inclinação, em percentagem ou em graus. A visada é feita por visor e pínula ou por luneta.

A (Fig. 246) apresenta dois tipos de clinômetro, fabricados por Gurley, sendo que o modelo (a) é para ser parafusado em uma régua e o (b) permite visadas com o auxílio de tripé.

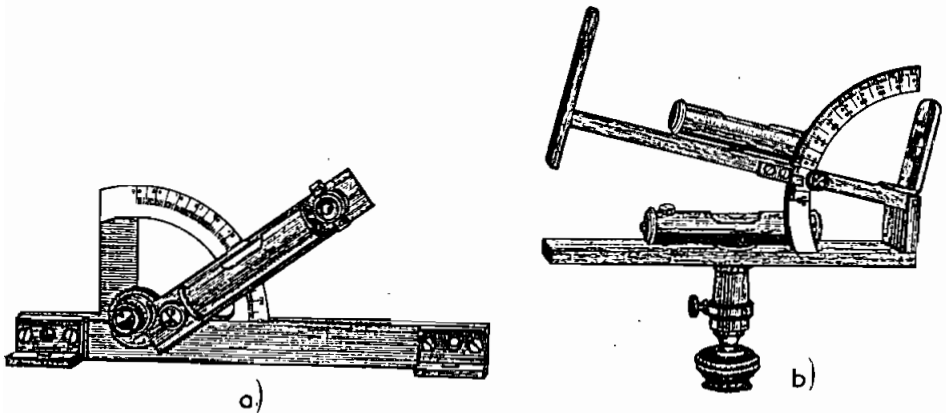


FIG. 246

A correção dos níveis de bolha, bem como a ajustagem dos zeros, deve preceder ao trabalho prático.

Para achar a diferença de nível n , entre os pontos A e B (Fig. 247), começa-se por horizontalizar a régua do clinômetro, com o auxílio do nível de bolha e, após faz-se uma visada para um ponto D de uma régua simples com corredeira móvel ou de uma mira de modo que $DB = AO$. Mede-se então o ângulo vertical α que pode ser positivo ou negativo.

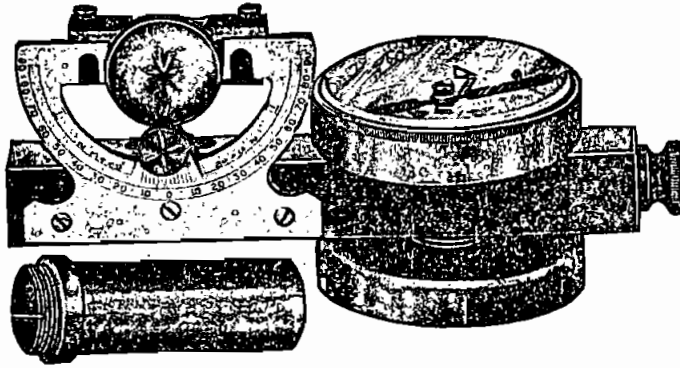


FIG. 249

3) O *clinómetro de tambor* (Fig. 250) é muito prático e cômodo, com divisões para avaliar rampas de $\pm 60^\circ$ e, também, de $\pm 100\%$.

Pela ocular observa-se o retículo no campo de visão e a marcação correspondente, com muita comodidade e clareza.

Um botão com mola permite amortecer as oscilações do tambor.

De um e outro lado do tambor existem tabelas práticas de redução e conversão, que facilitam o cálculo das distâncias reduzidas ao horizonte e das cotas dos pontos.

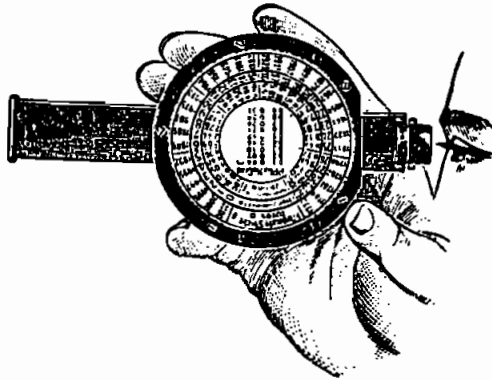


FIG. 250

4) *Clinómetro militar*. Este instrumento fabricado por Keuffel & Esser (Fig. 251) consiste numa caixa circular, bronzada, de $2\frac{3}{4}$ " (70 mm) de diâmetro, com clinómetro de pêndulo sensível, graduado em graus até 45° em ambos os sentidos, com parada automática.

A escala e o objeto visado são vistos simultaneamente no campo da luneta. O instrumento tem um assento para que possa ser usado como clinômetro de contato, e presilha para prender uma correia, se necessário.



como aparece
o campo de visão

FIG. 251

d) *Clinômetro de luneta ou eclímetro* (Fig. 252). Este instrumento dá o ângulo que a linha de visada faz com o horizonte e permite pela luneta melhor visada. Esta arrasta em seu movimento um círculo vertical munido de vernier. Um nível permite horizontalizar a luneta com a coincidência dos zeros da graduação e do vernier.

Emprega-se o instrumento de maneira idêntica à dos outros clinômetros.

e) *Clisímetro*. Este instrumento dá a inclinação da linha de visada pela tangente trigonométrica do ângulo que esta linha faz com o horizonte.

O *clisímetro de Goulier* (Fig. 253) é um instrumento muito portátil, pois pesa apenas 150 gramas e pode ser transportado até no bolso, dobrado como se vê em (b).

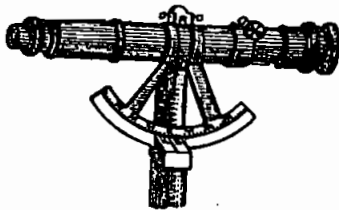


FIG. 252

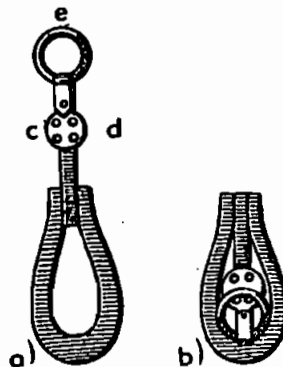


FIG. 253

Este aparelho óptico compõe-se de um disco ou lupa *c-d*, sistema Stanhope, com uma face esférica, polida de um lado e uma escala de precisão sobre um vidro depolido do outro, escala essa obtida por processo microfotográfico.

Para utilizá-lo aproxima-se o aparelho seguro pela argola, bem junto do olho e procura-se, inclinando-o, visar um ponto, na mira ou na régua da mesma altura do operador, lendo-se, então, a rampa em centésimos, que é a graduação do cisímetro.

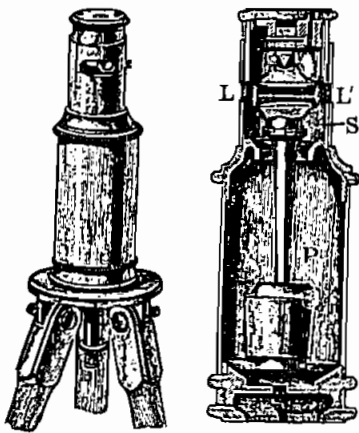


FIG. 254

f) *Nível de Goulier.* O *nível colimador* ou de Goulier (Fig. 254) consiste em um pêndulo *P*, mantido por uma suspensão cardan *S*, e na parte superior uma pequena luneta, formada de uma lente convergente num extremo e um vidro depolido no outro.

O aparelho é construído de tal modo que, com o pêndulo livre, o eixo óptico da luneta torna-se horizontal. Por um traço gravado no vidro e pela abertura maior ao lado da luneta, pode-se achar onde o eixo se projeta, dando, portanto, o plano horizontal que passa pela luneta e pelo olho do operador.

É fácil achar o desnível, desde que se desloque a corredeira de uma mira ou o cursor de uma régua no ponto

visado até interceptar o referido plano.

A diferença entre as alturas do nível e da mira é igual à dos pontos correspondentes. De acordo com a ondulação do terreno, pode-se aproximar ou afastar mais os pontos intermediários a nivelar.

110 – Nivelamento comum

a) *Órgãos principais e eixos do nível.* Um nível de luneta consta dos órgãos principais seguintes (Fig. 255):

- 1 – Um suporte munido de três ou quatro parafusos calantes (*v*);
- 2 – Uma barra horizontal *BB* (*Barramento*) solidária com o eixo vertical *ZZ'* o qual pode girar em torno do suporte geral do aparelho (*SS*);
- 3 – Uma luneta *LL* fixada à barra horizontal ou simplesmente apoiada sobre a mesma, entre duas braçadeiras existentes nas extremidades;

4 – Um nível de bolha de ar fixado à luneta ou na barra horizontal *BB*. O eixo óptico passa pelos centros ópticos da objetiva e da ocular; o eixo de colimação passa pelo centro óptico da objetiva e cruzamento dos fios do retículo.

Devem ser coincidentes, após a retificação. Em um instrumento dessa natureza devem-se distinguir os três eixos seguintes:

- 1 – Eixo de rotação *ZZ'*;
- 2 – Eixo óptico *OO'*;
- 3 – A tangente central ou eixo do nível *HH'*.

O instrumento estará retificado quando satisfizer as três seguintes condições:

- 1 – O eixo de rotação *ZZ* deve ser vertical;
- 2 – A tangente central ou eixo do nível *HH* deve ser horizontal;
- 3 – O eixo óptico ou de colimação *OO* deve ser paralelo à tangente central *HH*.

b) *Classificação geral dos níveis de luneta. Retificações.* Os níveis de luneta podem ser classificados em quatro categorias:

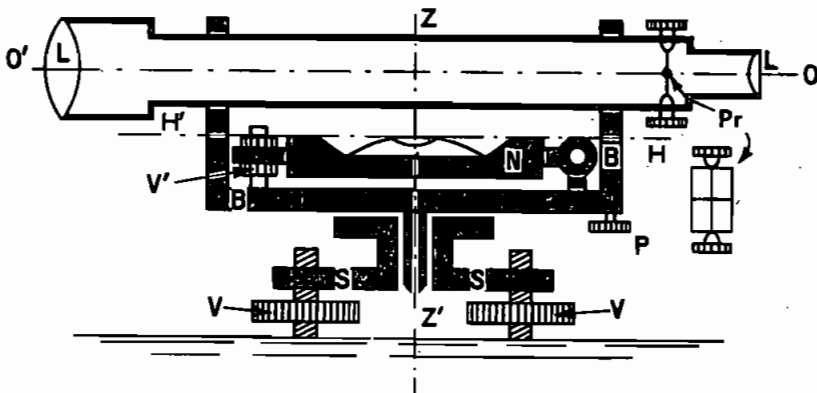


FIG. 255

1.^a – Nível com luneta e nível de bolhas fixos entre si e à barra horizontal (tipos: *Watts, Zeiss, Wild, Kern, etc.*);

2.^a – Nível com luneta amovível e nível de bolha fixo à barra horizontalmente (tipo *Lenoir*).

3.^a – Nível com luneta e nível de bolha amovíveis independentemente (tipo *Lenoir*).

4.^a – Nível com luneta amovível e nível de bolha fixo à luneta (tipo *Gurley*).

1) *Nível tipo Égault* (2.^a categoria). O nível tipo Égault vem representado esquematicamente na (Fig. 256).

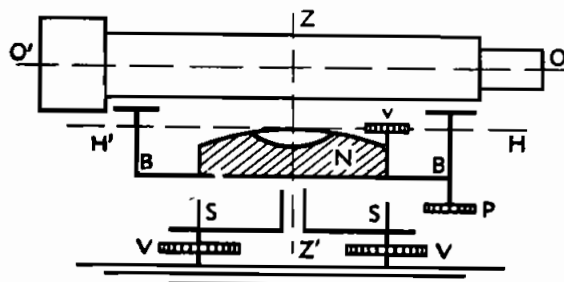


FIG. 256

A barra horizontal tem nas extremidades dois munhões nos quais apóia-se a luneta, a qual está munida de braçadeiras pertencentes a uma mesma superfície cilíndrica. O nível de bôlha está fixado na barra, mas pode ser deslocado verticalmente pelo parafuso de correção v . Um dos munhões da barra pode também experimentar deslocamentos verticais pelo parafuso P .

1.^a e 2.^a retificação. Torna-se vertical o eixo de rotação e, conseqüentemente, horizontal a tangente central do nível de bolha, procedendo à retificação deste, que é a mesma já desenvolvida na 1.^a retificação de um teodolito.

3.^a retificação. Comporta duas operações distintas:

a) Tornar a linha de visada coincidente com o eixo mecânico das munhoneiras.

b) Tornar a linha de visada paralela à tangente central do nível de bolha.

Operação a: Faz-se uma leitura a em uma mira graduada vertical (Fig. 257), dá-se em seguida à luneta uma rotação de 180° em torno

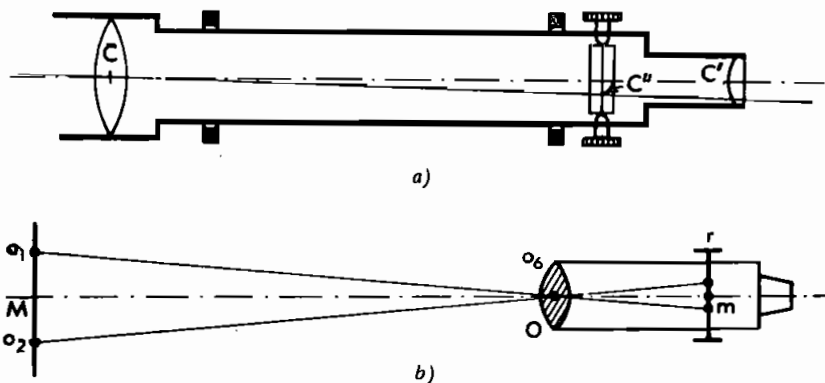


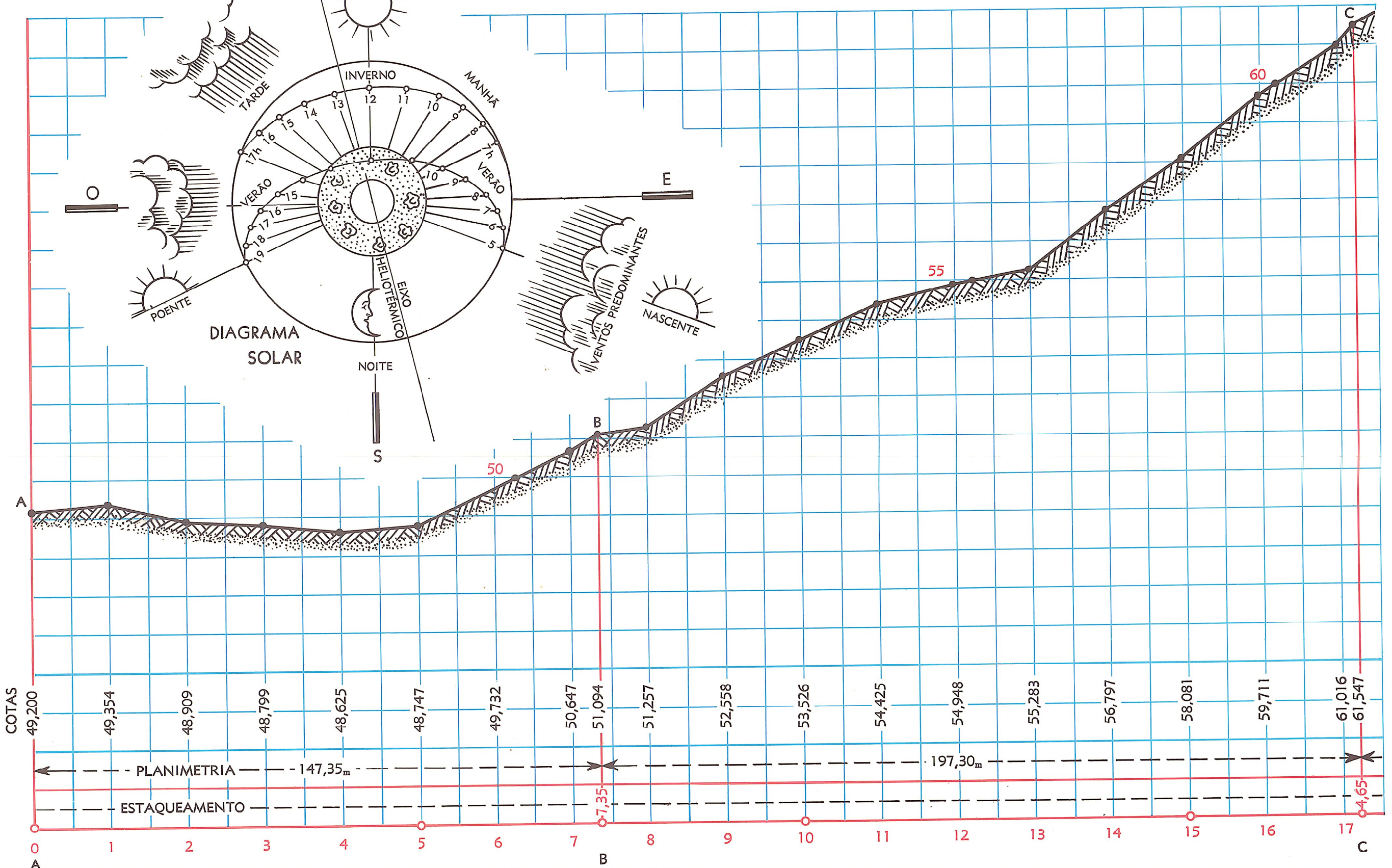
FIG. 257

PERFIL LONGITUDINAL

PRANCHA VIII

ESCALAS { HORIZONTAL 1: 1000
VERTICAL 1: 100

A) POLIGONAL EXTERIOR



do seu próprio eixo e faz-se uma nova leitura a_2 . Desloca-se o retículo com o parafuso retificador r até fazer na mira a leitura média.

$$\frac{a_1 + a_2}{2}$$

Operação b: Faz-se também uma leitura a_1 em uma mira vertical, depois inverte-se a luneta nos munhões, dá-se à barra horizontal uma rotação de 180° e faz-se uma nova leitura a_2 . Obtém-se o paralelismo procurado deslocando em altura um dos munhões, por meio do parafuso de correção P , até a leitura média:

$$\frac{a_1 + a_2}{2}$$

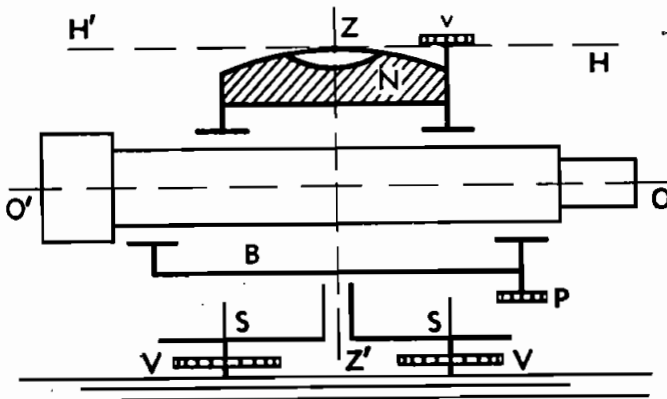


FIG. 258

2) *Nível tipo Lenoir (3.ª categoria).* O nível tipo Lenoir esquematicamente representado na Fig. 258 tem a armação do nível de bolha com as extremidades dobradas em ângulo reto e cavadas em forma de V , o que permite apoiá-lo no tubo da luneta.

1.ª retificação. Dispõe-se a barra segundo um dos parafusos calantes, por meio do qual leva-se a bolha aos reparos. Inverte-se o nível nas munhoneiras e corrige-se metade do afastamento da bolha com o parafuso calante e a outra metade com o parafuso de correção do nível de bolha (v).

2.ª retificação. Torna-se vertical o eixo de rotação ZZ por meio dos parafusos calantes e do parafuso P de correção dos munhões.

3.ª retificação. Torna-se a linha de visada paralela ao eixo das munhoneiras, procedendo como foi indicado para o nível tipo Egault (2 operações).

3) *Nível de luneta, tipo Gurley (4.ª categoria)*. Este tipo de nível, (Fig. 259-a) de procedência norte-americana, caracteriza-se por ter o nível de bolha fixo à luneta e esta amovível ou independente, podendo ser destacada e invertida de posição nas munhoneiras. Devido à sua robustez, estes níveis se prestam para trabalhos em terreno difícil ou coberto de mato, suportando bem grandes variações climáticas e tiveram muita aplicação no desbravamento de extensas regiões do nosso País.

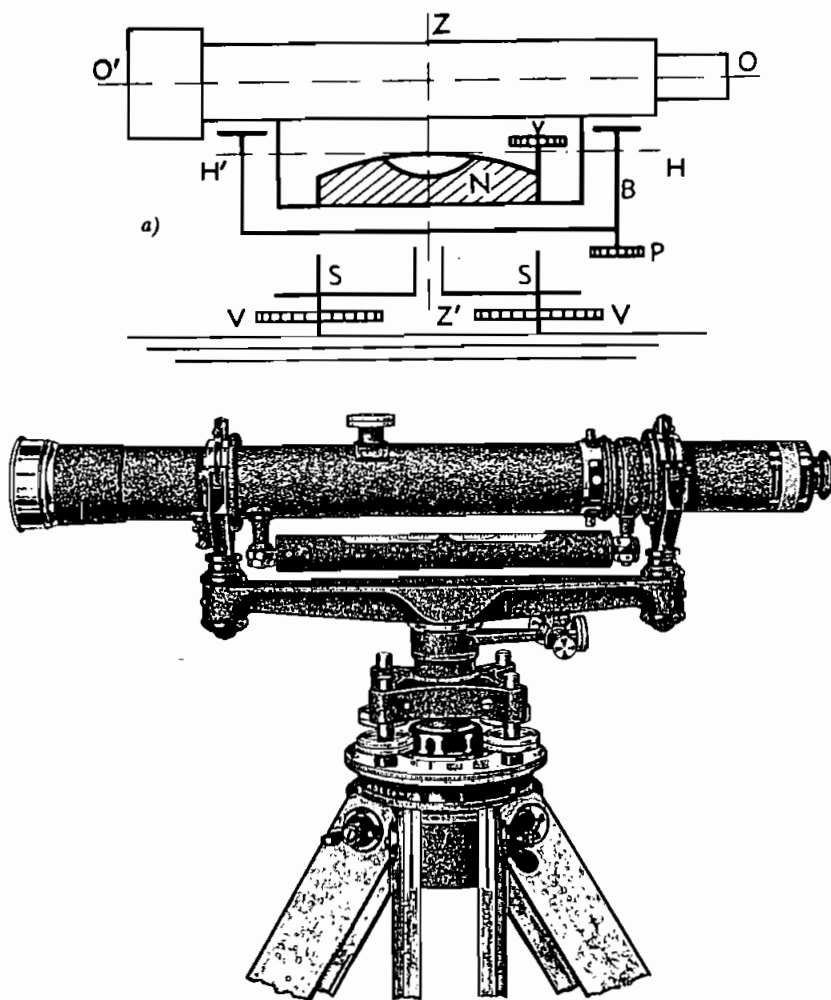


FIG. 259

a) *Nível Keuffel & Esser*. A (Fig. 259) representa um tipo de nível Keuffel & Esser, da 4.^a categoria, com luneta de focalização interna.

A *luneta* tem 18 polegadas (45,7 cm) de comprimento, é acromática e terrestre, com imagem direta.

A *objetiva* tem 1 5/8 polegada (41,3 mm) de diâmetro. O tubo de *focalização interna* é dotado de uma lente que se desloca por meio de uma cremalheira e pinhão comandado por um parafuso exterior.

A *ocular*, de lente dupla, tem dispositivo micrométrico e escala para focalizar.

O *aumento da luneta*, de imagem direta, é de 32 diâmetros.

O *nível de bolha* da luneta tem uma sensibilidade de 20 segundos por divisão (2 mm) e é adaptado num tubo ajustável tanto horizontal como verticalmente.

A *barra do nível* é feita de metal de canhão, de construção aperfeiçoada possuindo grande solidez e oferecendo resistência mínima à ação do vento.

Uma *forquilha*, que pode ser elevada ou abaixada, é provida de um batente ajustável com dobradiça para colocar a luneta e respectivos fios do retículo numa posição vertical e horizontal; as forquilhas são fixadas por um dispositivo aperfeiçoado, que dispensam os pinos.

Eixo vertical de bronze, ajustado com precisão. Parafuso de fixação e de chamada aperfeiçoados e com contramolha.

Parafusos calantes, em número de quatro, para prender o instrumento ao tripé. Têm fios estadimétricos, com a constante 100. Pode ser dotado de um limbo horizontal suplementar para trabalhos completos em terreno plano, lavouras de arroz, por exemplo.

A (Fig. 260) representa os cortes da luneta e do próprio nível Keuffel & Esser. A nomenclatura de suas principais peças é idêntica à de outros aparelhos — teodolitos e níveis — já detalhados.

O catálogo ilustrado dos fabricantes *Gurley* e *Keuffel & Esser*, contém todos os esclarecimentos de que possa carecer o topógrafo ou engenheiro para o seu pormenorizado esclarecimento.

Retificações do nível tipo Gurley.

1.^a — *Paralelismo entre o eixo óptico e o eixo mecânico ou geométrico da luneta*. Instala-se o nível e, numa posição qualquer da luneta, procura-se visar um ponto distante (*A*) a 100 ou 200 metros do aparelho.

Depois de retirados os batentes das forquilhas, gira-se a luneta em torno de seu próprio eixo, numa rotação completa e observa-se se o ponto visado deixou de ser coberto.

No caso afirmativo o cruzamento determinará um novo ponto *B* (Fig. 261) oposto ao primeiro.

Corrige-se metade do afastamento no sentido vertical pelos parafusos horizontais do retículo e metade no sentido horizontal pelos para-

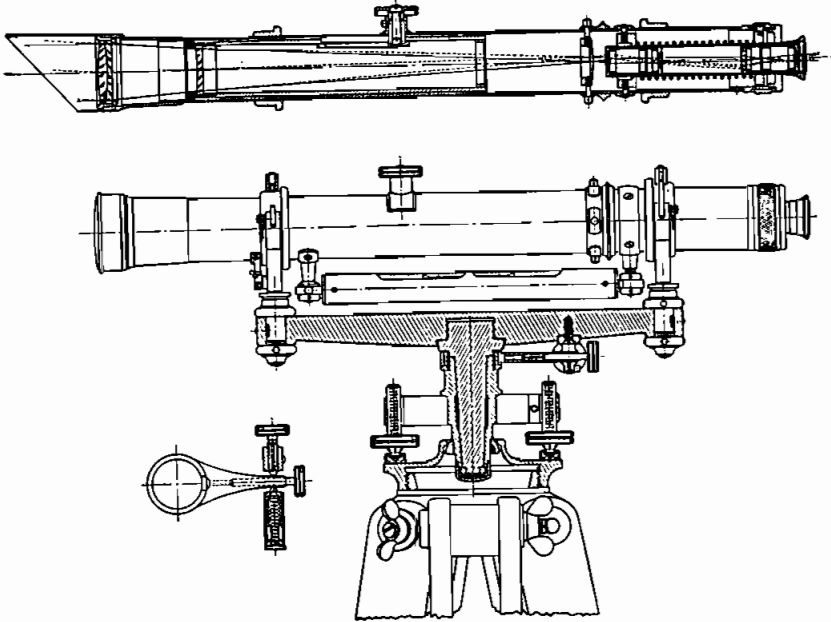


FIG. 260

fusos verticais. A outra metade, em virtude da rotação de 180° , é anulada pelos parafusos calantes.

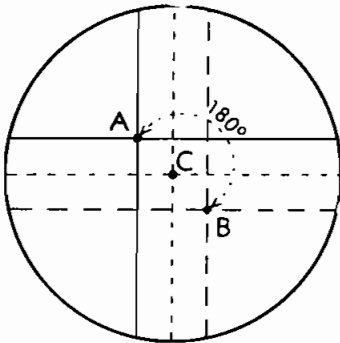


FIG. 261

Repete-se a operação até que na rotação da luneta o cruzamento dos fios no retículo permaneça sobre o ponto central C.

2.^a – *Paralelismo entre o eixo óptico e o eixo do nível de bolha.* Esta retificação refere-se ao paralelismo dos eixos anteriores, retificados e coincidentes, com a tangente ao nível de bolha, estando esta centrada.

Nivela-se cuidadosamente o nível depois de ajustá-la em posição sobre um par de parafusos calantes opostos.

Retira-se a luneta dos descansos (forquilha ou garfos) evitando o choque, e inverte-se-lhe a posição, trocando de descansos.

Se a bolha se mantiver centrada, nada há a retificar, porém se houver deslocamento para a direita ou para a esquerda, corrige-se

metade do desvio pelos parafusos cabrestantes que prendem o nível de bôlha à luneta; retoca-se a outra metade pelos parafusos calantes.

Repete-se a operação até a perfeita centragem nas duas posições dadas.

3.^a e última retificação — *Verticalidade do eixo principal de rotação.* Refere-se à verticalidade do eixo de rotação do nível ou à horizontalidade da barra dos munhões.

Coloca-se a luneta (com o parafuso de pressão solto), solidária às forquilhas, segundo um par de parafusos calantes opostos.

Centra-se a bôlha nessa posição e gira-se o nível horizontalmente de 180°; qualquer afastamento da bôlha da posição central deve ser corrigido, metade nos parafusos de cabrestante que ligam as forquilhas à barra e o resto nos parafusos calantes.

O nível de luneta independente é muito cômodo de retificar, pois o próprio operador, na estação de trabalho, pode verificar e fazer as retificações, sem necessidade de auxiliar ou de régua.

4) *Nível, tipo universal* (1.^a categoria). Os níveis de luneta e nível de bôlha fixos são de procedência européia e têm qualidades que os tornam preferidos por muitos engenheiros e técnicos, pela comodidade, clareza e menor peso que apresentam.

O protótipo dessa categoria de nível foi fabricado pela Casa Zeiss. Tem luneta inamovível, é extremamente portátil e tem uma óptica de primeira ordem, com imagens invertidas, em contraste com os de algumas procedências que dão imagens reinvertidas ou normais, obtidas por oculares compostas, com prejuízo da clareza e visibilidade.

Nos primeiros há maior clareza, e nos outros mais comodidade nas leituras; os instrumentos europeus possuem, além disso, o sistema de três parafusos calantes, ao passo que os de procedência norte-americana têm, em sua generalidade, quatro parafusos.

Os de três parafusos estão mais de acordo com os instrumentos de precisão, pois obedecem melhor à manobra, ao passo que os de quatro são mais estáveis, mas exigem mais cuidado na calagem e são, a nosso ver, inferiores aos primeiros.

a) *Nível Zeiss IV, com limbo horizontal.* Este aparelho é destinado aos nivelamentos técnicos simples e aos levantamentos taqueométricos em terreno plano (Fig. 262).

Os tubos da luneta e do nível de bôlha são construídos de uma só peça.

Os parafusos de correção são encapsulados e os de calagem e de comando (pressão diferencial e de focagem interna) são protegidos contra o vento e as poeiras.

A leitura da bôlha é feita por meio de um espelho, e a do círculo horizontal, com um simples abaixar de cabeça, por uma lupa com

aumento de 10 diâmetros (Fig. 263). A luneta, com um comprimento de 19 cm, tem um aumento de 25 diâmetros, com uma abertura da objetiva de 30 mm. O retículo é provido de traços diastimométricos de constante 100; permite leituras com a precisão de $\pm 0,5$ mm até 100 metros e $\pm 0,5$ cm até 300 metros e o erro médio altimétrico a temer para 1 km de nivelamento nos dois sentidos, é de ± 8 mm.

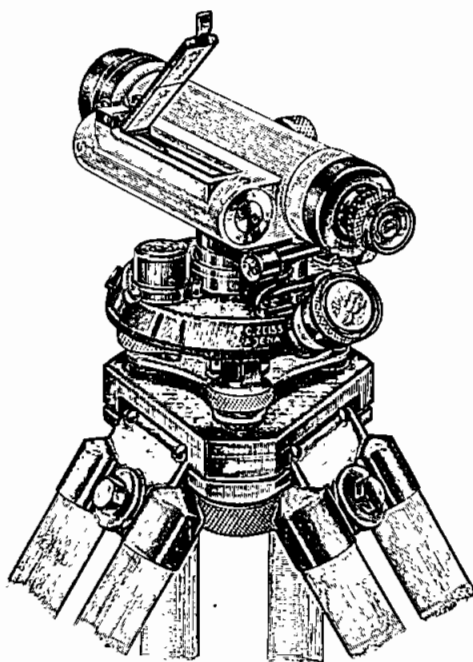


FIG. 262



FIG. 263

A sensibilidade do nível tubular para 2 mm é de 30 segundos, com precisão média de calagem da bôlha de $\pm 5''$ sendo a sensibilidade do nível esférico, para verticalizar o eixo principal, de $10''$.

É muito prático para ser transportado pelo próprio nivelador, pois seu peso é de apenas 2 kg e com tripé mais 4 kg.

Retificações.

1.^a e 2.^a – *Horizontalidade do eixo do nível tubular e verticalidade do eixo principal.* Estas retificações são feitas pelo nível de bolha tubular.

Coloca-se a luneta paralela a um par qualquer de parafusos calantes e nivela-se o aparelho, anotando a leitura do círculo horizontal (Fig. 263); gira-se a luneta de 180° com o auxílio do limbo (leitura inicial + 180°) e verifica-se se há coincidência da bolha.

Havendo desvio da mesma, corrige-se metade nos parafusos calantes e metade no parafuso de correção do nível.

Repete-se a operação até que em qualquer posição haja perfeita coincidência.

Uma vez que a tangente ao nível de bolha seja horizontal, o eixo principal é vertical pela construção rígida.

Retificada a bolha tubular, procede-se à *retificação da bolha esférica*, por meio dos parafusos de correção nela existentes.

3.^a – *Paralelismo do eixo óptico e do eixo do nível de bolha.* Esta retificação, que permite horizontalizar o eixo óptico ou a linha de colimação, é feita no terreno, por um *nivelamento médio*, por um nivelamento recíproco e por outros processos. Desenvolveremos aqui o primeiro.

Nivelamento médio. Sejam (Fig. 264) três pontos equidistantes *A*, *B* e *C* tomados num terreno aproximadamente horizontal.

Instala-se o nível em *B* e centra-se convenientemente a bôlha.

Visa-se uma mira falante colocada a ± 50 metros em *A* e anota-se a leitura feita (r_1), até os milímetros.

Muda-se a mira para o ponto equidistante *C* e faz-se nova leitura (v_1); em virtude da equidistância, embora haja uma colimação α do

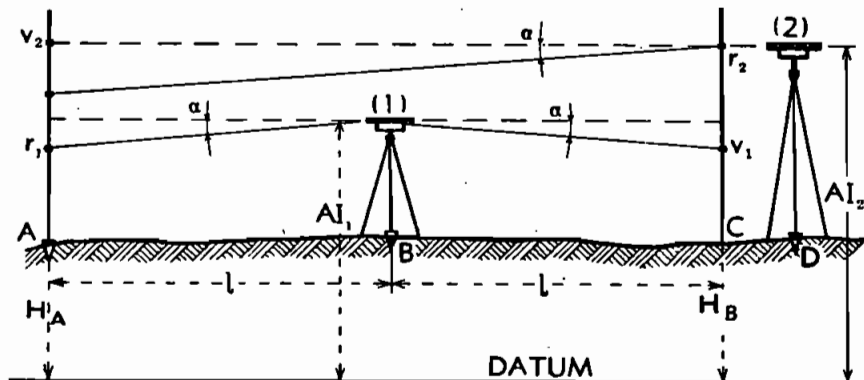


FIG. 264

eixo óptico, o erro respectivo se anula e a diferença de nível entre os dois pontos A e C , dada pela diferença $r_1 - v_1$, é exata.

Instala-se o nível no ponto D , próximo a um dos pontos extremos (± 2 m), e faz-se uma leitura no ponto C (r_2) leitura esta que pode ser considerada certa pelo pequeno afastamento.

Transporta-se a mira para o ponto A e a leitura que *se deverá fazer* é igual à diferença de nível entre A e B mais a leitura r_2 .

Exemplo:

$$H_A = 50,000 \text{ m (cota arbitrária de } A) + r_1 = + 1,673$$

$$AI_1 = 51,673 \text{ (1.ª altura do nível) } - v_1 = 0,841$$

$$H_B = 50,832 \text{ (cota do ponto } B) + r_2 = 1,387$$

$$AI_2 = 52,219 \text{ (2.ª altura do nível) } - v_2 = 2,219 \text{ (leitura a fazer)}$$

$$H_A = 50,000 \text{ (cota de partida).}$$

A correção, se houver, é feita nos parafusos de correção do retículo, que neste instrumento são fechados por um anel junto à ocular; com a nova leitura (v_2) em A , pode-se alterar o valor de r_2 , razão por que essas leituras devem ser repetidas.

Feitas estas retificações pode-se considerar o aparelho em condições de permitir nivelamentos certos.

4.ª — *Erro de cruzamento.* Caso as projeções horizontais dos eixos do nível e de colimação da luneta formem um ângulo entre si, em vez de serem paralelas, existe um erro, chamado de *cruzamento*, de pouca importância. Em todo o caso o mesmo pode ser verificado e eliminado do seguinte modo:

Instala-se o tripé de modo que uma perna e um parafuso calante fiquem dirigidos no sentido da mira.

Feita a calagem geral faz-se uma leitura na mira com a bolha exatamente centrada.

Move-se em seguida um dos outros parafusos calantes, imprimindo-lhe uma rotação completa, ou não, e com o oposto reestabelece-se a leitura da mira.

Notando-se um desvio na bolha depois desta operação, deve-se eliminá-lo com os parafusos transversais que mantêm o nível de bolha preso na luneta.

O instrumento é de construção rígida, completamente encasulado e dificilmente se desretificará. É aconselhável não fazer quaisquer correções senão quando se tenha certeza de um defeito.

5) *Nível de precisão com bolha bipartida.*

a) *Generalidades.* Todos os fabricantes modernos de instrumentos topográficos e geodésicos de precisão (Zeiss, Kern, Wild, Fennel, etc.) dotaram os níveis de aperfeiçoamentos extraordinários; assim, um dispositivo de prismas permite a coincidência das metades opostas da bolha, aumentando a precisão, diminuindo o número de oscilações e, portanto, o tempo destinado à leitura.

A luneta, sendo reversível nos anéis especiais de apoio, dá garantia absoluta de paralelismo de duas tangentes opostas à bolha e retificação do nível, mediante duas leituras à frente sobre um ponto de mira.

Além disso, as bolhas tornaram-se muito menos sensíveis às variações de temperatura, mantendo-se elas constantes entre 20 e 40° C.

β) *Bolha bifartida de coincidência, sistema Wild.* A parte principal do sistema de coincidência da bolha compõe-se de dois prismas simetricamente colocados um em relação ao outro (Fig. 265-a). O plano vertical formado pelas superfícies frontais destes prismas, divide a bolha ao meio de seu eixo longitudinal e de tal maneira que se vêem somente os extremos da bolha. A extremidade da esquerda é refletida para o lado da frente do prisma, de modo que a imagem do eixo da bolha coincide com a linha em que os dois prismas se encontram. A imagem do lado direito da bolha é produzida da mesma maneira, encontrando-se assim as duas imagens na referida linha.

Depreende-se daí que a extremidade esquerda da bolha se desloca para baixo, quando a bolha se orienta para a esquerda, ao passo que a extremidade direita da bolha se desloca para cima.

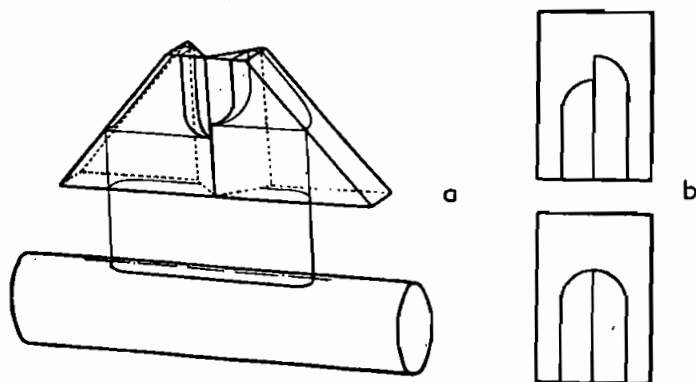


FIG. 265

O movimento simétrico das extremidades da bolha é, portanto, transformado em duas imagens de movimento oposto. A coincidência é feita quando as imagens das duas extremidades da bolha formam um semicírculo perfeito (Fig. 265-b). Deslocando-se nesta posição a bolha dum certo fator α , uma das imagens desloca-se também do mesmo fator α para baixo e a outra imagem analogamente para cima, quer dizer, que as duas imagens se deslocam uma da outra do fator 2α .

Este sistema elimina também a influência da temperatura pelas seguintes razões: sob determinada elevação de temperatura, a bolha

dilata-se, modificando o seu tamanho. Como, porém, as medidas internas do tubo são simétricas, a extremidade esquerda da bôlha se deslocará para a direita e a extremidade direita na mesma proporção para a esquerda. Conseqüentemente, as duas imagens da bôlha se deslocam no mesmo sentido e na mesma proporção, mantendo perfeita a coincidência.

Há ótimos tipos de níveis da luneta fixa, com a bolha bipartida, tais como o Nível Zeiss I, o Nível Wild NI, o Nível Kern NK2, e muitos outros, para nivelamentos técnicos médios, de perfis transversais, nivelamento de linhas para determinações altimétricas de RN (referências de nível) e para levantamentos taqueométricos em terrenos planos.

6) *Nível de luneta reversível.*

a) *Nível Wild NII.* O nível Wild NII, com ou sem limbo horizontal (Fig. 266), com *luneta reversível* em sentido longitudinal é de emprego geral, pois destina-se a todos os nivelamentos, longitudinais,

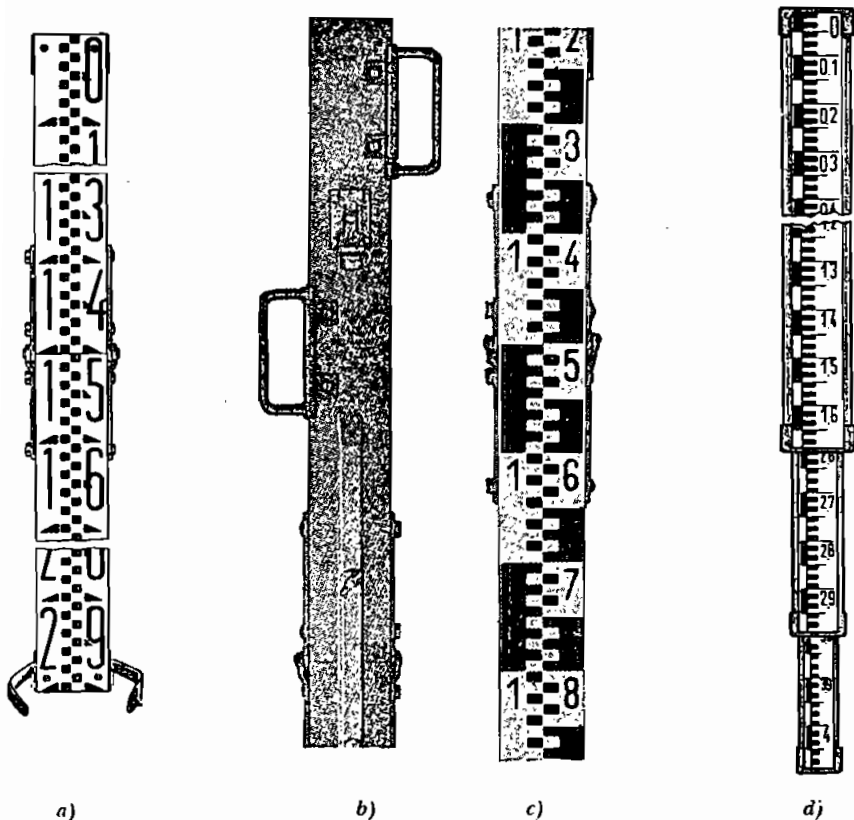
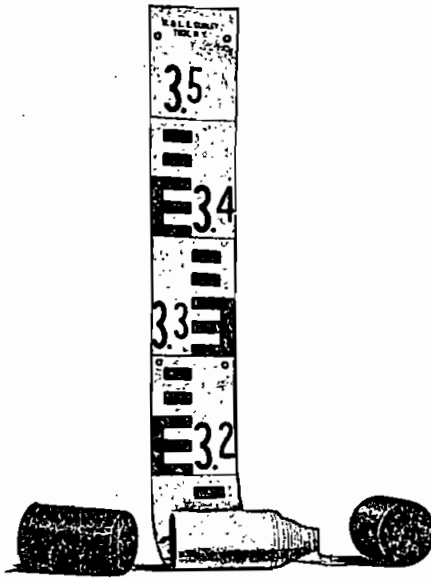


FIG. 266

transversais, por irradiação, tanto em topografia, como em estradas, vias férreas, hidráulicas, pontes, e caracteriza-se por um elevado grau de precisão e facilidade de instalação e trabalho.



e)
FIG. 266

As características desse nível são:

Precisão por 1 000 metros = $\pm 2,5$ mm
 Ampliação da luneta — 28 diâmetros
 Diâmetro da objetiva — 40 mm
 Fios stadimétricos — 1:100
 Constante aditiva — 0
 Sensibilidade da bolha por 2 mm — 20"

Distância com leitura de mira até 300 m

Campo de visão em 1 000 m — 33 m

Peso do instrumento — 2,6 kg

Peso do estojo metálico — 1,7 kg

Peso do tripé extensível — 4,7 kg

Retificações. Graças à construção rígida do nível, as retificações se conservam por longo tempo.

Caso necessário, procedê-se da seguinte maneira:

Bolha esférica. Existem para a sua retificação 4 parafusos, sendo 2 de pressão e 2 de tração. Nivelando a bolha esférica com os parafusos calantes, gira-se o aparelho de 180° e corrige-se um erro eventual, corri-

A luneta e os suportes do nível de bolha formam um só bloco. A bolha é completamente recoberta para ficar abrigada dos raios solares; é observada através de uma lupa de fraco aumento para repouso do olho do observador. Os níveis antigos eram feitos de luneta fixa porque a estabilidade dos instrumentos conhecidos de luneta reversível deixava muito a desejar.

O novo nível de luneta Wild N II apresenta uma solução construtiva original; a luneta não é mantida por um cilindro, mas repousa num garfo em forma de V perfeitamente ajustado.

Os anéis de apoio da luneta, assim como os garfos em V, são feitos de aço temperado inalterável e não sujeitos a desgaste.

gindo a metade com os parafusos calantes e retificando a outra metade pelos parafusos de correção.

Bólha tubular de coincidência. Começa-se, levando o nível à posição segunda, chamada posição invertida, apertando para isso o botão visível sob a ocular, girando a luneta em volta de seu eixo longitudinal e segurando-a pela parte da objetiva. Por meio do parafuso de chamada efetua-se a coincidência das duas metades da bolha, observada através de um visor, após ter feito o nivelamento por meio da bolha esférica. Anota-se a leitura numa mira visada à distância de algumas dezenas de metros.

Observação: Na posição invertida da luneta, a imagem da bolha aparece um pouco turva pelo fato de se observar a bolha, nesta posição, através de seu líquido, ficando os prismas abaixo dela. Durante o trabalho, porém, usa-se a luneta em posição direta.

Feita a leitura da mira, gira-se a luneta até a posição inicial ou direta, coincidindo novamente a bolha e fazendo nova leitura. Havendo diferença entre as duas leituras da bolha é evidente que se deve retificá-la. Para isso, determina-se a média das duas leituras feitas e ajusta-se, por meio do parafuso de chamada da luneta e também do nível de bolha, o fio horizontal do retículo até se obter a referida leitura média, na mira. Restabelece-se a centragem da bolha por meio dos parafusos *verticais* de retificação, existentes num dos extremos do suporte do nível de bolha.

Erro de cruzamento. Idêntico ao já dado para o nível Zeiss (4.^o retificação).

c) *Tipos de miras. Sapatas.* As réguas de mira ou miras são as réguas onde se medem as alturas de cada ponto a nivelar, acima do solo ou ponto de apoio.

Uma *mira simples* é uma régua de dois metros sobre a qual desliza um alvo. Na parte posterior da régua há uma graduação em decímetros e o alvo arrasta uma pequena régua dividida em milímetros, que permite determinar com a aproximação de 1 mm a altura do centro do alvo acima do solo.

As miras de correção são dotadas de uma segunda parte de 2 metros, que desliza no interior da primeira; possuem uma dupla graduação e podem ter dois alvos.

Nas miras simples ou de correção a leitura é feita pelo *porta-mira*.

Muito preferível é o emprego das *miras falantes* em que a leitura é feita diretamente pelo nivelador; são as miras empregadas correntemente e constam de uma régua larga, simples ou de correção, de madeira convenientemente tratada, pintadas em branco, preto e encarnado e visíveis do lado do operador.

Todas as miras são munidas de calotas de aço nas extremidades, com nervuras dorsais, níveis de bôlha esféricos e em muitas delas, braçadeiras de metal.

Há um grande número de tipos de miras e graduações, fornecidos pelas principais fábricas de instrumental topográfico.

Em nosso País, no Estado de São Paulo a Casa Rosenhain, que se dedica à construção de instrumental, principalmente para levantamentos expeditos e de bom material para desenho, está fabricando sólidas miras de 3, 4 e 5 m com graduação a escolher (Fig. 266).

Na (Fig. 266-a) vemos um ótimo tipo de mira falante Zeiss, de 3 metros, com números grandes, dentro de cada decímetro, apropriada para nivelamentos de poligonais estaqueadas; são fabricadas também com 4 metros.

Na (Fig. 266-b) outro ótimo tipo de mira falante Wild, com articulações sólidas, muito ajustadas, nível esférico desmontável e braçadeiras.

Na (Fig. 266-c) uma mira falante, tipo Casela, de 3 partes extensíveis, de 4 metros, com imagem de números retos ou invertidos; é o mais cômodo tipo de mira, principalmente para trabalhar dentro do mato.

Quando se deseja leituras sem grande rigor, a mira de bolso (Fig. 266-d) Gurley é muito prática e conveniente.

Pode ser enrolada facilmente, e para o uso é colocada sobre um sarrafo ao qual é fixada por meio de tachas de cobre.

Em todo o nivelamento de precisão, é muito conveniente a utilização de *sapatas* ou *soculos*, comumente chamados de *sapos* (Fig. 267), que permitem a marcação das referências auxiliares de nivelamento, como veremos adiante.

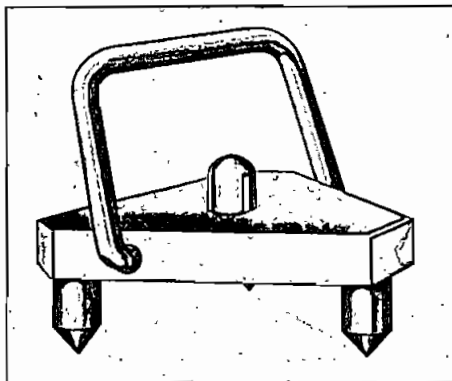


FIG. 267

§ 24 – Prática do nivelamento, no campo e no escritório

Para o estudo do relevo do solo, deve-se determinar a distância vertical ou diferença de nível dos diversos pontos que o definem, calculando suas cotas ou altitudes. As primeiras são dadas em relação a um *plano de referência* arbitrário, e as segundas ao *nível médio dos mares*.

O nivelamento pode ser *geométrico*, direto ou por alturas, *trigonométrico*, indireto ou por declives, e físico ou *barométrico*.

As altitudes são obtidas diretamente pelos barômetros e aneróides, e as cotas pelos níveis de luneta e pelos teodolitos.

III – 1) Operações de campo. Referências de nível

As leituras procedidas no campo devem sempre ser feitas em miras mantidas verticalmente sobre estacas ou sapatas especiais. Para se obter a necessária verticalidade é preferível colocar-se um nível esférico nas costas da mira do que submetê-la a movimento oscilatório para frente e para trás (movimento pendular).

Fora da vertical, a leitura será a de uma hipotenusa e não do cateto que lhe corresponde (Fig. 268). O nivelador colocado junto ao instrumento pode controlar unicamente a inclinação longitudinal da mira, devendo estabelecer sinais convencionais com o porta-mira para a oscilação da mesma para um ou outro lado, mudança de estação, permanência na estaca, ou *Ra* (referência auxiliar) enquanto se muda o instrumento, alongamento da mira, etc.

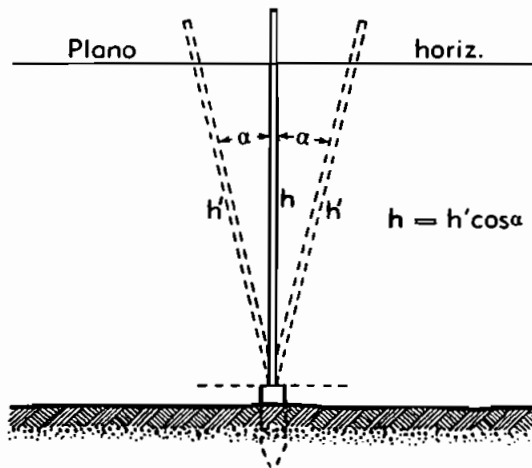


FIG. 268

O porta-mira deve abrir completamente cada segmento ou parte da mira, até que a mola de fixação se adapte no engate, sem o que a leitura feita na parte superior estará errada.

O nível pode ser instalado em qualquer ponto, geralmente fora do alinhamento, pois as leituras são feitas na intersecção do plano horizontal descrito pelo eixo óptico do nível com a mira verticalizada. Sempre que possível, o nível deve ser instalado a igual distância dos pontos extremos a nivelar.

A influência da curvatura da terra e refração atmosférica, causa um erro de abaixamento da linha de visada igual a $\epsilon (m) \doteq 0,068 D^2$ (km), que limita o alcance das visadas. Por essa razão as visadas não devem exceder de 100 a 150 metros, e para que também os milímetros na mira possam ser avaliados. A leitura depende do tipo de nível empregado, das condições atmosféricas e do afastamento dos pontos a nivelar.

A exatidão de um nivelamento depende do cuidado das leituras que influem diretamente no fechamento altimétrico da poligonal, isto é, das leituras feitas na primeira visada, após a instalação, para a determinação da *altura do instrumento*, que se chama *visada de ré*, e na *última de vante*, que se chama *visada de mudança*.

As estacas de vante *intermediárias* não requerem cuidados especiais, embora devam ser sempre verificadas por um *renivelamento* de todas as estacas ou, pelo menos, por um *contranivelamento* entre as estacas de mudança, que aproveita o máximo alcance das visadas para cada lado.

Todas as leituras devem ser feitas com aproximação de milímetros.

Com o intuito de fixar no campo pontos que correspondam a cotas de um nivelamento, costumam-se cravar, de quilômetro em quilômetro, ao lado do eixo da linha do projeto, em estradas, ou da poligonal, em topografia, estações amarradas às estacas do alinhamento e referidas a pontos seguros, de fácil identificação, quando necessário, mesmo decorridos anos.

Essas estações são chamadas *referências de nível* e se designam por *RN* acompanhadas de um número, bem definido na caderneta de nivelamento; por exemplo, *RN8*, a 15 metros do eixo da estrada, no cruzamento com a estrada para, à direita, junto a um poste telegráfico.

Os *RN* são *artificiais*, de boa madeira, com entalhe especial (Fig. 269), para inscrição a fogo e aresta *ab* para colocação da mira, ou de preferência, *naturais*, como uma soleira

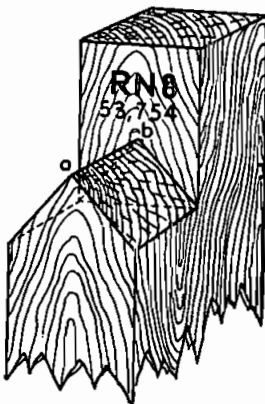


FIG. 269

da porta de um edifício, pedra natural, entalhe em árvore bem desenvolvida, etc.

2) *Nivelamento simples*. Instalado o nível de luneta firmemente num ponto M conveniente, que não precisa situar-se na linha a nivelar e sim, aproximadamente equidistante dos pontos extremos, centra-se a bolha de modo que a luneta descreva um plano horizontal em torno do eixo principal do nível. A *altura do instrumento* (AI), em nivelamento, é a altura do eixo óptico acima do plano de referência ou *Datum*. Para determiná-la faz-se uma leitura inicial num ponto de cota conhecida ou arbitrária — seja A esse ponto, de cota C_A e r_a a leitura chamada *visada de ré*.

Assim, a cota do plano horizontal de referência para o cálculo de todas as outras cotas será

$$AI = C_A + r_a \quad (204)$$

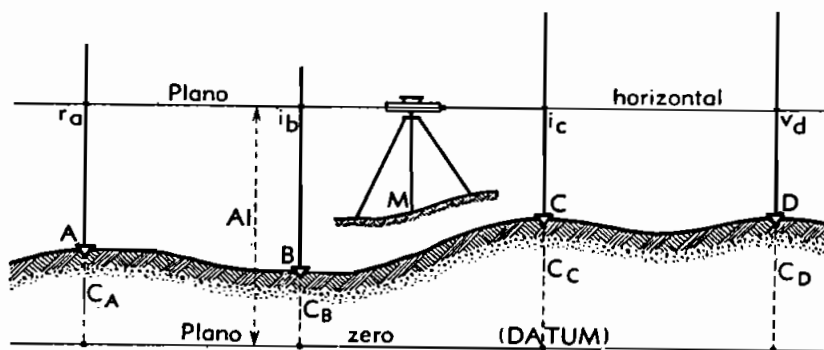


FIG. 270

A cota do ponto extremo D , equidistante de A , é obtida em função da *visada vante* feita em D (v_d) e assim

$$C_D = AI - v_d \quad (205)$$

Duas, portanto, são as regras para nivelar:

1 — A *altura do instrumento* é igual à soma da visada ré com a cota do ponto onde a mesma foi feita;

2 — A *cota de um ponto*, em função da altura do instrumento, é a diferença entre tal altura e a visada a vante lida no mesmo ponto.

Do mesmo modo procede-se para o cálculo das cotas dos pontos intermediários.

O nivelamento simples, que pode ser longitudinal, transversal ou radiante, é o que se faz com apenas uma instalação do nível.

Para achar as diferenças de nível entre quaisquer pontos, subtraem-se as respectivas cotas ou altitudes ou as diferenças entre as visadas.

3) *Nivelamento composto.* Quando o desnível é superior à altura da mira, isto é, a quatro metros, o nivelamento será composto, exigindo mais de uma estação do nível. Decompõe-se o trecho a nivelar (Fig. 271) em outros que possam ser nivelados convenientemente.

Instalado o nível num ponto *M*, por exemplo, é feita uma *visada* a Ré máxima no ponto *A*, início da poligonal a nivelar, e outra a *vante*, mínima, no ponto *B* e assim, sucessivamente, até atingir o alto da rampa. Na contra-rampa, as visadas serão contrárias, isto é, mínimas a ré, e máximas a vante.

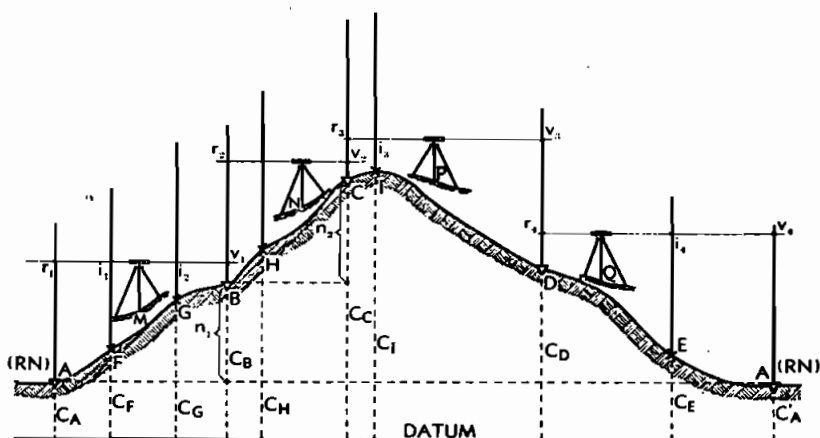


FIG. 271

Para evitar erros de diversas naturezas, deve-se instalar o nível, sempre que possível e para maior precisão do nivelamento, o mais próximo dos pontos médios, isto é, em *M, N...* Também não se deve fazer leituras inferiores a 0,50 m e mesmo a 1 m em dias de sol e hora de forte irradiação e de movimento do ar, em que os raios luminosos próximos ao solo sofrem tal movimento e oscilam de tal modo que as leituras se tornam imprecisas; ocasiões, em que a distâncias grandes, é impossível fazer as leituras, devendo-se aproximar mais os pontos a nivelar.

A diferença de nível entre os pontos *A* e *B* será

$$n_1 = C_B - C_A = r_1 - v_1$$

entre os pontos *B* e *C*

$$n_2 = C_C - C_B = r_2 - v_2, \text{ etc.}$$

A diferença de nível entre os pontos extremos será, assim,

$$N = C_E - A = (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n) - (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$N = \Sigma r - \Sigma v \quad (206)$$

isto é, a diferença de nível num nivelamento longitudinal composto, entre dois pontos extremos, é obtida pela diferença entre a soma das visadas de ré e a soma das visadas de vante (de mudança).

Todos os pontos intermediários, quer no eixo da linha, quer lateralmente, ao alcance da luneta e da mira, podem ser nivelados do mesmo modo, sem que, no entretanto, as visadas respectivas se reflitam na exatidão do nivelamento.

Entretanto, os pontos intermediários *F, G, H ...* (Fig. 271) são necessários para o traçado de um bom perfil longitudinal, pois assinalam a mudança de declive do terreno.

4) *Verificações de um nivelamento; erros e sua distribuição.* Numa poligonal fechada, isto é, naquela em que partindo de um determinado ponto, percorre-se toda a poligonal e visa-se novamente, por último, o mesmo ponto de partida ou *RN*, a soma algébrica das diferenças de nível parciais deve ser nula ou

$$C_v - C_A = \Sigma r - \Sigma v = 0 \quad (207)$$

o que constitui uma verificação, tanto do nivelamento propriamente dito, como dos cálculos de cada página da caderneta.

É recomendável estabelecer um *RN* de km em km, e contranivelar, pois a verificação do nivelamento é feita de *RN* a *RN* e os erros, quando toleráveis, podem ser parcialmente distribuídos.

O erro de fechamento vertical nos nivelamentos comuns é variável, de acordo com o terreno, com o número de estações do nível e de outros fatores, de ± 5 mm a ± 10 mm por quilómetro. Para *n* quilómetros o erro médio total *temível* é de

$$e_m = \pm 5 \text{ mm } \sqrt{n} \quad (208)$$

e o erro máximo admissível

$$e = 2,5 e_m \quad (209)$$

Quando a poligonal é fechada, isto é, quando se fecha sobre si mesma, deve-se ter um erro de fechamento menor de que *e*; caso contrário, ou houve engano de cálculo ou leitura errada, o que cumpre verificar.

O erro é distribuído proporcionalmente entre todas as estações do nivelamento, isto é, nas *visadas ré*, que vão modificando sucessivamente as alturas dos planos paralelos ou degraus do nivelamento geométrico.

Em certas circunstâncias deve-se levar em conta, também, as distâncias dos pontos nivelados, quando em declividades abaixo de 5%.

O registro das observações e cálculo das cotas, tanto diretas como compensadas, se fará como mostra a página de caderneta, que segue.

5) Exemplo prático

Nivelamento dos vértices de uma poligonal fechada

Local Data

Dia (nublado, sol forte, etc.) Operador

Pontos nivelados (P _n)	LEITURAS		Alt. instr. (Al)	Cotas (C')	Correções (Δe')	Cotas compensadas (C)	Observações
	Ré (r)	Vante (v) mudança (m)					
A(RNO)	3,437		53,437			50,000	RNO — situado no entroncamento das ruas e junto ao passeio (0,30m)
F		2,621		50,816	0,002	50,818	
H		0,563		52,874	0,002	52,876	
"	3,826		56,700				
G		2,749		53,951	0,004	53,955	
C		0,502		56,198	0,004	56,202	
"	0,694		56,892				
H		0,388		56,504	0,006	56,510	
D		3,892		53,000	0,006	53,006	
"	0,842		53,842				
E		4,775		50,067	0,008	50,075	
A(RNO)		2,850		49,992	0,008	50,000	

VERIFICAÇÃO DOS CÁLCULOS

$$\Sigma r = 3,437 + 3,826 + 0,694 + 0,842 = 8,799$$

$$V_{(n)} = 0,563 + 0,502 + 3,892 + 2,850 = 8,807$$

$$\Sigma r - \Sigma v(m) = 8,799 - 8,807 = -0,008m$$

o

$$CA \text{ (final)} - CA \text{ (inicial)} =$$

$$= 49,992 - 50,000 = -0,008 \text{ m}$$

Verifica-se, assim, que no nivelamento geométrico da página de caderneta dada há um erro para menos de 0,008 m, que está dentro da tolerância, pois a poligonal tendo o perímetro 3,643 km, o erro tolerável é

$$e_m = \pm 5 \sqrt{3,643} = \pm 5 \times 1,9 = \pm 9,5 \text{ mm}$$

A distribuição do erro é feita nas alturas de instrumento, corrigindo as visadas a ré que as determinam; assim, no exemplo, o erro por estação será

$$e = \frac{-0,008}{4} = -0,002 \text{ m}$$

que devemos *somar* a cada visada a ré para compensar o nivelamento, recalculando as cotas.

Pode-se também criar uma coluna de *correções* e nos pontos nivelados da 1.^a estação, somar às cotas calculadas: a correção $1e$ ou 0,002; nas da 2.^a estação, $2e$ ou 0,004; nas da 3.^a, $3e$ ou 0,006 e, por fim, nas da 4.^a estação, $4e$ ou o erro total 0,008, ficando assim compensado o erro havido no nivelamento.

112 - 1) Nivelamento estadimétrico

Todo nível tem no campo da luneta, além do fio vertical e horizontal, mais dois fios suplementares, chamados *estadimétricos*, que servem para a determinação indireta das distâncias que o separam dos pontos visados.

A diferença das leituras desses dois fios, feitas na mira na mesma ocasião da leitura do fio médio ou nivelador (Fig. 272), permite achar a distância horizontal respectiva. Torna-se fácil, assim, a execução de um levantamento plani e altimétrico, em terreno plano ou levemente ondulado, como é o caso dos levantamentos em lavouras de arroz.

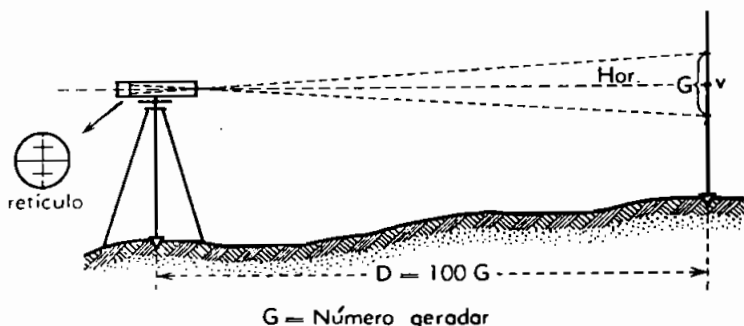


FIG. 272

Quando, além dos três fios horizontais, for o nível dotado ainda de limbo horizontal, a amarração planimétrica dos pontos pode ser feita por coordenadas polares, como se procede com um teodolito ou taqueômetro comum.

Pode-se, pois, fazer com um nível dotado de limbo horizontal o levantamento planimétrico e o nivelamento ao mesmo tempo.

2) *Nivelamento radiante.* É impossível, em certos casos, determinar-se de uma única estação de instrumento, a diferença de nível de pontos distribuídos numa maneira qualquer no terreno. Este processo é denominado de *nivelamento radiante*.

A mira é colocada em pontos já determinados por um levantamento planimétrico do terreno ou, como vimos acima, pelo próprio nível.

Nos nivelamentos de lavoura usa-se o processo do traçado de *linhas de base*, com estacas de 30 em 30 metros, por exemplo, com normais para os dois lados de 20, 30 ou de 50 em 50 metros, conforme indicação da Fig. 273. O nível instalado num ponto qualquer P e a mira nos diversos vértices do reticulado formado pela linha base e pelas seções em A e E , por ex., constituem a aplicação do nivelamento radiante.

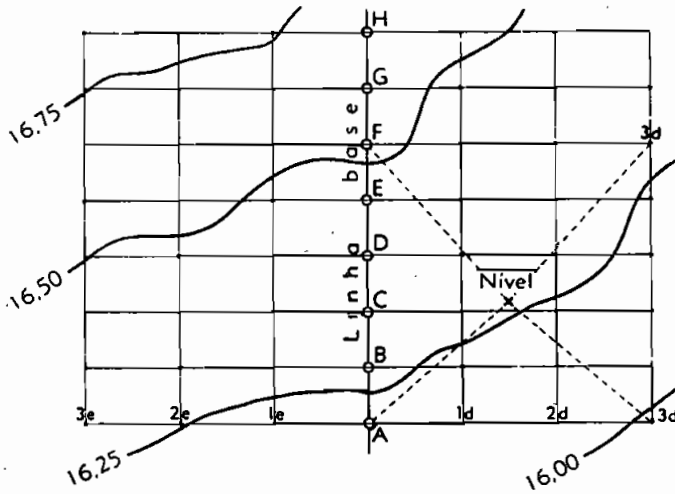


FIG. 273

Para não haver confusão, deve-se anotar na caderneta a estaca da base e a da seção respectiva. Assim, os vértices do retângulo nivelado serão: A (base), $A - 3d$, F (base) e $F - 3d$; esses pontos devem ser nivelados com cuidado, pois servem de referências e de verificação do nivelamento, em cada nova estação do nível.

3) *Nivelamento de seções transversais*. Os nivelamentos de seções transversais são complementares do nivelamento longitudinal. Para o levantamento de uma faixa de terreno para cada lado de uma linha poligonal, levantam-se seções e nível, normal ou inclinada (bissetriz), com relação aos alinhamentos que a constituem (Fig. 274). Com o fim de obter a forma exata do terreno até uma certa extensão dos alinhamentos AB , BC , CD , ..., traçam-se pelas estacas 1, 2, 3, ... alinhamentos perpendiculares e sobre os mesmos os pontos a , b , c ... onde o terreno muda de declive.

Nos vértices B , C , ... traçam-se as transversais segundo as bissetrizes dos ângulos da poligonal.

As seções transversais de menor precisão podem ser obtidas também pelo nível de reflexão, jogo de régua, clinômetro, telêmetro, etc., e com maior rapidez e precisão pelos taqueômetros.

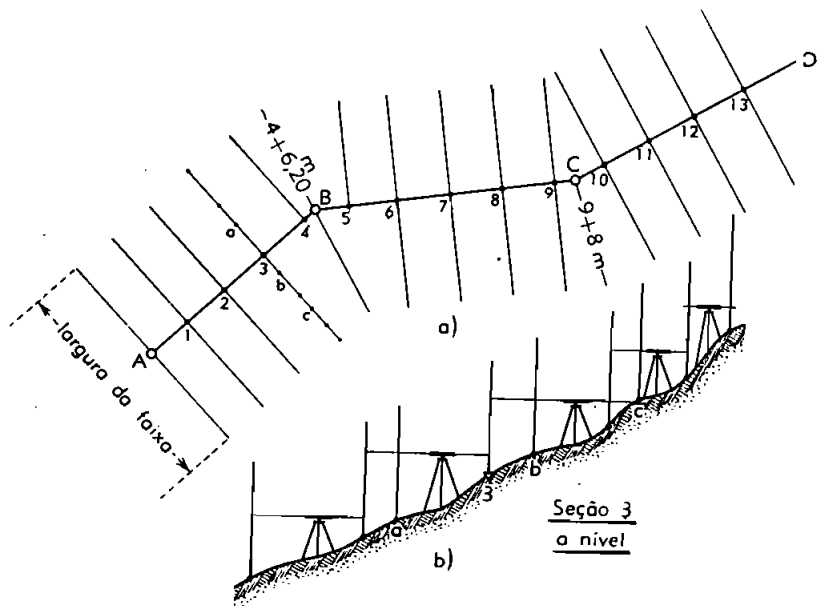


FIG. 274

O erro cometido em qualquer nivelamento transversal ficará localizado, pois essas operações sendo parciais, ficarão subordinadas às cotas das estacas da poligonal.

O instrumento empregado para nivelar as secções pode ser instalado nas estações 1, 2, 3 ... ou fora delas.

A seguir vem um tipo de caderneta para secções transversais a nível de luneta, com o respectivo perfil (Fig. 275).

Tipo de caderneta para secções transversais a nível

ESQUERDA						DIREITA						Observações	
Cotas	AI	VISADAS		Dis-tâncias	P. nive-lados	ESTA-CÕES	P. nive-lados	Dis-tâncias	VISADAS		A I		Cotas
		Vante	Ré						Ré	Vante			
(123,41)	124,74		1,33			80 ○ (123,41)	1	12,8m	1,52	0,42	121,93	(123,41)	As distâncias são acumuladas.
122,28		2,46		13,19	1'		1		2,18		126,69	124,51	
121,18		3,56		26,79	2'		2	26,10	1,12			125,57	
							3	40,25	0,32			126,37	

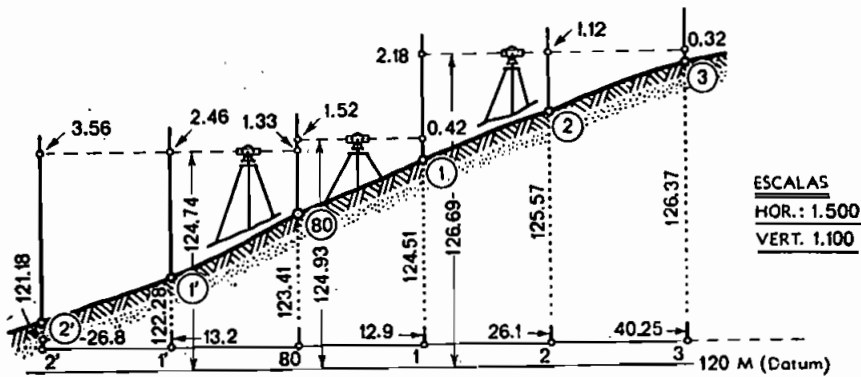


Fig. 275

113 - 1) Perfil longitudinal

O perfil longitudinal é a representação gráfica do nivelamento. Para desenhar um perfil, traça-se uma linha horizontal HH_1 (Fig. 276) e a partir de um ponto H marcam-se os segmentos Ha_1 , Ha_2 , HB_1 , etc., proporcionais às distâncias horizontais entre os pontos H e a_1 , H e a_2 , etc.

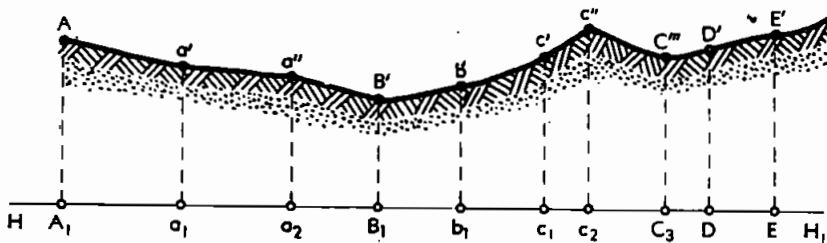


Fig. 276

Nos pontos H , a_1 , a_2 , etc., levantam-se as ordenadas HA , a_1 , a'_1 , ... proporcionais às cotas dos pontos A , a' , a'' , ..., e unem-se os extremos dessas ordenadas por traços retilíneos. Como os comprimentos das ordenadas são geralmente muito pequenos em relação às distâncias horizontais, e pela conveniência que há em pôr em evidência as sinuosidades do terreno, costuma-se adotar para as ordenadas uma escala de redução maior do que a das abcissas. As escalas das ordenadas e das abcissas são chamadas respectivamente de escala vertical e escala horizontal.

A fim de que as ordenadas não tenham um comprimento excessivo, pode-se subtrair de cada uma delas uma dada grandeza, e que equivale a referir os pontos do perfil a um determinado plano de comparação ou de referência diferente daquele que foi adotado no nivelamento.

2) *Greide e seu traçado.* Chama-se greide (de *grade*) a linha que une dois a dois um certo número de pontos dados num perfil (Fig. 277).

Assim a linha *ACFI* é um greide traçado no perfil longitudinal, cujos pontos extremos são *A* e *I*.

O declive do greide ou de um segmento deste sobre o plano de referência, chama-se *gradeante* ou razão de greide. Ora, o declive de uma reta mede-se pela tangente trigonométrica do ângulo que ela faz com o horizonte. Portanto, o gradeante do segmento *AC* (Fig. 277), será:

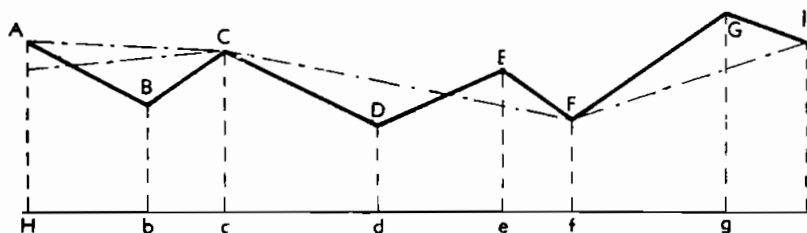


FIG. 277

$$\frac{HA - Cc}{Hc}$$

De um modo geral, representado por *g* o gradeante, por *d* a distância horizontal entre os dois pontos e por *h* a diferença de nível entre os mesmos, teremos:

$$g = \frac{h}{d}$$

Geralmente, o gradeante é expresso em percentagem, isto é, em número de metros por distância horizontal de 100. m, neste caso:

$$g\% = \frac{100 \cdot h}{d} \quad (210)$$

3) *Plano cotado.* Quando se executam nivelamentos geométricos pelo processo de radiação, a mira é colocada em pontos já determinados por um levantamento planimétrico do terreno. A dificuldade consiste não somente em separar esses pontos em grupos pertencentes a cada estação do instrumento, como em escolhê-los de modo tal que eles sirvam para dar uma idéia exata da forma do terreno.

Seja E (Fig. 278) a primeira estação do instrumento. Visa-se o ponto 1 (visada de ré) ao qual se arbitrou a cota de 10,00 m; em seguida, visou-se 2, 3, 4, 5 e 6 (visadas de vante). Transportado o nível para a segunda estação E_1 , daí visou-se novamente o ponto 6 (visada de ré), cuja cota em relação a esse ponto de partida já é conhecida; desta estação E_1 , tomam-se as visadas, 7, 8, 9, etc

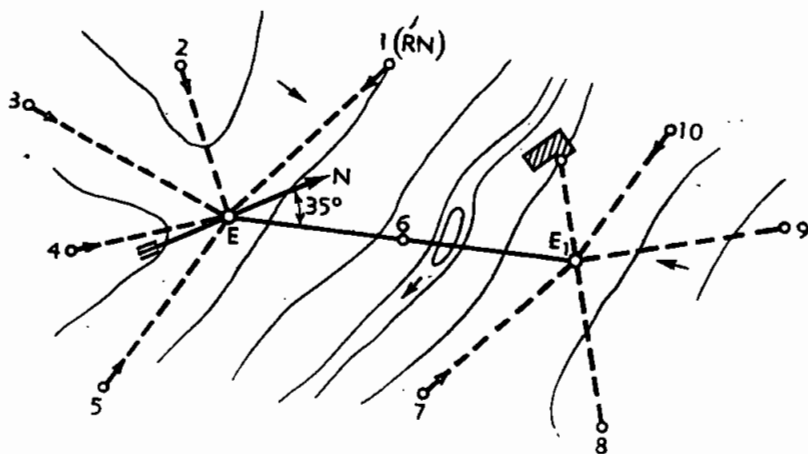


FIG. 278

Pode-se dar à caderneta a seguinte disposição:

Estações	Pontos visados	VISADAS		A.I.	Cotas	Observações
		Ré	Vante			
E	1	1,120		11,120	10,000	RN
	2		2,523		8,597	
	3		0,874		10,246	
	4		3,628		7,492	
	5		1,653		9,467	
	6		2,134		8,986	
E ₁	7	2,371	0,618	11,357	10,739	
	8		1,203		10,154	
	9		0,315		11,042	
	10		2,127		9,230	

Escrevendo no desenho planimétrico, ao lado das projeções dos pontos nivelados, as cotas respectivas, obtém-se um *plano cotado*.

4) *Desenho de um perfil*. O traçado dos perfis longitudinais e transversais, tanto em topografia (nas poligonais de contorno e interio-

res) como em estradas e obras hidráulicas, é de grande importância para o estudo das formas dos terrenos, representadas por meio das curvas de nível.

Chama-se *perfil* de um terreno, segundo determinada direção, a *intersecção* da superfície do solo com o *plano vertical* que passa pelo alinhamento que define aquela direção. Isoladamente considerada, essa intersecção constitui o que chamamos de *alinhamento*, que materializa, no terreno a direção a seguir nas medições e tem, em geral, a forma de uma curva sinuosa no sentido vertical.

Para desenhar o *perfil longitudinal* de uma poligonal levantada a teodolito e nivelada, trecho *JKL*, por exemplo, (Fig. 279), traçaremos em papel milimetrado em primeiro lugar o *estaqueamento*, inteiro e fracionário entre os pontos *J* e *L*, na escala horizontal da planta (1/750).

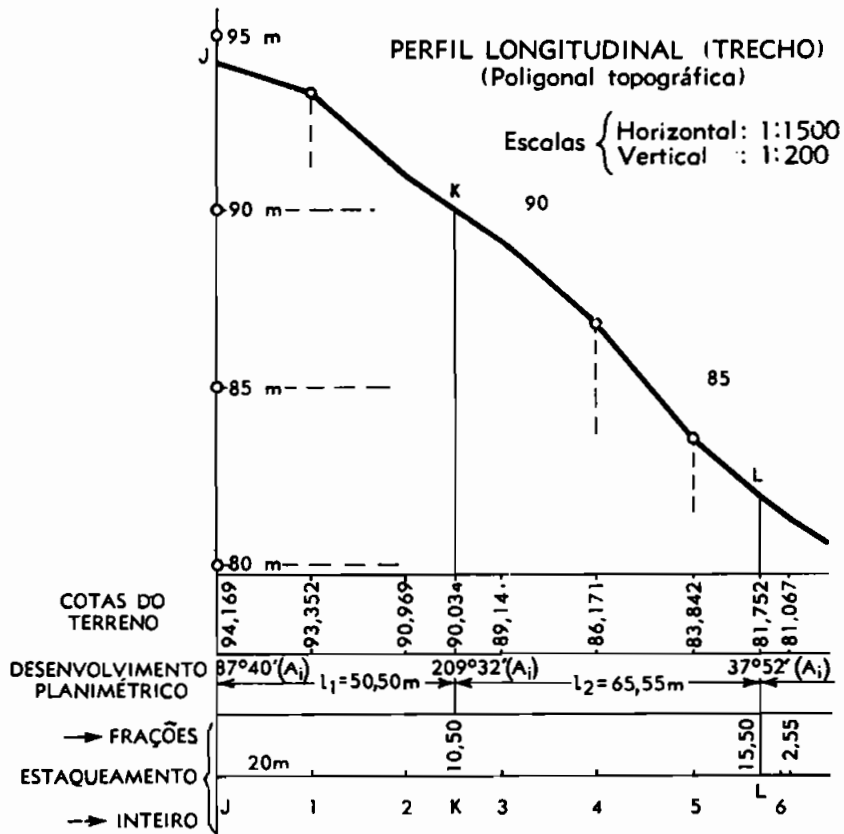


FIG. 279

A seguir, vem o desenvolvimento planimétrico, com a transcrição dos comprimentos e ângulos internos dos alinhamentos; no exemplo dado: $l_1 = JK = 50,50$ m e $l_2 = KL = 65,55$ m e $Ai_J = 87^\circ 40'$; $Ai_K = 209^\circ 32'$ e $Ai_L = 37^\circ 52'$.

As cotas das estações J, K, L, \dots e das estações intermediárias 1, 2, 3, 4, \dots , referidas a um plano arbitrário, são dispostas verticalmente e completam as inscrições, tanto planimétricas, como altimétricas do perfil longitudinal representado.

O desenho de um perfil, pela sua própria natureza, a fim de melhor exprimir o relevo do terreno, é executado em duas *escalas* diferentes, uma *horizontal* para os alinhamentos e outra *vertical* para as ordenadas ou cotas. O desenho resultante será um *perfil elevado*, quando a escala vertical for maior que a horizontal: *dúpla, tripla*, etc., sendo a *décupla* a mais empregada.

Quando, porém, a escala vertical for menor que a horizontal, teremos um *perfil rebaixado*, de pouco uso.

Na prática, os *perfis elevados* ou *rebaixados* devem ser acompanhados dos *perfis naturais*, estes para dar idéia exata do terreno e aqueles para facilitar o traçado das *curvas de nível*, o estudo de *estradas, canais*, etc.

Os perfis podem ser feitos em direções perpendiculares, perfis *transversais*, ou, então, em direções irradiantes de um ponto, para o melhor estudo altimétrico do terreno.

O traçado dos *perfis* constitui um dos processos empregados na execução de *maquetes*, representativas do relevo do terreno e que dão idéia exata do modelado topográfico.

Nas escalas *horizontal* de 1/750, e *vertical* de 1/100 é representado na (Fig. 279) um pequeno trecho do perfil longitudinal de uma poligonal topográfica, com as convenções usuais, e que encerra as considerações feitas acima.

C) NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO

§ 25 — Instrumental (continuação)

114 — Clinômetro Zeiss (Lodis)

O *clinômetro com luneta estadimétrica basculante "Lodis"* é indicado para medidas angulares em linhas cuja declividade máxima não seja superior a $\pm 30^\circ$ e também nas medidas indiretas de distâncias.

Compõe-se (Fig. 280) de uma *luneta* com cunhas *estadimétricas* para a avaliação indireta das distâncias; o desvio dos raios luminosos incidentes, inclinados de 1:20 com relação ao eixo óptico, dá com suficiente aproximação as distâncias até 150 metros.

Um prisma duplo de esquadro, bastão-prumo com tripé, duas miras de 4 m, um arco vertical com divisão em graus e vernier para a *medida trigonométrica* das alturas completam o aparelho e equipamento respectivo.

Nomenclatura

- | | |
|---|--|
| 17 – Tubo guarda-sol | 27 – Anel de pressão do nível, na ocular |
| 18 – Anel de pressão do nível na objetiva | 28 – Parafuso de pressão do movimento basculante da luneta |
| 19 – Nível com espelho de leitura | 29 – Parafuso micrométrico do movimento lateral |
| 20 – Divisão das correções | 30 – Mola do parafuso de báscula |
| 21 – Arco vertical com divisão em graus e redução | 31 – Porca de ligação do instrumento e tripé |
| 22 – Parafuso micrométrico | 32 – Prumo bastão |
| 23 – Lupa de leitura do vernier | 33 – Junta cardan com charneira. |
| 24 – Prisma duplo pentagonal | |
| 25 – Alça do visor | |
| 26 – Ocular com divisão em dióptrias | |

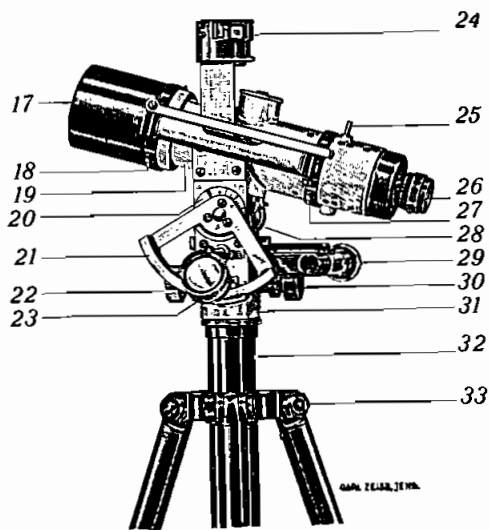


FIG. 280

Com o auxílio do nível, da luneta, e do *parafuso de báscula* pode-se orientar a linha de visada horizontalmente para nivelar (traço horizontal na *metade* esquerda não desviada do campo visual).

Pode-se, pois, ler simultaneamente sobre a mira Lodis a diferença de nível, e a distância horizontal.

Para determinar a distância horizontal, no caso da luneta inclinada, recorre-se à *escala de redução* sobre o arco vertical.

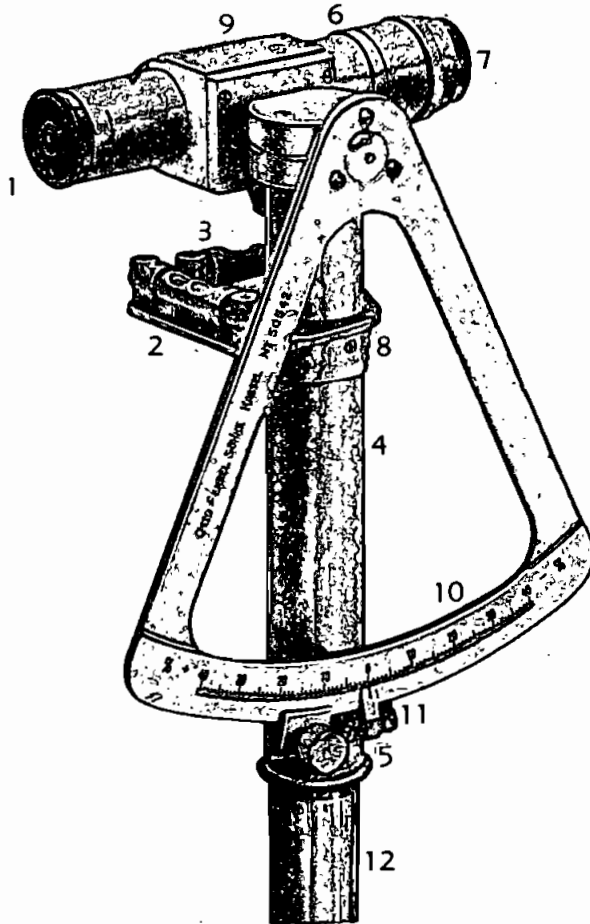


FIG. 281

Nomenclatura

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 1 – Ocular; | 8 – Anel deslizante; |
| 2 e 3 – Níveis; | 9 – Eixo da luneta; |
| 4 – Haste do suporte; | 10 – Arco de escala ou de altura; |
| 5 – Botão de fixação; | 11 – Indicador; |
| 6 – Luneta; | 12 – Haste do clinômetro. |
| 7 – Objetiva; | |

Um *prisma duplo* pentagonal destina-se ao traçado das normais a 90° e 180° .

A precisão na medida dos ângulos é de $40''$ e na das distâncias de 1 cm em 50 metros.

Órgãos acessórios ainda tornam o aparelho mais completo e vantajoso para nivelamentos trigonométricos.

115 — Clinômetro Fennel

O clinômetro ou disímetro de Fennel (Fig. 281), adaptado à medida de declives em terreno pouco ondulado e de campo, permite ler, em escala ampliada, declividades até $\pm 40\%$ ($\sim 22^\circ$), com a aproximação de $1/10\%$ ($\sim 4'$). A escala está dividida de $1/2$ em $1/2\%$ ($\sim 17'$).

A luneta é construída de modo a se ver no campo visual a mira, o retículo e o nível paralelo à escala, em *qualquer inclinação*. O clinômetro é composto de um suporte sobre o qual se monta o instrumento, verticalizado por 2 níveis, dispostos a 90° .

A focagem é feita com a rotação de um anel encartilhado.

A ocular é também deslizável para obter imagens bem nítidas. A luneta tem uma abertura de 2,2 cm, distância focal de 10,8 cm e um aumento de 5 vezes.

Para o levantamento de secções transversais são necessárias 3 hastes, que acompanham o clinômetro.

116 — Alidade com prancheta, Fennel

A *alidade* é constituída por uma régua de metal dupla e uma luneta taqueométrica montada num suporte conveniente. A régua principal tem o nome de alidade, e a régua secundária pode variar de posição. A luneta possui um diagrama de Hammer-Fennel, cuja construção vem detalhada na 3.^a Parte deste curso (*Taqueometria*), e que permite a leitura imediata da distância horizontal e da diferença de nível.

Além disso a alidade possui um círculo de alturas (eclímetro), sobre o qual podem-se ler os ângulos verticais de inclinação.

Há um nível especial, chamado de *ponteiros*, montado junto ao círculo vertical, que serve ao mesmo tempo para o ajustamento do diagrama. Uma bússola montada na régua principal destina-se à orientação magnética. A prancheta de medição é feita de madeira macia e colada cruzada para não se deformar.

O tripé da prancheta com os parafusos calantes permite a rotação da alidade em torno do eixo principal. Parafusos micrométricos permitem deslocamentos diferenciais de ajustagem.

Os órgãos principais que compõem a alidade com prancheta e tripé (Fig. 282) são os seguintes:

- | | |
|--|--|
| 1 – Parafuso calante | 12 – Parafuso de ajuste do nível dos ponteiros |
| 2 – Tripé | 13 – Botão de focagem |
| 3 – Parafuso micrométrico | 14 – Objetiva |
| 4 – Parafuso de pressão do (3) | 15 – Espelho de iluminação |
| 5 – Prancheta de medição | 16 – Nível de reversão |
| 6 – Régua (Alidade) | 17 – Parafuso micrométrico de ajuste |
| 7 – Nível esférico | 18 – Bússola |
| 8 – Parafuso de ajustagem do nível transversal | 19 – Régua secundária ou de paralelas |
| 9 – Parafuso micrométrico da luneta | 20 – Forquilha-suporte do fio de prumo |
| 10 – Ocular da luneta | 21 – Botão de fixagem |
| 11 – Ocular do microscópio | |

Completam o equipamento da alidade, mais os seguintes acessórios:

- Tripé com pernas rígidas, com parafuso de fixação ao tripé da alidade;
- Miras de nivelamento, com 4 m de altura;
- Prismas oculares para luneta e microscópio;
- Guarda-sol de campo, com 2 m de diâmetro e 3 cordas de suporte;
- Caixas para instrumentos e acessórios.

Características ópticas e mecânicas. Luneta analítica, com lente de focagem interna.

- | | |
|--|------------|
| – Constante estadimétrica (Reichenbach) | 100 |
| – Constante instrumental | zero |
| – Constantes do diagrama: | |
| para ângulos verticais (0 a 15°) | $C_1 = 10$ |
| para ângulos verticais (15 a 33°) | $C_2 = 20$ |
| para distâncias | 100 |
| – Comprimento da luneta | 225 mm |
| – Aumento | 20 × |
| – Abertura da objetiva | 30 mm |
| – Ângulo do campo visual | 3° |
| – Nível transversal | 100"/2 min |
| – Nível reversão e dos ponteiros | 40"/2 mm |
| – Comprimento da agulha da bússola | 80 mm |
| – Comprimento da régua de paralelas | 515 mm |
| – Leitura do círculo vertical ($d = 5'$) | 30" |
| – Peso da alidade, prancheta e tripé | 12 kg |

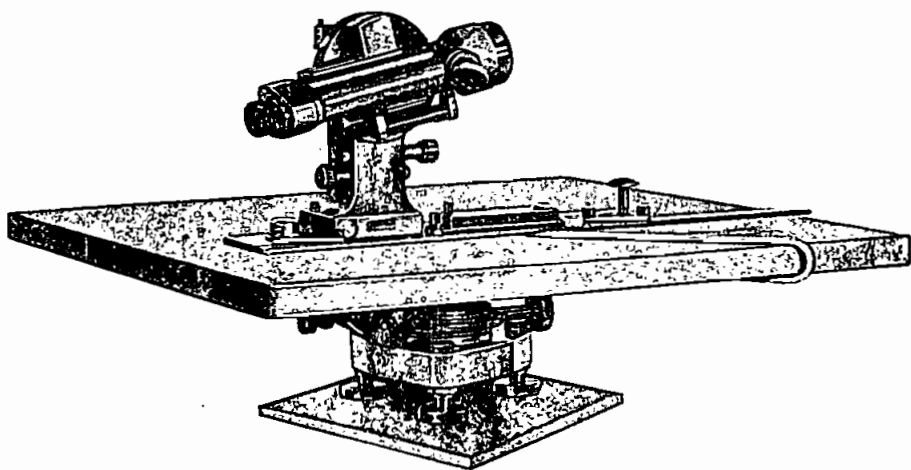


FIG. 282

O instrumento é mais adequado para taqueometria de prancheta, permitindo diretamente o desenho do terreno, no plano e em altura; pode-se, também, fazer nivelamento trigonométrico de pontos, cuja distância é avaliada indiretamente.

Detalhes sobre colocação e ajustamento da prancheta, uso da alidade, prática dos diagramas, escolha dos pontos no terreno, mudança de ponto de estacionamento e correções, vêm explicitamente desenvolvido nas instruções que acompanham o aparelho ("Alidade", n.º 0370).

117 – Nível-taqueômetro Zeiss

O excelente nível-taqueômetro Zeiss, usado em nivelamento geométrico, trigonométrico e taqueométrico, com parafuso de percentagens, cuja escala abrange $\pm 15\%$ ($\sim 8^{\circ}30'$), é apropriado também para levantamentos rápidos de grande extensão em terreno levemente ondulado e nos traçados rodovias e ferroviários. Uma volta do parafuso de percentagens corresponde a uma inclinação da tangente de 1% . Por conseguinte, no tambor, dividido em cem partes, cada divisão representa $1/100\% = 1/10\,000$ da distância. Os giros do parafuso, quer dizer, as unidades, são lidas na escala G (Fig. 283). O tambor tem numerações distintas para elevações e depressões.

O limbo horizontal, coberto, tem 10,5 cm de diâmetro. Sua rotação é feita a mão, e as leituras pelos microscópios M_1 e M_2 . A aproximação é de $2'$ e, por estima, os décimos ($12''$).

A luneta, de focagem interna, pode girar ao redor do eixo longitudinal e inclinar com o auxílio de um eixo de munhões. A objetiva tem a abertura livre de 35 mm e uma amplificação de 30 diâmetros. O retículo da luneta tem fios stadimétricos dispostos de maneira que as distâncias se deduzem exatamente da leitura h da mira, pela fórmula $D = 100 \cdot h$. A luneta é dotada de um nível reversível, que pode ser observado mediante um sistema de prismas, pela coincidência dos extremos da bôlha.

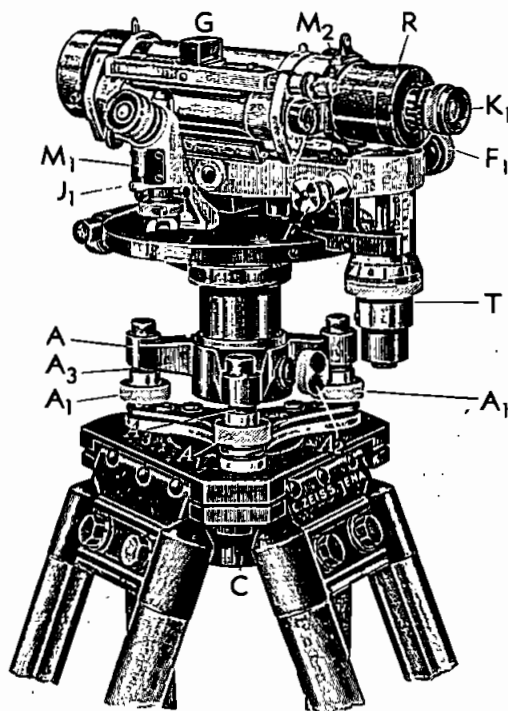


FIG. 283

Para fazer um nivelamento, horizontaliza-se o nível com o parafuso H . Um parafuso de suspensão F protege o dispositivo de percentagens durante o transporte de uma estação a outra.

§ 26 — Técnica do nivelamento trigonométrico. Problemas

118 — Fórmulas gerais

O nivelamento trigonométrico ou indireto divide-se em nivelamento trigonométrico de pequeno alcance e nivelamento trigonométrico de

grande alcance. Ocupar-nos-emos aqui somente do primeiro caso. Este método baseia-se na resolução de um triângulo retângulo ABC (Fig. 284) conhecendo a base $AB = D$ e o ângulo de inclinação α ou a distância zenital z . O método trigonométrico é menos exato do que o geométrico, porque um pequeno erro na medida do ângulo dá lugar a um erro sensível na diferença de nível. Será preferível usar sempre

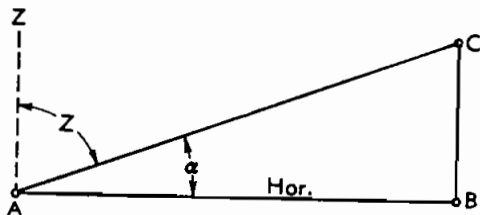


FIG. 284

da distância zenital em lugar do ângulo de inclinação, porque este deverá ser afetado dos sinais mais ou menos segundo a linha de visada achar-se acima ou abaixo da linha do horizonte, o que pode dar lugar a erros, ao passo que o ângulo zenital será sempre positivo.

Todo o instrumento munido de um limbo vertical permite executar um nivelamento trigonométrico. O zero do limbo está colocado diferentemente segundo o aparelho mede o ângulo de inclinação ou a distância zenital.

Pode-se operar de dois modos:

1.º – Visando um ponto da mira colocada à mesma altura acima do solo que o centro do aparelho (Fig. 285). Neste caso a diferença de nível entre A e B será:

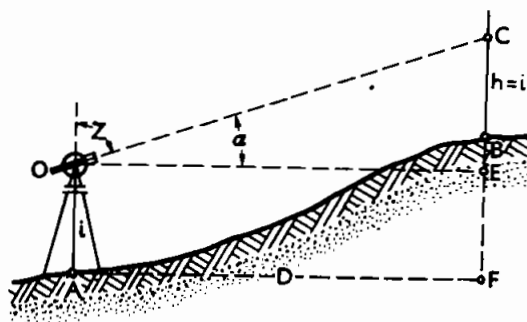


FIG. 285

$$(H_B - H_A) = EF + CE - BC = i + D \cdot \cotg z - h = D \cot z = D \operatorname{tg} \alpha \quad (211)$$

2.º – Visando um ponto qualquer da mira. Vamos supor em primeiro lugar o ângulo z menor que 90° (Fig. 286). A diferença do nível entre os pontos A e B será:

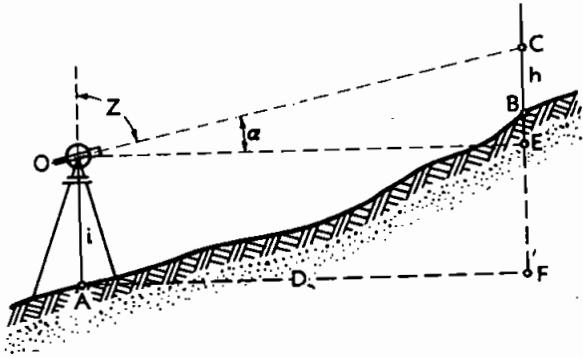


FIG. 286

$$(H_B - H_A) = EF + EC - BC = i + D \cot z - h \quad (212)$$

3.º – Quando o ângulo zenital Z for maior que 90° a diferença de nível será dada pela equação (Fig. 287).

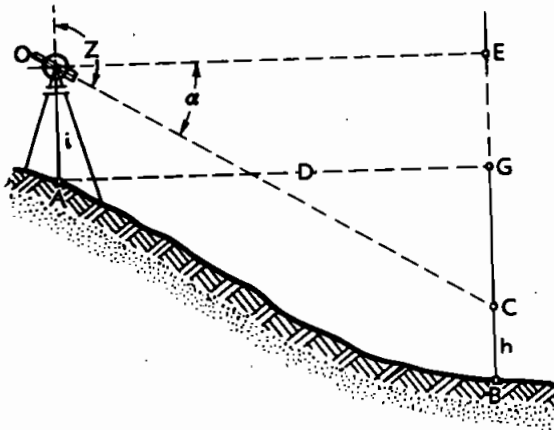


FIG. 287

$$\begin{aligned} -(H_B - H_A) &= -(BG + GD - DC) = -(h + D \cotg z - i) \\ -(H_B - H_A) &= i - h - D \cotg z \end{aligned} \quad (213)$$

Das fórmulas (212) e (213) deduz-se a fórmula geral, que resolve todos os casos intermediários em que o ângulo Z for maior ou menor do que 90° :

$$\pm (H_B - H_A) = (i - h \pm D \operatorname{ctg} z) \quad (214)$$

Quando a extensão das visadas exceder a 150 m, deve-se fazer as correções relativas à curvatura e à refração.

Já vimos que estas duas correções se condensam na expressão:

$$\varepsilon = 0,4347 \frac{D^2}{R} = 0,000\,000\,068 \cdot D^2$$

Portanto, a fórmula geral:

$$\begin{aligned} \pm (H_B - H_A) &= (i - h \pm D \operatorname{ctg} z) - 0,000\,000\,068 D^2 \\ \text{ou} \quad \pm (H_B - H_A) &= (i - h \pm D \operatorname{tg} \alpha) + 0,000\,000\,068 D^2 \end{aligned} \quad (215)$$

Os trânsitos, os teodolitos, os taqueômetros, as alidades com pranchetas, os níveis-taqueométricos, são empregados nos nivelamentos trigonométricos e com mais facilidade, pois também permitem a avaliação taqueométrica indireta do comprimento das bases.

Tipo de caderneta para nivelamento trigonométrico (Fig. 288)

Ponto niv.	Distâncias	ÂNGULOS LIDOS (α)		Leitura mira	Altura instr.	Diferença de nível	Cotas
		Elevação (+)	Depressão (-)				
A	47,30m	—	—	—	1.43m		O(RN)
B	73,10	8°30'		solo	1.27	+ 8,50m	8.50m
C	23,80	10°26'		1,87	1.18	+12.86	21.36
D	52,90	—	5°18'	solo	1.15	- 1.03	20.33
E		7°21'		2,02	—	+ 5.98	26.31

As colunas dos ângulos lidos ficam reduzidas a uma única quando, em vez de ângulos de elevação e depressão, são lidos os ângulos zenitais.

a) *Medida de distância zenital (correção do Z_i)*. Se chamarmos L_o a leitura do círculo vertical correspondente ao zênite verdadeiro, as distâncias zenitais serão estimadas a partir desse ponto.

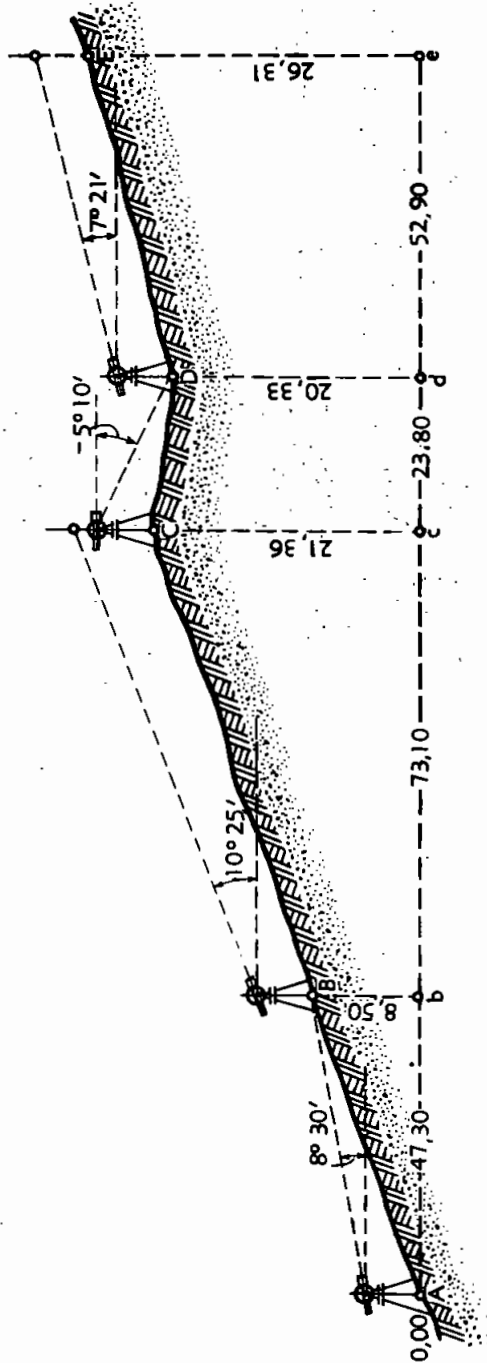


FIG. 288

Se chamarmos L_c e L_d as leituras feitas no mesmo microscópio, com o círculo à esquerda e à direita, teremos:

$$\begin{aligned} Z_c &= L_c - L_o \\ Z_d &= L_o - L_d \end{aligned} \quad (216)$$

quando a graduação tem o sentido dos ponteiros de um relógio.

Quando for em sentido inverso, teremos:

$$\begin{aligned} Z_e &= L_o - L_e \\ Z_f &= L_d - L_o \end{aligned} \quad (217)$$

O grupo (216) nos dá:

$$Z = \frac{1}{2}(L_c - L_d) \quad \text{e} \quad L_o = \frac{1}{2}(L_d + L_c)$$

O grupo (217) nos dá:

$$Z = \frac{1}{2}(L_d - L_e) \quad \text{e} \quad L_o = \frac{1}{2}(L_d - L_e)$$

(218)

O valor de L_o fica assim determinado pela observação do mesmo ponto fixo nas duas posições do círculo.

Os valores de L_c e L_d que entram nestas fórmulas devem ser já corrigidos dos erros provenientes de nivelamento incorreto.

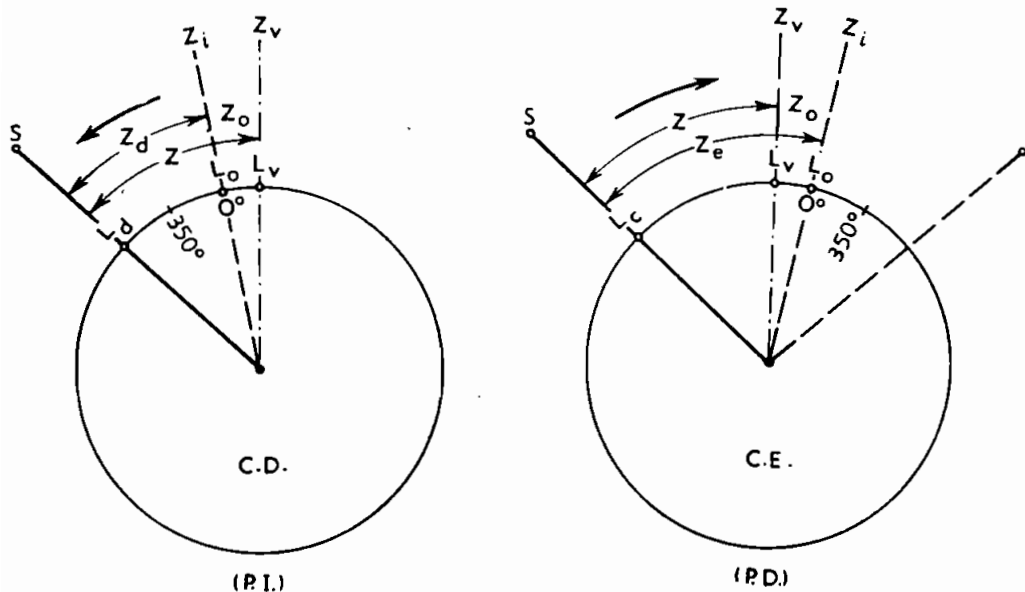


FIG. 289

Poderíamos determinar também a correção a fazer nas distâncias zenitais lidas, da seguinte maneira. Um ponto fixo é observado nas duas posições do instrumento (Fig. 289).

$$Z_d = Z - Z_o \qquad Z_e = Z + Z_o$$

Temos:

$$\begin{cases} Z' = Z - Z_o \\ Z'_1 = Z + Z_o \end{cases}$$

que nos darão:

$$Z_o = \frac{Z'_1 - Z'}{2} \quad \text{e} \quad Z = \frac{Z'_1 + Z'}{2}$$

A origem da contagem no limbo será $360 - Z_o$.

Z_o , tendo o valor e o sinal dados pela fórmula acima, ou por

$$Z_o = \frac{Z_e - Z_d}{2} \qquad (220)$$

Z_e e Z_d sendo as distâncias zenitais calculadas com o círculo à esquerda e à direita.

As distâncias zenitais corrigidas, observando-se a regra

$$Z_e - Z_d > 0, \qquad Z_o > 0$$

Para leituras com círculo à direita

$$Z_e - Z_d < 0, \qquad Z_o < 0$$

para leituras com círculo à esquerda.

As correções terão sinal contrário para leituras feitas com o círculo à esquerda.

119 - Nivelamento a clinômetro ou clisímetro

O nivelamento trigonométrico ou pelos declives pode ser de pequeno ou de grande alcance. Para os primeiros, podem-se empregar os clinômetros, os clisímetros e os teodolitos, já descritos na parte de instrumentos, e para os últimos os teodolitos de precisão ou os taqueômetros.

O método baseia-se na resolução de um triângulo retângulo do qual se conhece um dos catetos (distância D), e procura-se (Fig. 290) o outro cateto (diferença de nível N), medindo para tal o ângulo α (a clinômetro) ou declividade em percentagem (a clisímetro). Tal diferença de nível é igual a: $n = \pm D \cdot \text{tg } \alpha = \pm D \cdot \text{ctg } z$.

Para a leitura do ângulo α ou da sua tangente, deve-se visar na régua uma altura igual a do clinômetro ou clisímetro empregado.

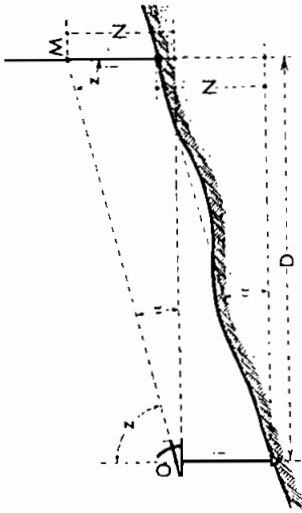


FIG. 290

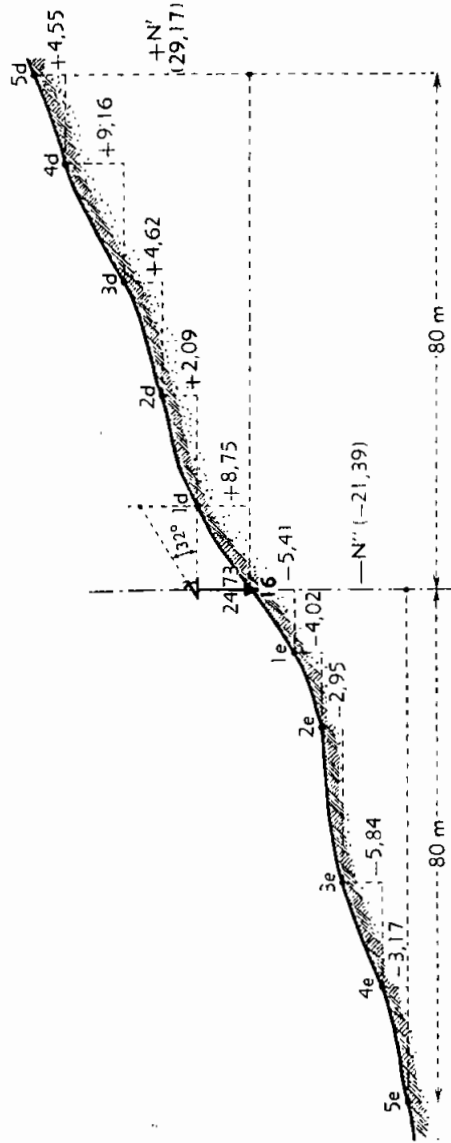


FIG. 291

Exemplo. Cálculo das cotas de uma secção levantada a clinómetro.

O registro dos dados de campo e cálculos respectivos podem ser feitos como indicado na página de caderneta:

ESQUERDA ←			Estacas	→ DIREITA		
(3e)	(2e)	(1e)		(1d)	(2d)	(3d)
$\begin{array}{r} 12,35 \\ - 6^{\circ}45' \\ \hline 25m \\ 46 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15,30 \\ - 18^{\circ}30' \\ \hline 12m \\ 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19,32m \\ - 31^{\circ} \\ \hline 9m \end{array}$	16⊙ 24m73	$\begin{array}{r} 33,48 \\ + 32^{\circ} \\ \hline 14m \end{array}$	$\begin{array}{r} 35,57 \\ + 11^{\circ}15' \\ \hline 16m \\ 30m \end{array}$	$\begin{array}{r} 40,19 \\ + 19^{\circ}30' \\ \hline 17m \\ 47 \end{array}$
(6e)	(5e)	(4e)		↓ 17⊙	(4d)	(5d)
	$\begin{array}{r} 3,34 \\ - 9^{\circ}30' \\ \hline 19m \\ 80 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6,51 \\ - 21^{\circ}15' \\ \hline 15m \\ 61 \end{array}$		$\begin{array}{r} 49,35 \\ + 25^{\circ}45' \\ \hline 19m \\ 66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 53,90 \\ + 18^{\circ} \\ \hline 14m \\ 80 \end{array}$	

Todos os pontos nivelados, onde há mudança de declive do terreno (Fig. 291) à direita (1d, 2d, 3d, ...) e à esquerda (1e, 2e, 3e, ...) são representados por uma fração cujo numerador é o declive lido no clinómetro, e denominador a distância horizontal parcial. Abaixo do denominador anota m-se as distâncias contadas da estaca da poligonal, e acima do numerador a cota calculada de cada ponto.

Na tabela XII da "Caderneta de Campo", da autoria deste autor e do Prof. João Lüderitz, são dadas as distâncias horizontais correspondentes às distâncias tomadas segundo a inclinação do terreno, de metro em metro, de 1 a 50 m desde zero até trinta graus.

A tabela XIII da mesma obra dá a declividade das rampas em centésimos e respectivos ângulos de inclinação, para o trabalho com os clisímetros.

Ainda citamos a tabela XIII-A das diferenças de nível para a distância horizontal de 1 metro, com inclinações variáveis de 15 em 15 minutos, desde 0°15' até 45°.

Com o auxílio da mesma tabela e uma régua de cálculo são facilmente calculadas as diferenças de nível de cada ponto da secção da (Fig. 291). Assim, para o 1.º e 2.º ponto à direita:

$$n_1 = d_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 14 \times 0,625 = 8,75 \text{ m}$$

$$n_2 = d_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 16 \times 0,199 = 2,09 \text{ m}$$

e as cotas respectivas:

$$1d \dots\dots\dots 24,73 + 8,75 = 33,48 \text{ m}$$

$$2d \dots\dots\dots 33,48 + 2,09 = 35,57 \text{ m}$$

$$\dots\dots\dots$$

A Casa Rosenhain, de São Paulo, fabrica clinômetros portáteis, que facilitam o levantamento de secções transversais, para pontos equidistantes de 20 m, medidos segundo o terreno, e reduzidos com o auxílio de uma *tabela impressa no próprio clinômetro*.

Distâncias horizontais e diferenças de nível, para trabalho com clinômetro (20 m)

Inclinação do terreno (α)	Distância horizontal (20. cos α) (d)	Diferença de nível (20. sen α) (n)	Inclinação do terreno (α)	Distância horizontal (20. cos α) (d)	Diferença de nível (20. sen α) (n)
0°	20,00	0,00	15°	19,32	5,18
1	20,00	0,35	16	19,23	5,51
2	19,97	0,70	17	19,13	5,85
3	19,97	1,05	18	19,02	6,18
4	19,95	1,40	19	18,91	6,51
5	19,92	1,74	20	18,79	6,84
6	19,89	2,09	21	18,67	7,17
7	19,85	2,44	22	18,54	7,49
8	19,81	2,78	23	18,41	7,81
9	19,75	3,13	24	18,27	8,13
10	19,70	3,47	25	18,13	8,45
11	19,63	3,82	26	17,98	8,77
12	19,56	4,16	27	17,82	9,08
13	19,49	4,50	28	17,66	9,39
14	19,41	4,84	29	17,49	9,70
			30	17,32	10,00
0,1	0,04	0,4	0,7	0,24	
0,2	0,07	0,5	0,8	0,28	
0,3	0,10	0,6	0,9	0,31	

120 – Nivelamento trigonométrico a teodolito. Problemas

a) Determinar a altura de um ponto B no alto de um morro, acima de um ponto A, situado na planície (Fig. 292).

1.ª solução. Medem-se os ângulos α e β , e a distância $AC = A_1C_1 = m$; fazendo $CD = n$ e $BD = h$, o triângulo A_1BD , dá:

$$m + n = h \cdot \cotg \alpha \quad e \quad n = h \cdot \cotg \beta$$

Subtraindo membro a membro, teremos:

$$m = h (\cotg \alpha - \cotg \beta)$$

donde

$$h = \frac{m}{\cotg \alpha - \cotg \beta}$$

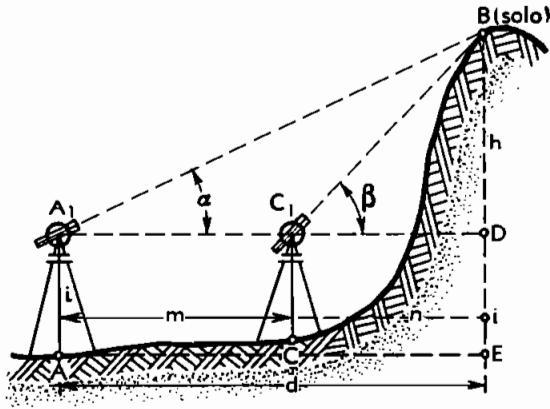


FIG. 292

Sendo i a altura do instrumento acima de A , a diferença do nível entre A e B será:

$$H_B - H_A = \frac{m}{\cotg \alpha - \cotg \beta} + i \quad (221)$$

A distância horizontal entre os pontos A e B será:

$$d = h \cotg \alpha = \frac{m \cotg \alpha}{\cotg \alpha + \cotg \beta} \quad (222)$$

A aplicação deste processo torna-se quase impossível na prática porque, para as leituras dos ângulos α e β , seria necessário que o centro do instrumento nos pontos A e C tivesse a mesma altura. Quando não for possível realizar esta condição, procede-se do modo seguinte.

2.ª solução. Instala-se o instrumento nos pontos A e C (Fig. 293), medem-se os ângulos α e β , e a distância horizontal m entre os pontos A e C do instrumento. A distância vertical y entre as visadas A_1D e C_1B_1 , sendo conhecida por visada horizontal de A numa mira colocada em C , deduz-se a distância horizontal x entre o ponto C' e a intersecção C da visada C_1B e a horizontal A_1D do triângulo $C_1C'C$:

$$x = y \cdot \cotg \beta$$

A distância $A_1C = m + x = m + y \cotg \beta$

$$y = h - i_c$$

e

$$H_B - H_A = i_a + BD$$

também

$$\begin{aligned} m + n &= BD \cdot \operatorname{ctg} \alpha \\ n - x &= BD \cdot \operatorname{ctg} \beta \end{aligned}$$

e

$$BD = \frac{m + x}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

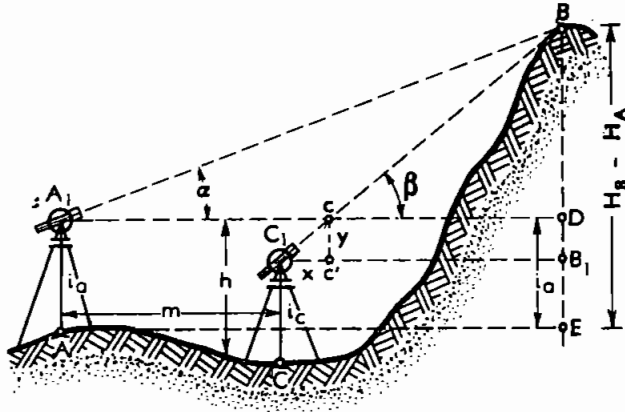


FIG. 293

Portanto:

$$H_B - H_A = \frac{m + y \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} + i_a \quad (223)$$

O sinal do y será positivo quando C' estiver abaixo de A ; será negativo quando estiver acima.

3.^a solução. Instala-se o instrumento no ponto A (Fig. 294) e num outro ponto C , medindo-se:

i_a : altura instrumental acima de A .

i_c : altura instrumental acima de C .

h : diferença de nível entre A e C .

d : distância horizontal entre A e C .

α e β : os ângulos de inclinação das linhas de visada OB e O_1B .

A figura dá:

$$\begin{aligned} y - i_a &= D \operatorname{tg} \alpha = (d + x) \operatorname{tg} \alpha \\ y - i_c - h &= (D - d) \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

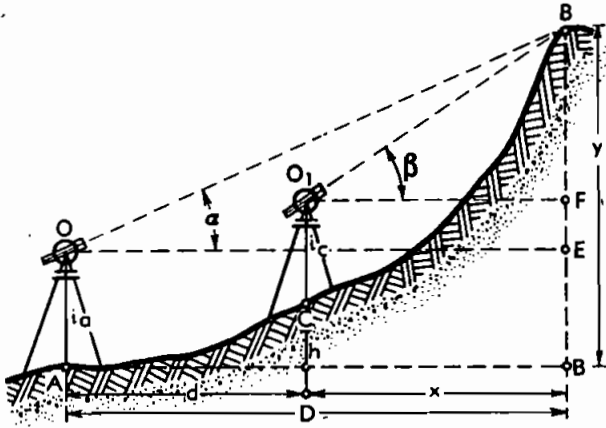


FIG. 294

sendo:

$$x = \frac{y - i_c - h}{\operatorname{tg} \beta} \text{ e } y = i_a + (d + x) \operatorname{tg} \alpha = i_a + d \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{(y - i_c - h) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \quad (224)$$

Fazendo $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = m$, virá:

$$y = i_a + d \operatorname{tg} \alpha + m y - (i_c + h) m$$

donde:

$$y = H_B - H_A = \frac{i_a + d \operatorname{tg} \alpha - (i_c + h) m}{1 - m} \quad (225)$$

A distância horizontal entre os pontos A e B, será:

$$D = (y - i_a) \operatorname{cotg} \alpha = \frac{i_a + d \operatorname{tg} \alpha - (i_c + h) m}{1 - m} \operatorname{cotg} \alpha$$

$$D = \frac{d \operatorname{tg} \alpha - (i_c + h - i_a) m}{1 - m} \operatorname{cotg} \alpha \quad (226)$$

Também $y = D \operatorname{tg} \alpha + i_a$.

4.^a solução. Quando o ponto C estiver abaixo de A (Fig. 295):

$$y - i_a = D \operatorname{tg} \alpha = (d + x) \operatorname{tg} \alpha$$

$$y + h - i_c = (D - d) \cdot \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \beta$$

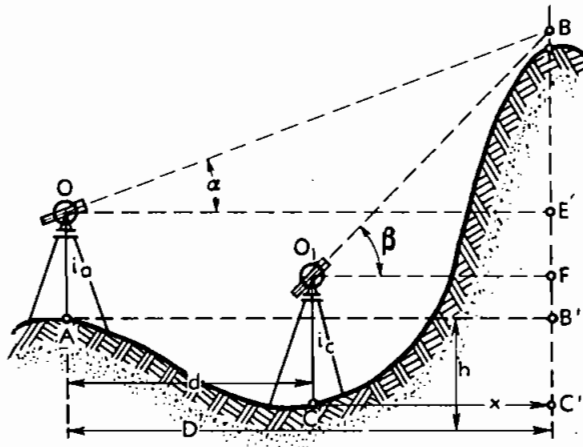


FIG. 295

Fazendo $\text{tg } \alpha / \text{tg } \beta = m$, é fácil deduzir:

$$y = H_B - H_A = \frac{i_a + d \text{tg } \alpha - (i_c - h) m}{1 - m} \quad (227)$$

$$D = \frac{d \text{tg } \alpha - (i_c - h - i_a) m}{1 - n} \text{cotg } \alpha \quad (228)$$

b) Determinar a altura de um ponto elevado, por triangulação. Seja P (Fig. 296) o ponto cuja cota queremos determinar, com o auxílio de uma base AB , de comprimento medido l . Com o teodolito medimos os ângulos horizontais α e β e os ângulos verticais de inclinação, v_1 e v_2 .

Os comprimentos D_1 e D_2 são obtidos das relações de proporcionalidade:

$$D_1 = \frac{l \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)} \quad (229)$$

e

$$D_2 = \frac{l \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$$

e as diferenças de nível:

$$\begin{aligned} \text{de } A & \dots \dots \dots n_1 = i_a + D_1 \cdot \text{tg } v_1 \\ \text{de } B & \dots \dots \dots n_2 = i_b + D_2 \cdot \text{tg } v_2 \end{aligned} \quad (230)$$

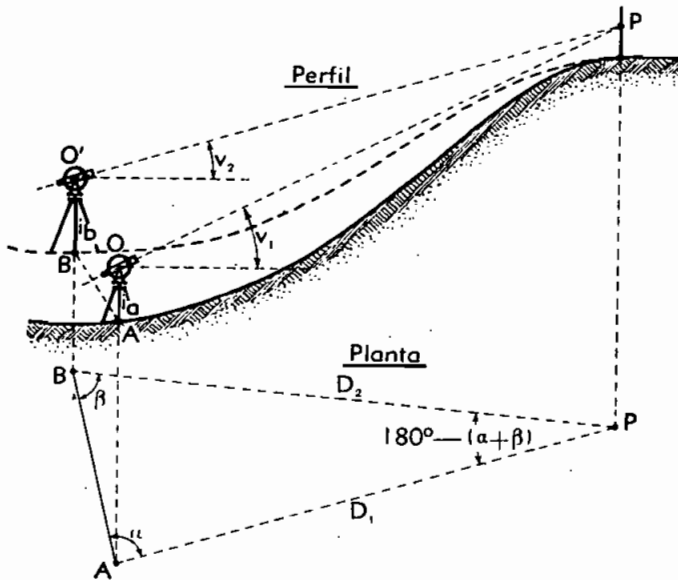


FIG. 296

Determinando-se a diferença de nível entre os pontos A e B da base, pode-se verificar o nivelamento trigonométrico feito do ponto P .

Quando os pontos distam mais de 200 m, deve-se somar a diferença de nível obtida, a correção de curvatura e refração já dada, isto é

$$C_{cr(m)} = 0,068 \cdot D^2 \text{ (km)}$$

121 - Problema prático. Determinação da altura de uma chaminé

Procura-se determinar as alturas H e H_1 , bem como o diâmetro D da parte superior da chaminé representada na (Fig. 297), com um bom teodolito, convenientemente retificado.

Instalado e nivelado o aparelho em A , visa-se o ponto P da chaminé, medindo-se os ângulos zenitais z_o e z_d . A leitura de z_o é feita na posição direta do teodolito (PD) com círculo vertical à esquerda (CE) e a leitura de z_d é feita na posição inversa (PI), isto é, dando uma rotação à luneta e girando a alidade de 180° em azimute, ficando o círculo vertical a direita (CD).

Lêem-se os ângulos:

$$z_o = 47^\circ 46' 3 \text{ e } z_d = 312^\circ 15' 9$$

e a correção do zênite instrumental é

$$2z_o = z_o + z_d - 360^\circ = 2' 2$$

donde

$$z_o = 2' 2 / 2 = 1' 1 = 1' 6''$$

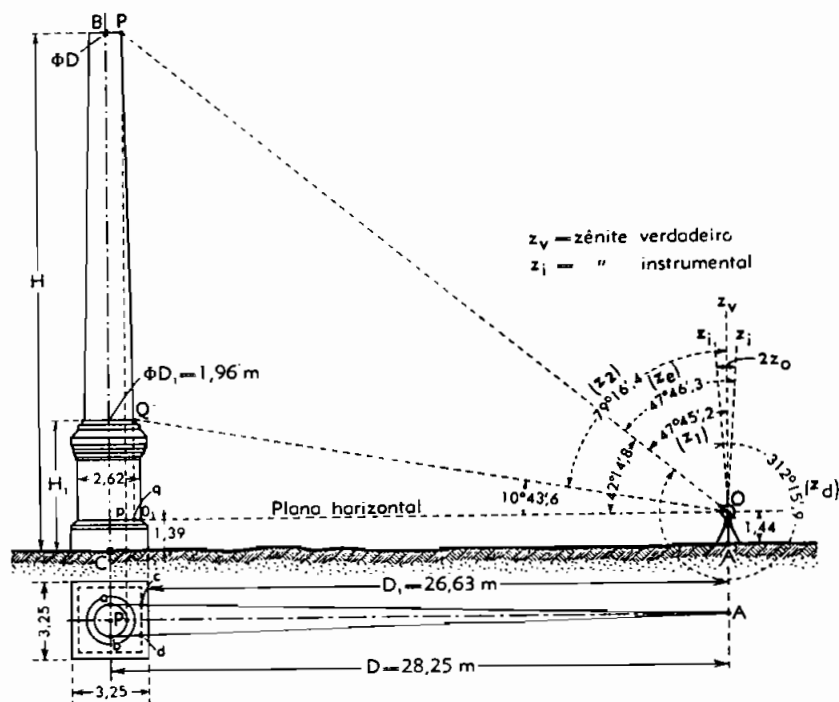


FIG. 297

Como z_0 é positivo, cada distância zenital lida deve ser diminuída de $1'$, e então

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_{(P)} = 47^{\circ}46',3 - 1',1 = 47^{\circ}45',2 \\ z_2 &= z_{(Q)} = 79^{\circ}17',5 - 1',1 = 79^{\circ}16',4 \end{aligned}$$

Na posição horizontal da luneta ($z = 90^{\circ}01',1$), marca-se no pedestal da chaminé o ponto O_1 e mede-se a altura $1,39$ m, deste ponto ao solo.

Para determinar o diâmetro exterior D da chaminé, projetam-se os pontos extremos tangentes a e b na face plana do pedestal, medindo-se desse modo o comprimento $cd = 1,34$ m.

Teremos, pela (Fig. 297):

$$\frac{D}{28,25} = \frac{cd}{26,95} = \frac{1,34}{26,95}$$

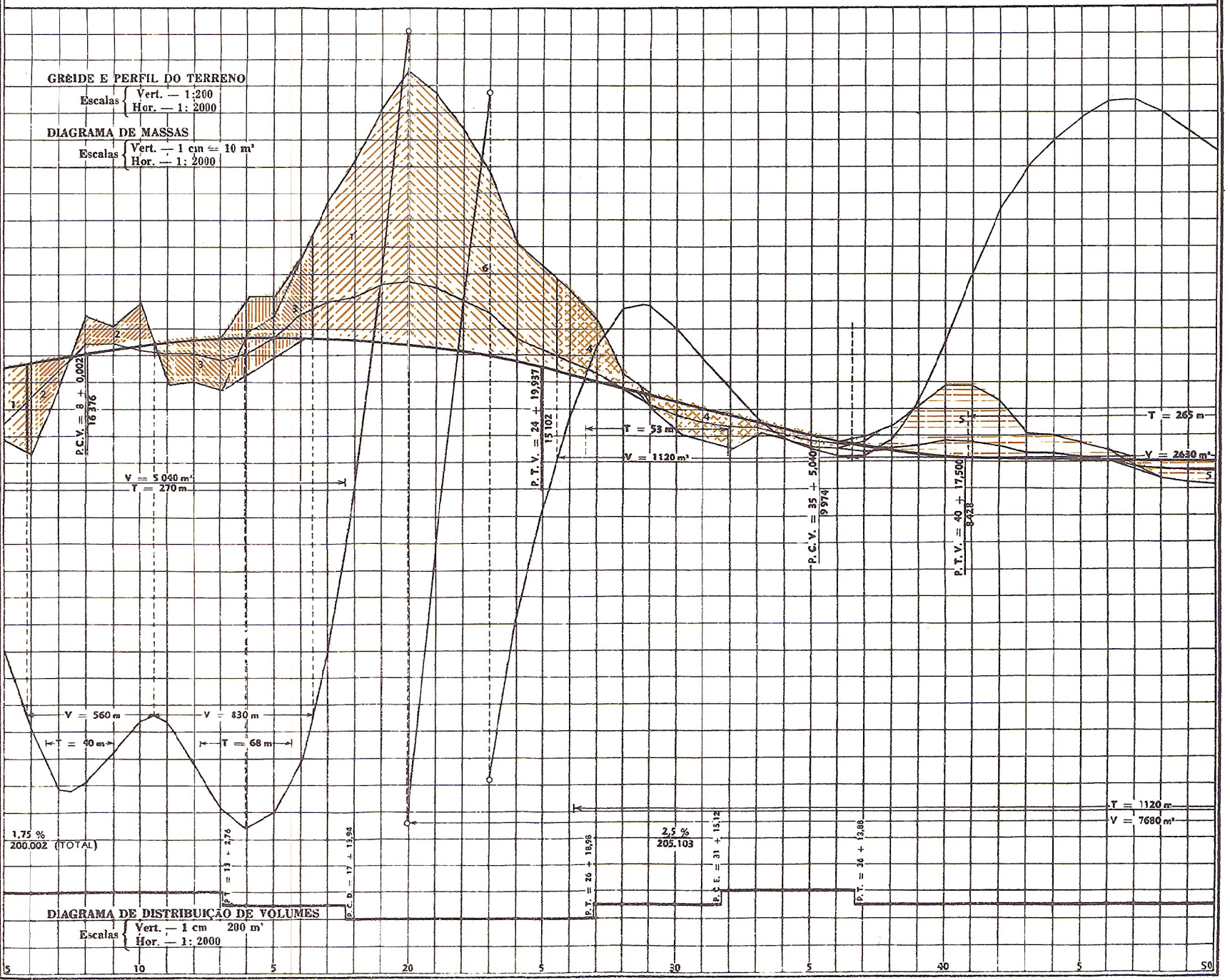
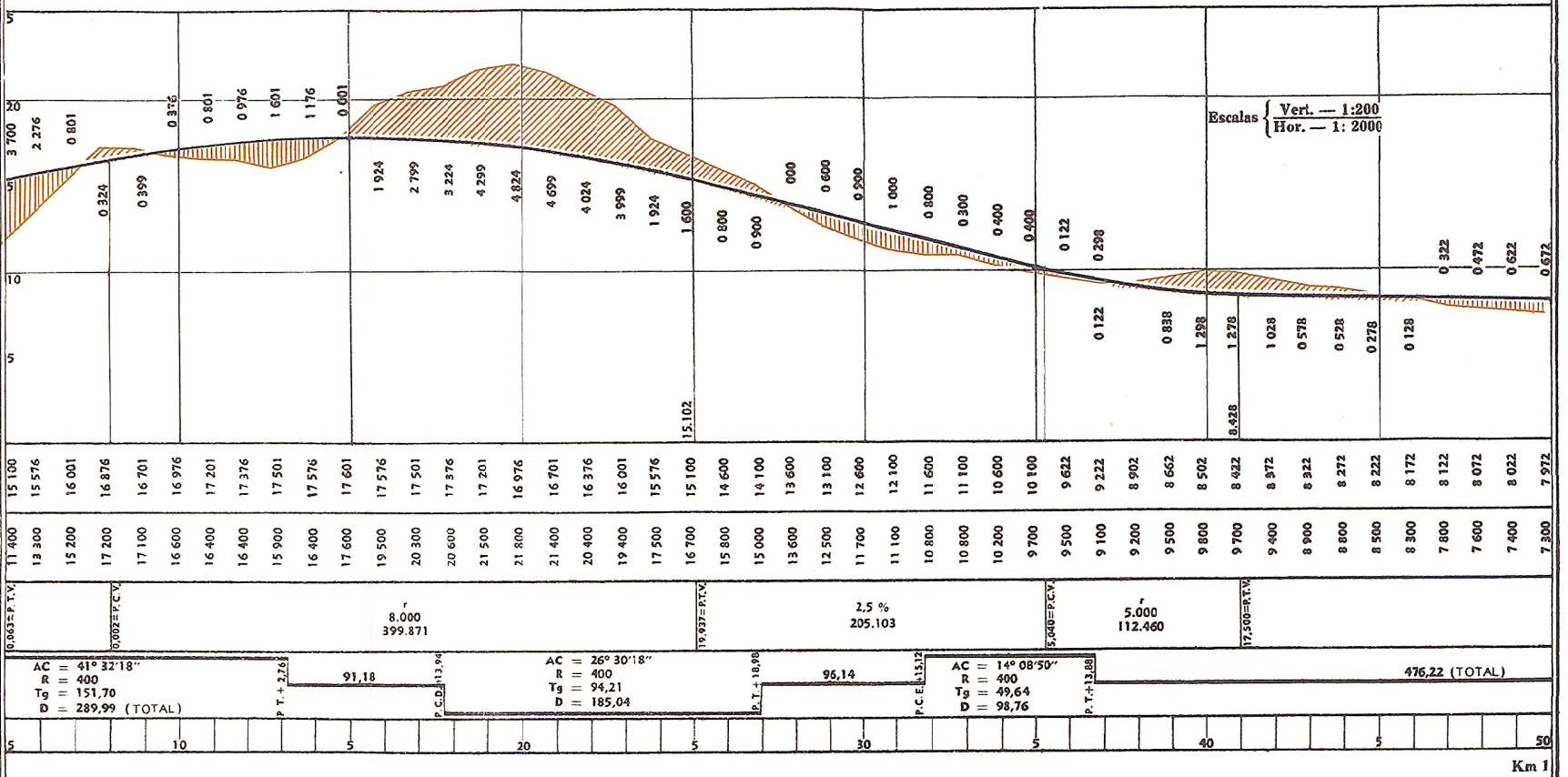
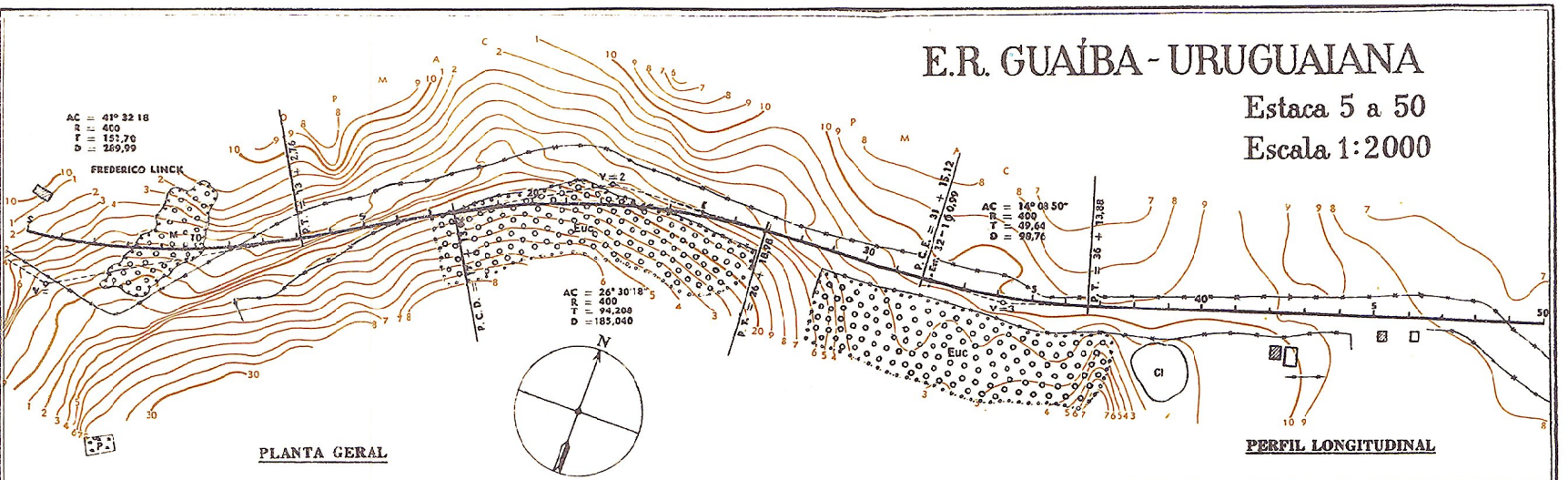
Donde

$$D = \sim 1,40 \text{ m}$$

E.R. GUAIBA - URUGUAIANA

Estaca 5 a 50

Escala 1:2000



PRANCHA IX
Planta e perfil de uma
linha de reconhecimento

A distância Op será, portanto, igual a: $Op = 28,25 - D/2 = 27,55$ m e a altura Pp :

$$Pp = D_1 \cdot \text{ctg } z_1 = 27,55 \cdot \text{ctg } 47^\circ 45' 12'' = 25,02 \text{ m}$$

e a altura total da chaminé

$$H = 25,02 + 1,39 = 26,41 \text{ m}$$

Para o cálculo da altura H_1 , teremos:

$$Oq = 28,25 - 0,98 = 27,27 \text{ m}$$

e a altura Qp

$$Qp = 27,27 \cdot \text{ctg } z_2 = 27,27 \cdot \text{ctg } 79^\circ 16' 4'' = 5,17 \text{ m}$$

e a altura do pedestal será, portanto:

$$H_1 = 5,17 + 1,39 = 6,56 \text{ m}$$

isto é, aproximadamente, a quarta parte da altura total.

D) NIVELAMENTO BAROMÉTRICO

§ 27 – Instrumental

122 – Definições. Barômetro de mercúrio

O emprego dos *barômetros de mercúrio*, dos barômetros metálicos ou *aneróides*, e dos *termobarômetros* ou *hipsômetros* é de grande importância nos reconhecimentos, para a avaliação rápida e satisfatória das altitudes.

Utilizando aparelhos, convenientemente aferidos e compensados, e de boa fabricação, podem-se obter bons resultados nos trabalhos práticos, uma vez que se opere com mais de um aparelho, e não haja variações bruscas de temperatura e pressão barométrica, por ocasião das observações.

O barômetro de mercúrio, tipo Fortin, é o aparelho de maior precisão, mas sua fragilidade e dificuldade em mantê-lo sempre em boas condições dificultam seu emprego corrente nos serviços de campo. É conveniente instalá-lo como padrão, caso não haja posto meteorológico ao qual se possa recorrer para aferição.

O nivelamento barométrico é baseado na relação que existe entre altitude e pressão atmosférica. Esta relação é a fórmula barométrica.

A pressão do ar é menor nas camadas superiores da atmosfera do que nas inferiores, ao passo que com as altitudes a razão é inversa,

isto é, a maiores altitudes correspondem menores pressões. Em média, para cada milímetro de variação de pressão há uma diferença de altitude de ~ 11 metros, o que exige a aproximação do décimo de milímetro de pressão, só alcançada em bons aparelhos barométricos, para se obter a altitude com o valor aproximado de um metro.

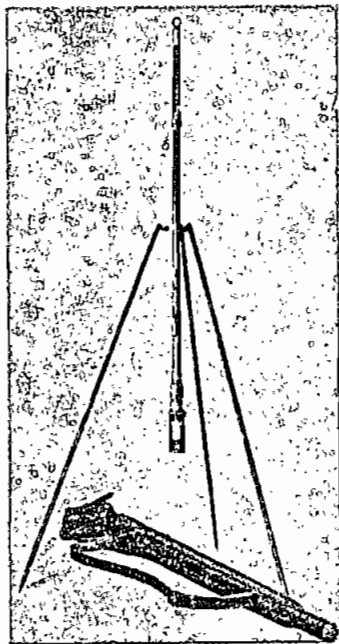


FIG. 298

A fórmula de redução é a seguinte:

$$P_0 = P_t - \frac{P_t (C - \alpha) t}{1 + t} \quad (231)$$

sendo P_0 a pressão a 0° e P_t a pressão lida a t° .

Os valores dos coeficientes são:

- $C = 0,00018018$ — coeficiente de dilatação do mercúrio;
- $= 0,00001878$ — coeficiente de dilatação do latão.

Para a correção da escala de latão há uma tabela, em que a redução das temperaturas acima de 0° é positiva e abaixo de 0° negativa.

O *barômetro de Fortin*, próprio para trabalhos topográficos (Fig. 298) é dotado de tripé metálico, e suspensão cardan, acondicionado em estojo de couro.

Barômetro de mercúrio. Num barômetro de mercúrio, a altura da coluna mercurial faz equilíbrio à coluna atmosférica do mesmo diâmetro. Mas como a densidade do mercúrio varia com a temperatura, e o peso com a latitude e a altitude, deve-se reduzir todas as leituras efetuadas nestes aparelhos a condições determinadas, isto é, a 0° de temperatura e ao peso (pela gravidade) do nível do mar e a 45° de latitude.

Para a correção da temperatura, cada barômetro tem afixado um termômetro, cuja leitura deve ser feita todas as vezes, antes da leitura do barômetro.

A redução a 0° varia com o material de que é feita a escala, perfazendo cerca de $0,1$ mm por 1°C .

123 — Hipsômetro

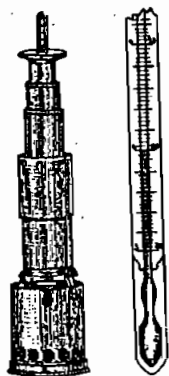


FIG. 299

O termobarômetro ou hipsômetro (Fig. 299) é um aparelho cujo funcionamento baseia-se no abaixamento da temperatura de ebulição da água com a diminuição da pressão ou com o aumento correspondente da altitude.

A relação entre a temperatura do ponto de ebulição da água (destilada) e a pressão atmosférica é dada na tabela de Regnault (Física) seguinte, em que t_e representa a temperatura de ebulição e P_o a pressão atmosférica correspondente, reduzida a 0° de temperatura e em latitude média ao nível do mar.

Pela tabela vê-se que a uma diferença de pressão atmosférica de 0,1 mm, corresponde uma diferença de temperatura de ebulição de $0^{\circ},04$.

Tabela de Regnault

t_e	P_o	t_e	P_o	t_e	P_o	t_e	P_o
$^{\circ}\text{C}$	mm	$^{\circ}\text{C}$	mm	$^{\circ}\text{C}$	mm	$^{\circ}\text{C}$	mm
97,0	681,9	98,0	707,1	99,0	733,2	100,0	760,00
97,1	684,4	98,1	709,7	99,1	735,8	100,1	762,7
97,2	686,9	98,2	712,3	99,2	738,5	100,2	765,5
97,3	689,4	98,3	714,9	99,3	741,1	100,3	768,2
97,4	691,9	98,4	717,5	99,4	743,8	100,4	771,0
97,5	694,4	98,5	720,1	99,5	746,5	100,5	773,7
97,6	696,9	98,6	722,7	99,6	749,2	100,6	776,5
97,7	699,5	98,7	725,3	99,7	751,9	100,7	779,3
97,8	702,0	98,8	727,0	99,8	754,6	100,8	782,1
97,9	704,6	98,9	730,5	99,9	757,3	100,9	784,9

Os graus na escala do termômetro hipsométrico são divididos em 20 partes e pode-se apreciar até um décimo destas divisões, isto é, $0^{\circ},05$, vendo-se então que, teoricamente, a aproximação da leitura do termômetro hipsométrico corresponde a do barômetro mercurial.

Praticamente, no entanto, o nivelamento hipsométrico é inferior ao barométrico, residindo porém sua vantagem em ser o aparelho facilmente transportável, sem perigo de inutilizar-se e ser de aplicação recomendada na aferição dos aneróides, quando em operações de campo.

Para o funcionamento do hipsômetro, basta encher de água destilada o reservatório do aparelho, acender a lâmpada a álcool e esperar que a água ferva.

Deve-se manter o termômetro hipsométrico de tal modo que a coluna mercurial seja observada apenas na sua extremidade. Quando a mesma estiver estável, com a água a ferver, faz-se a leitura.

Os termômetros hipsométricos podem dar as temperaturas de ebulição ou, indiretamente, as pressões correspondentes, como se observa nos termômetros hipsométricos Fuess.

124 — Aneróides

a) *Aneróide compensado Casella (tipo Bohne)*. O instrumento de uso corrente principalmente nos reconhecimentos, é o barômetro metálico ou *aneróide*, e apresenta vantagem sobre os barômetros de mercúrio e sobre os hipsômetros, pela facilidade de transporte e comodidade de leitura.

Consiste, essencialmente, numa caixa na qual é feita o vácuo, e cuja parte superior é ondulada para reforço e aumento de elasticidade. Uma forte lâmina de aço impede que a caixa seja esmagada pela pressão atmosférica, e transmite as deformações da mesma a uma agulha que se move sobre um mostrador graduado (Fig. 300). Um termômetro



FIG. 300



FIG. 301

interno permite a leitura da temperatura do aneróide, necessária para a redução da pressão lida à temperatura 0 °C.

Há aneróides que possuem uma alavanca que recebe os movimentos da tampa da caixa, de ferro na parte média, e de latão nos extremos. Este dispositivo, ou outro semelhante, corrige as deformações devidas às mudanças de temperatura: são os aneróides ditos *compensados*, que dão as pressões já reduzidas a 0 °C (Fig. 301).

Quer o aneróide simples, quer o compensado, devem ser aferidos continuamente com um barômetro de cuba e, na falta deste, com um hipsômetro, para que suas indicações sejam precisas.

Ao adquirir um bom aneróide, e os há de diversos tipos e fabricantes, convém aferi-lo num Observatório Meteorológico, para a determinação da constante instrumental, a diferentes temperaturas e pressões e as correções das leituras barométricas.

b) *Altímetro de precisão sistema Paulin.* O altímetro sistema Paulin (Fig. 302) é um *barômetro aneróide compensado* de grande sensibilidade.

Um *índice de tendência*, à esquerda ou à direita do zero, observado num espelho indica se a pressão atmosférica é superior ou inferior à indicada pela *agulha* na observação anterior.

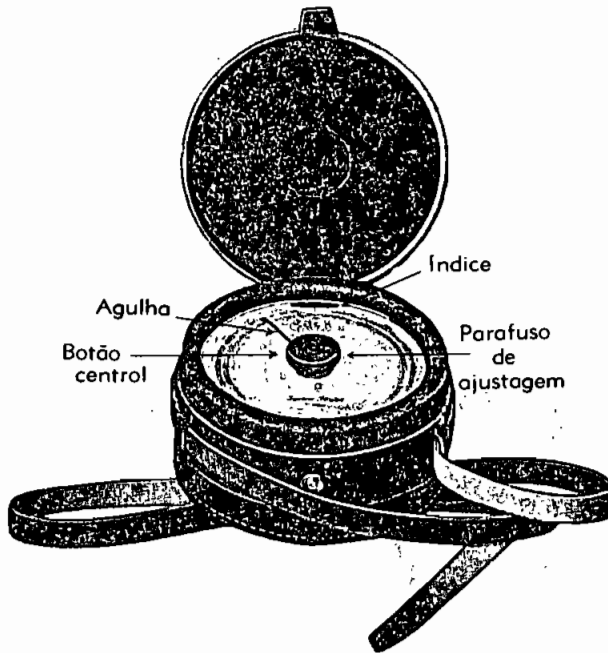


FIG. 302

A agulha é ligada ao *botão central* que se manobra até que o *índice de tendência* esteja diante do zero. A agulha indica, então, imediatamente, a pressão atmosférica correta.

Quando se deseja obter uma observação de grande exatidão, basta girar o *parafuso de ajustagem* e, ao mesmo tempo, a agulha, até que

as indicações do instrumento sejam as mesmas de um barômetro de mercúrio.

Durante a ajustagem, o índice de tendência deve coincidir com o zero. Para o transporte, deve-se fixar o mecanismo, girando o botão central no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, até fixá-lo.

Nos pontos a nivelar, basta ajustar o índice com o zero no espelho (acionando o botão central) e ler a pressão e a altitude correspondentes, indicadas pelo ponteiro.

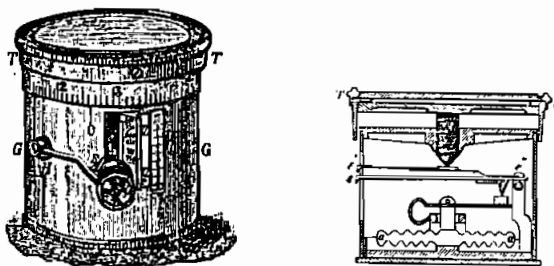
Tratando-se de um aparelho preciso e delicado, sujeito, como outros aneróides, a correções, seu emprego exige a leitura das respectivas instruções, para os quatro tipos em que são fabricados.

Em diversas aplicações práticas e nos cursos de Topografia, este tipo de aneróide tem dado os melhores resultados, o que justifica seu emprego preferencial em trabalhos extensos e de bastante responsabilidade.

Os aneróides Paulin são fabricados em Estocolmo, na Suécia, onde a pressão atmosférica média no nível do mar é, como na Europa central, de ~ 762 mm de mercúrio; assim, o zero da escala é fixado nessa pressão e, por conseguinte, para nosso País (pressão média de 760,7), torna-se necessária uma correção correspondente de índice.

Além disso, em virtude de *depressão barométrica*, o instrumento indica, em geral, uma altitude ligeiramente diferente da do lugar da observação, o que deve também ser levado em conta nas observações de precisão.

c) *Barômetro-altímetro Goldschmied.* É um barômetro-altímetro de boa precisão (Fig. 303). O diâmetro é de 80 mm e a altura de 70 mm.



Tipo M_1 .

FIG. 303

Para aquisição desse instrumento deve ser indicado até que altitude o barômetro vai ser utilizado.

O tipo M_1 alcança até 3 000 m; o tipo M_2 até 5 000 m e o tipo M_3 até 7 000 m. É aconselhável utilizar o aparelho só para as alturas a que se destina. Sempre que possível, e nos casos corrente da prática, é recomendável o tipo M_1 .

§ 28 — Cálculo de altitudes com o nivelamento barométrico

O nivelamento barométrico baseia-se na relação que existe entre a pressão atmosférica e a altitude num ponto, o que se expressa pela fórmula chamada barométrica.

Sendo a pressão do ar menor nas camadas superiores da atmosfera do que nas inferiores, pode-se, pela avaliação da diferença de pressão entre dois pontos, determinar sua diferença de altitude.

Os instrumentos empregados nos nivelamentos barométricos, isto é, barômetros, aneróides e hipsômetros dão, porém, indicações que devem ser corrigidas, antes da aplicação nas fórmulas respectivas.

As correções das leituras com o barômetro de mercúrio são as que se referem à temperatura, escala e aferição. As correções do aneróide, instrumento usado de preferência nos nivelamentos barométricos, são as seguintes:

125 — Correções das leituras dos aneróides

a) *Correção da temperatura.* Essa correção é importante no nivelamento barométrico pois, com o aumento da temperatura, há também aumento da pressão correspondente.

Numa determinada região, as variações de temperatura e pressão são mais ou menos constantes, isto é, o coeficiente de temperatura pode ser obtido pela relação entre ambas e assim

$$\alpha = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (232)$$

Na prática, se comparam as leituras do aneróide com as de um barômetro, a diferentes temperaturas, de preferência no inverno, desenhando o gráfico respectivo e traçando uma linha de *compensação*, cujo coeficiente angular α podemos determinar. Deste modo, se a temperatura variar de 0 a 20° e a diferença de pressão fornecida pelo aneróide e pelo barômetro de mercúrio, *reduzido a 0 °C*, for de - 2,1 mm, o coeficiente de temperatura terá, para valor *aproximado*

$$\alpha = - \frac{2,1}{20} = - 0,105$$

Repetem-se as observações durante alguns dias para obter valores médios mais exatos.

O coeficiente de temperatura α é geralmente inferior a 0,1 (0,1 mm por 1 °C), devendo-se abandonar instrumentos em que $\alpha > 0,15$.

Escolhendo-se metais de coeficientes de dilatação diferentes para as alavancas, ou deixando entrar um pouco de ar no interior da caixa a vácuo do aneróide, que equilibra a diminuição da força elástica da

mola pela dilatação do ar, consegue-se anular ou reduzir muito a influência da temperatura nas leituras do aneróide; tais tipos de aneróides são chamados *compensados*.

b) *Correção de graduação e de estado.* Os aparelhos de precisão raras vezes apresentam erros superiores a 1 ou mesmo 2% nas pressões, devido à imperfeição de divisão e de construção do aneróide (estado).

Para se verificar a existência de tais erros, deve-se fazer uma ascensão a um morro ou montanha, e comparar as leituras do aneróide e do barômetro de mercúrio.

Artificialmente, por meio de uma máquina pneumática, também podem ser feitas as comparações e colhidos, mais facilmente, os dados para o cálculo do coeficiente de graduação.

Se numa diminuição de 27,8 mm de pressão barométrica, o aneróide indicar 0,7 mm para menos, o coeficiente de graduação e de estado para todas as leituras intermediárias será:

$$\beta = \frac{+ 0,7}{27,8} = \sim 0,025 \text{ mm}$$

A fórmula a empregar para obter a pressão dada por um aneróide é expressa por:

$$A = A_1 - at + \beta (A_1 - A_1) \quad (233)$$

em que:

- A = leitura reduzida do aneróide
- A_1 = leitura feita à temperatura t
- A_1 = leitura inicial de comparação.

c) *Cuidados a tomar nas leituras aneroidais.* Além das correções, há outros fatores que influem na exatidão das indicações de um aneróide, tais como os choques em viagem, os efeitos da inércia de elasticidade e os efeitos secundários ou posteriores.

Assim, é aconselhável não trabalhar senão com bom tempo e ausência de ventos caso contrário, os resultados serão duvidosos devido à irregularidade das variações.

As leituras devem sempre ser feitas na posição horizontal, e com alguns minutos de repouso em cada ponto nivelado, para vencer a inércia elástica, auxiliadas com leve batida com o lápis no próprio aneróide. Verifica-se na subida de um morro, por exemplo, que ao atingir o ponto mais elevado, as pressões continuam ainda a descer, o que é causado pelos efeitos secundários ou posteriores acima mencionados. O mesmo fato se verifica nas descidas.

Sabe-se pela Física, que a pressão barométrica, num mesmo lugar, terá *variação regular* durante o dia e durante o ano havendo dois máximos diários, entre 9-10 horas e 21-22 horas, e dois mínimos, entre 14-15 horas e 3-5 horas.

As oscilações ou *maré barométrica* podem atingir 2 a 3 mm diários, isto é, 24 a 36 metros de variação de altitude.

Nos meses de inverno as pressões são mais elevadas do que nos de verão.

Na falta de dados meteorológicos obtidos nos Institutos ou Postos de Meteorologia é conveniente fazer comparações horárias em 3 ou 4 dias de bom tempo.

Nenhum nivelamento barométrico deve ser feito sem o emprego de, pelo menos, dois bons aneróides alteridos ou um aneróide e um barômetro de mercúrio ou um hipsômetro de precisão.

Um dos aparelhos ficará na estação inferior onde o ajudante fará leituras de 1/2 em 1/2 hora, para as comparações posteriores.

Um bom barógrafo registrador assim como um termógrafo prestam auxílio inestimável nos nivelamentos barométricos.

126 — Fórmulas barométricas

Muitas são as fórmulas empregadas em Barometria, porém todas elas, ou são empíricas, obtidas em função de grande número de observações e altitudes conhecidas, ou deduzidas das fórmulas clássicas teóricas de Laplace e de Jordan.

a) *Fórmula de Laplace — Exemplo.* A fórmula de Laplace (Física) para achar a diferença de nível entre dois pontos é a seguinte:

$$Z = 18336 \left(1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \right) \left[1 + 0,00265 \cdot \cos 2\varphi \right] \left[\left(1 + \frac{z}{R} \right) \log \frac{h_0}{h} + \frac{2Mz}{R} \right] \quad (234)$$

Z é a diferença de nível entre os pontos inferior e superior, A e B ; 18336 é o *Coefficiente barométrico*, determinado por Ramond de Carbonnières, nos Pireneus e confirmado por Biot e Arago em 1806.

$\left(1 + \alpha\theta \right)$ ou $\left(1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \right)$ é o termo de correção das temperaturas t_0 e t , das duas estações, pois $\alpha = 0,004$ e θ é a média das temperaturas;

$\left(1 + 0,00265 \cdot \cos 2\varphi \right)$ é o termo de correção da latitude, pois se P for o peso de um corpo à latitude de 45° , o peso do mesmo corpo expressa-se por $P(1 + 0,00265 \cdot \cos 2\varphi)$ à latitude φ e a expressão de Z deve ser multiplicada por $(1 + 0,00265 \cdot \cos 2\varphi)$.

O último termo exprime a razão direta entre as pressões e alturas barométricas, h_0 e h que as exprimem, e também, a intensidade da gravidade nos pontos inferior e superior, na razão inversa dos qua-

drados das distâncias destes pontos ao centro da Terra, R é a distância da estação inferior ao centro da Terra, M é o módulo dos logaritmos neperianos = 0,4342945.

A incógnita Z entrando no terceiro membro, é determinada por aproximações sucessivas: Começa-se por desprezar as temperaturas, bem como as quantidades $\frac{Z}{R}$ e $\cos 2\varphi$, e se escreve

$$Z_1 = 18336 \cdot \log \frac{h_0}{h}, \quad (235)$$

primeiro valor aproximado, que difere pouco da fórmula dada por *Halley*, que é:

$$N = 18328,4 \log \frac{H_0}{H_n} \quad (236)$$

Levando em conta as temperaturas, obteremos a segunda aproximação

$$z_2 = z_1 + \frac{2(t_0 + t)}{1000} z_1 \quad (237)$$

Tomando-se, enfim, esse valor para z , na fórmula geral, e substituindo obtém-se a fórmula usada na prática:

$$Z = 18336 \log \frac{h_0}{h} + \frac{2(t_0 + t)}{1000} \cdot z_1 + z_2 \cdot 0,00265 \cos 2\varphi + (z_3 + 2M \cdot 18336) \frac{z_3}{R} \quad (238)$$

Os termos desta fórmula são obtidos de tabelas, tais como as publicadas pelo *Annuaire du Bureau des longitudes*.

Exemplo prático: Marco cadastral do Morro Teresópolis (Porto Alegre).

$$\text{Dados} \left\{ \begin{array}{l} \text{ponto inferior: } h_0 = 755,7; t_0 = 22^{\circ}5 \\ \text{ponto superior: } h = 738,5; t = 17^{\circ}5 \\ \varphi = -30^{\circ}5'; R = 6\,370\,000 \text{ m (valor médio)} \end{array} \right.$$

Cálculo de z_1 :

$$18336 \cdot \log h = 18336 \cdot \log 755,7 = 8349,25 \text{ m}$$

$$18336 \cdot \log h = 18336 \cdot \log 738,5 = 8165,90 \text{ m}$$

$$z_1 = 183,35 \text{ m}$$

1.^a correção (temperatura)

$$+ 2 \frac{t_0 + t}{1000} z_1 = \frac{80}{1000} 183,35 = 14,67 \text{ m}$$

e

$$z_2 = 183,35 + 14,67 = 198,02 \text{ m}$$

2.^a correção (latitude)

$$+ (0,00265 \cos 2\varphi) z_2$$

$$\varphi = -30^{\circ}5' \quad 2\varphi = -60^{\circ}10'$$

$$\cos(-60^{\circ}10') = 0,49747$$

$$0,00265 \cdot \cos 2\varphi = 0,0013183$$

donde

$$(0,00265 \cdot \cos 2\varphi) z_2 = 0,0013183 \times 198,02 = 0,26 \text{ m}$$

e

$$z_3 = 198,02 + 0,26 = 198,28$$

3.^a correção (de altitude)

$$+ z_3 + 2 \cdot M \cdot 18336) \frac{z}{R} =$$

$$= (198,28 + 2 \times 0,434295 \times 18336) \frac{198,28}{6370000} = 0,50 \text{ m}$$

c a diferença de nível bastante aproximada será:

$$z = 198,28 + 0,50 = 198,78$$

A altitude inferior *A* sendo de 55 m, por exemplo, a do superior *B* será

$$H_B = H_A + z = 55,00 + 198,78 = 253,78 \text{ m}$$

b) *Fórmula de Jordan.* A fórmula barométrica completa deduzida por Jordan, que dá a diferença de nível entre dois pontos, em função das leituras barométricas correspondentes e com as diversas correções já vistas na fórmula anterior, é a seguinte, com as notações originais:

$$h = K \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) (1 + 0,377 \frac{e}{p}) (1 + \beta \cos 2\varphi) (1 + \frac{2H}{r}) \quad (239)$$

h é a diferença de nível que se deseja encontrar, expressa em metros pois nesta unidade é expressa também a altura barométrica 0,76;

$$K = \frac{0,76}{M} \cdot \frac{13,59593}{0,00129277} \cdot \frac{1}{1,00021} = 18400 \quad (240)$$

K = 18400 é a constante barométrica;

0,76 m altura normal de uma coluna de mercúrio;

$M = 0,4342945$, o módulo logarítmico;

$13,59593 =$ densidade do mercúrio em relação à água;

$0,00129277 =$ densidade do ar sob a pressão normal ($760 \text{ mm-}0^{\circ}\text{C-}45^{\circ}\phi$)

$1,00021$ fator de redução para o ácido carbônico;

B e b são as pressões atmosféricas observadas simultaneamente nas estações superior e inferior;

$\alpha = 0,003665$ é o coeficiente de dilatação do ar para 1°C , ou seja = $1/272,85$;

$t =$ temperatura média do ar ambiente, em graus centígrados;

$e =$ tensão média do ar livre (obtida pelo psicrômetro);

$p =$ pressão média atmosférica = $\frac{B + b}{2}$;

$0,377 = 1 - d$, sendo $d = 0,623$, que é a densidade do vapor d'água com relação ao ar, em igualdade de pressão e temperatura;

$\beta = 0,00264$ é o coeficiente de gravidade, dependente do achatamento terrestre;

$\phi =$ latitude geográfica média de ambas as estações;

$H =$ altitude média das duas estações (obtida das primeiras aproximações);

$r = 6370000 \text{ m.} =$ raio médio da terra.

Nesta fórmula, bem como em outras, as alturas barométricas devem ser reduzidas a igual temperatura, igual gravidade, etc., antes de seu emprego.

Na prática, são tão pequenos os três últimos fatores da fórmula de *Jordan*, que podem ser considerados constantes para grandes extensões.

c) *Correções da pressão barométrica. Unidade relativa. Exemplos.* Damos a seguir um exemplo de observação baro e termométrica, no Instituto Regional de Meteorologia "Coussirat Araújo", de Porto Alegre na tarde de 22 de outubro de 1943, mostrando como se determina a pressão normal com um barômetro de mercúrio, bem como a unidade relativa.

HORA DA OBSERVAÇÃO	14h00	14h30	15h00	15h30	16h00	16h30	17h00
PRESSÃO							
Termômetro do barômetro	26.1	26.0	25.4	25.0	24.6	24.3	24.2
Barômetro	759.1	759.1	759.0	758.8	758.6	758.5	758.5
Correção a 0°C	-2.2	-3.2	-3.1	-3.1	-3.0	-3.0	-3.0
Correção instrumental	+0.5	+0.5	+0.5	+0.5	+0.5	+0.5	+0.5
Pressão reduzida a 0°C	756.4	756.4	756.4	756.2	756.1	756.0	756.0
Correção de grav. normal	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
Pressão atmosférica	755.4	755.4	755.4	755.2	755.1	755.0	755.0
PSICRÔMETRO							
Temperatura do ar	20.8	20.6	20.6	20.4	21.0	20.9	20.5
Temperatura do bulbo úmido	17.9	17.7	17.7	17.3	17.6	17.8	17.6
Umidade relativa	74%	74%	74%	72%	70%	73%	74%

d) *Redução das pressões barométricas ao nível do mar. Exemplo.* Laplace deduziu uma fórmula simplificada, pela qual, conhecida a altitude de um ponto e a respectiva pressão reduzida a 0 °C, acha-se a pressão correspondente ao nível do mar; a fórmula deduzida é a seguinte:

$$\log H = \log h + \frac{z}{18400 [1 + 0,00367 (t + z/360)]} \quad (241)$$

onde

z é a altitude do lugar,

h é a pressão reduzida a 0 °C,

t é a temperatura ambiente,

H é a altura barométrica reduzida ao nível do mar.

Quando a altitude não é superior a 400 m, a redução se efetua mais facilmente pela fórmula.

$$H = h + h \frac{z}{8000 + 30 \cdot t} \quad (242)$$

Exemplo: para $h = 740,00$ mm; $t = 15$ °C e $z = 200$ m

$$H = 740 + 740 \frac{200}{8000 + 30 \times 15} = 757,5 \text{ mm}$$

Para altitudes inferiores a 100 m, a correção de redução ao nível do mar é constante para cada lugar, e igual a 0,09 mm por metro de altitude.

e) *Outras fórmulas barométricas (empíricas)*

1 - *Babinet:*

$$z = 16\,000 \frac{h - H}{h + H} [1 + 0,002 (t + T)] \quad (243)$$

2 - *Eng.º Street:*

$$z = \frac{h - H}{h + H} 31,92 \left(501,5 + \frac{t + T}{2} \right) \quad (244)$$

3 - *Ramond (simplificada):*

$$z = 18\,393 \left[1 + \frac{2(T + t)}{1000} \right] \quad (245)$$

4 - *Saint Robert:*

$$z = 58,58 \frac{h - H}{\frac{h}{274^\circ + t} + \frac{H}{274^\circ + T}} \quad (246)$$

f) *Fórmula de L. Cruls. Exemplo.* A fórmula de L. Cruls, dada no *Anuário do Observatório Nacional do Rio de Janeiro*, é uma das fórmulas aproximadas, empregada entre nós e com melhores resultados do que a de Babinet, para altitudes médias.

1.^a aproximação da altitude (a):

$$a = 10x + 0,011 \cdot x^2 \quad (247)$$

em que $x = 760 \text{ mm} - b$.

Sendo b a pressão barométrica no lugar da observação, à temperatura t .

2.^a aproximação (A):

$$A = a + 0,001a(0,01a + 4t) \quad (248)$$

em que t é a temperatura ambiente.

1.^a correção (empírica)

$$+ 12 \text{ m sen} \left(\frac{a}{10} \right)^{\circ} \quad (249)$$

2.^a correção

$$+ 10,5 \text{ m} (H - 760 \text{ mm}) \quad (250)$$

As tabelas auxiliares, transcritas do *Anuário* referido e duas delas (XVI e XVII da "Caderneta de Campo" de Lélis Espartel e João Lüderitz), permitem o cálculo das primeiras altitudes e das primeiras correções com facilidade.

Exemplo. Calcular a altitude do Posto Meteorológico da cidade de Passo Fundo, no Estado do Rio Grande do Sul, com as observações médias do ano de 1933 (Boletim do ano XXII do Instituto Coussirat Araújo).

Dados: Passo Fundo — Pressão barométrica reduzida a 0° mb (*), média do ano de 1933: 936,6 mb; temperatura média 17°7.

Porto Alegre — Pressão, idem, idem, 1014,4 mb; temperatura média 19°.

Como as pressões dadas foram reduzidas a 0° e as fórmulas Cruls são à temperatura ambiente, empregaremos, para obtê-las, a fórmula conhecida, levando em conta a dilatação do mercúrio e da escala barométrica:

$$b_o = b_t - 0,000172 \cdot t \quad b_t = b_o(1 + 0,000172 t)$$

e

$$b_t = \frac{b_o}{1 - 0,000172 t} \quad (251)$$

(*) *Milibar* (mb) é a unidade barométrica convencionada, desde 1923, para uso internacional. Equivale, praticamente, a 0,75 ou 3/4 de milímetro de pressão.

Altitude de Passo Fundo

Pressão barométrica, em mb, reduzida a 0° - 936,6

Pressão barométrica, em mm, reduzida a 0° - 702,45 (3/4)

Temperatura do ar - 17°7

Pressão reduzida a t°

$$b_t = \frac{702,45}{1 - 0,000172 \times 17,7} = 704,6$$

1.ª aproximação (a):

$$x = 760 - 704,6 = 55,4; \quad 10x = \dots \quad 554,0$$

$$x^2 = 3069,16; \quad 0,011x^2 = \dots \quad 33,8$$

$$a = 587,8 \text{ m}$$

Pela tabela XVI, ("Caderneta de Campo") interpolando, obtém-se o mesmo valor mais facilmente.

2.ª aproximação (A):

$$0,01a = 5,88$$

$$+ 4t = 70,8$$

$$0,01a + 4t = 76,68 \times 0,001a = 45,09$$

$$a = 587,80$$

$$A = 632,89$$

Correções:

$$\left(\frac{a}{10}\right)^0 = \left(\frac{587,8}{10}\right) = 58^{\circ}47'$$

Pela tabela XVII ("Caderneta de Campo")

$$\text{sen } 58^{\circ}47' \times 12 \dots \dots \dots = 10,26$$

$$+ A \dots \dots \dots = 632,89$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 643,15$$

Para determinar a pressão reduzida no nível do mar, em 1933, correspondente à altitude aproximada de 700 m, empregaremos a fórmula (241) e obteremos para *H* o valor 763,1 mm (exagerado!) e a correção final será:

$$10,5 (763,1 - 760) = 32,55$$

Assim, a altitude aproximada de Passo Fundo, por essa fórmula será, pois:

$$643,15 - 32,55 = 675,70$$

valor que difere quase 30 metros ou 4,4% para menos do valor encontrado pelas fórmulas de *Laplace* ou *Jordan*.

Se tomarmos b_0 em lugar de b_t , na relação x da 1.^a aproximação, o valor final encontrado será mais aproximado, pois atingirá 702,5 m. que difere apenas 3 metros do valor teórico. Trata-se porém de uma fórmula empírica, aproximada, e baseada na aplicação a diversos valores práticos e não se justifica a alteração ocasional sugerida.

g) *Aplicação da fórmula de Jordan ao exercício anterior.* Adotando-se a fórmula (239) e fazendo as devidas substituições, virá:

$$h = 18400 \log \frac{760.8}{702.45} \left(1 + 0,003665 \frac{17.7 + 19.1}{2} \right)$$

$$\left[1 + 0,00264 \cos \frac{(-28^{\circ}15' - 30^{\circ}2')}{2} \right] \left(1 + \frac{2 \times 700 \text{ m}}{6370000} \right)$$

$$\log. 760.8 = 2.991271$$

$$P.A = -30^{\circ}2'$$

$$\log. 702.45 = 2.846615$$

$$P.F = -28^{\circ}15'$$

$$\log \frac{B}{b} = 0,034656$$

e a primeira aproximação da diferença de nível será:

$$h' = 18400 \times 0,034656 = 637,67 \text{ m}$$

O segundo termo, correspondente à correção da temperatura média, tem para valor 1,067436 e a segunda aproximação

$$h'' = 637,67 \times 1,067436 = 680,67 \text{ m}$$

O terceiro termo da correção da latitude média tem para valor 1,001388 e a terceira aproximação

$$h''' = 680,67 \times 1,001388 = 681,61 \text{ m}$$

a correção final da diferença de nível tem para valor 1,00022, e seu valor final será:

$$h = 681,61 \times 1,00022 = 681,76 \text{ m}$$

A altitude do Instituto Coussirat de Araújo, em sua antiga sede em Porto Alegre, no torreão onde estava situado o barômetro, é de 23,48 m e, assim, a altitude de Passo Fundo, pela *fórmula de Jordan*, é:

$$681,76 + 23,48 = 705,24$$

Pela *fórmula de Laplace*, a altitude calculada é de 705,88.

A diferença existente é devida a não se ter, na primeira aplicação, levado em conta a tensão do vapor d'água contido no ar e umidade relativa, por falta de observações no Posto Meteorológico de Passo Fundo.

h) *Grau barométrico. Tabelas de Jordan.* Em 1850 empregou Babinet pela primeira vez outro método para o cálculo de altitudes barométricas, que consistia em representar as diferenças de nível sob a forma de um produto.

Dentro de certos limites, os desníveis são aproximadamente proporcionais às diferenças barométricas (1 mm do barômetro corresponde a ~ 11 metros de desnível); é o valor geodésico de 1 mm de mercúrio.

A fórmula básica é a seguinte:

$$h = K(1 + \alpha t)(\log B - \log b)$$

Diferenciando, considerando as diferenciais como diferença obtemos

$$h = \frac{2\mu R(1 + \alpha t)}{B + b}(B - b) \quad (252)$$

Esta é uma das fórmulas em que o desnível h aparece como um produto, um de cujos fatores é a diferença barométrica $(B - b)$.

O cálculo aproximado feito com esta fórmula satisfaz perfeitamente para diferenças de nível menores do que 1 000 m.

A fórmula acima é transformada na que se segue:

$$h = \frac{\mu K(1 + \alpha t)}{H_m} \Delta B = \frac{8019}{H_m}(1 + \alpha t) \Delta B \quad (253)$$

onde H_m é a altura barométrica média, ΔB a diferença barométrica e 8019 o produto $\mu K = 0,4342945 \times 18464 = 8019$.

O novo valor K tomado por Jordan para a constante barométrica é determinado em função da altura barométrica média ao nível do mar, que, na Europa Central, é de ~ 762 mm; para nosso País, em

que essa pressão é variável, há a considerar, em barometria de precisão, uma correção nos valores obtidos pela fórmula dada.

A tabela de Jordan dá os valores do grau barométrico ou dos desniveis barométricos Δh_1 para diferenças de 1 mm na pressão, de 600 a 760 mm, variáveis de 5 em 5 mm e para temperaturas de -5°C a $+35^\circ\text{C}$; uma dupla interpolação permite a determinação fácil de Δh_1 que, também, pode ser obtido diretamente pela fórmula:

$$\Delta h_1 = \frac{8019}{H_m} (1 + 0,003665 t) \quad (254)$$

127 — Nivelamento de diversos pontos com as tabelas de Jordan

Exemplo. Achar as altitudes dos vértices de uma poligonal no Morro Teresópolis (Porto Alegre), levantada planimetricamente com o telémetro "Teletop" Zeiss, e altimetricamente com um aneróide compensado Rost (Viena).

Observações feitas (17/10/1939)

Vértices nivelados	HORA DAS OBSERVAÇÕES		Temperatura do ar (t) Co	ANERÓIDE COMPENSADO (ROST. n.º 4574)		MÉDIAS DOS VALORES DE IDA E VOLTA	
	a	m		ta	(x) b	tm	(x) Bo
1 (RN)	(i) 14	30	26.0	26.5	753.3	25.6	753.2
	(v) 18	10	25.2	26.8	753.1		
2	(i) 15	00	26.3	27.8	751.0	25.8	751.1
	(v) 17	50	26.3	26.0	751.2		
3	(i) 15	15	27.1	28.4	748.3	26.6	748.6
	(v) 17	45	26.1	25.8	748.8		
4	(i) 15	30	26.2	29.0	743.1	25.6	743.1
	(v) 17	30	25.0	25.6	743.2		
5	(i) 16	00	24.1	28.2	738.8	23.3	739.0
	(v) 17	20	22.5	26.3	739.2		
6 (Marco)	(i) 16	30	25.0	27.2	735.5	24.5	735.6
	(v) 17	00	24.0	26.4	735.6		

(x) Os valores de b e Bo não compensados.

Aneróide 4580, Rost. Observado no RN (Aferição).

14h30	15h	15h30	16h	16h30	17h	17h30
754.3	754.4	754.3	754.2	754.3	754.4	754.4

As leituras do aneróide já foram corrigidas dos erros de graduação e de estado, bem como da variação normal da pressão, obtida do aneróide de aferição.

Planilha de cálculo de um nivelamento barométrico, com o auxílio das tabelas de Jordan.

Vértices ○	VALORES LIDOS		VALORES MÉDIOS		Grau barométrico (Jordan)	DIFERENÇAS		ALTITUDES		
	Temp. ar (C°)	Aneróide Rost 4574	$t_n + t_{n+1}$	$\beta_n + \beta_{n+1}$		De pressão	De nível	Calculadas	Correção (2)	Compensadas
			2	2						
(t)	(B ₀)	(t _m)	B _m	(Δh)	(ΔB)	(ΔH)	H'	$\frac{\Delta \epsilon = H_n - H_n'}{i} f$	H	
1(RN)	25.6	753.2mm	25.7	752.2	11.66m	2.1mm	+24.49m	55.00m	o	55.00m
2	25.8	751.1	26.2	749.8	11.88	2.5	+29.70	79.49	-0.46m	79.03m
3	26.0	748.0	26.1	745.8	11.78	5.5	+64.70	109.19	-0.69	108.50m
4	25.6	743.1	24.4	741.1	11.80	4.1	+48.38	173.98	-0.92	173.06m
5	23.3	739.0	23.0	737.3	11.83	3.4	+40.22	222.36	-1.38	221.98m
6(marco)	24.5	735.0						262.58	-1.84	260.74m
					11,79m	17,6(ε)	207,53			
ALTITUDE DO MARCO — <i>Niv. Geom.</i> (260,74)					(1)11,79 (média)	(2)				
Erro $\epsilon = + 1,84$ m i (ascensão) = 2 h ou 120 minutos.					11,79 × 17,6 =	$\Delta(\epsilon) = -1,533 \times 30m = -0,46m$				
Erro por minuto: $- 1,84$ m/120' = $- 1,533$ cm					= 207,50	etc.				
					+55,00					
					262,50					

Procuramos dar à planilha bastante clareza, razão porque só mostraremos a interpolação do primeiro desnível ou grau barométrico.

Entre os pontos ou vértices 1 e 2, a temperatura e pressão médias são:

$$t_m = 25.7 \quad \text{e} \quad B_m = 752.2$$

Da tabela de Jordan, tiramos:

para pressão 750 mm e temperatura 25°: $h_1 = 11.67$ m

para pressão 755 mm e temperatura 25°: $h_1 = 11.59$

para pressão 750 mm e temperatura 26°: $h_1 = 11.70$

para pressão 755 mm e temperatura 26°: $h_1 = 11.63$

Interpolando, achamos para os valores dados: $h_1 = 11.66$ m.

a) erro provável médio Δh de uma altura h , medida com barômetro.

Jordan, estudando o assunto, deduziu uma fórmula dos diversos erros contidos em um nivelamento barométrico, condensada na expressão simples abaixo:

$$\Delta h = \pm \sqrt{2,42 + 0,00001343 \cdot h^2}$$

e dá diversos valores dos erros em função dos desníveis:

para $h = 100$ m. . . .	$h = \pm 1,6$ m	para $h = 800$ m. . . .	$h = \pm 3,3$ m
200	1,7	900	3,6
300	1,9	1000	4,0
400	2,1	2000	7,3
500	2,4	3000	11,1
600	2,7	4000	14,7
700	3,0	5000	18,9
		6000	22,0

As horas do dia influem sobre os resultados dos nivelamentos e o emprego dos aneróides está sujeito a maiores erros, razão que justifica o emprego dos bons aneróides de precisão para reconhecimentos de estradas e outros trabalhos que exigem determinações bem aproximadas e rápidas; a aferição e conhecimento prático de cada aparelho é indispensável e o número deles deve ser no mínimo de dois para as devidas comparações e obtenção de valores médios.

Segunda Parte – TOPOLOGIA

§ 29 – Generalidades. Modelado topográfico. Formas de terreno

128 – a) Definições

De início, dissemos que a *Topografia* propriamente dita compreende: a *Topometria*, ou ciência de medir no terreno os elementos necessários à feitura da *carta* ou *planta*, compreendendo tanto a parte *planimétrica*, como a *altimétrica*; e o *Desenho Topográfico*, ou a arte de construir com precisão uma planta que corresponda fielmente ao levantamento feito, com todos os detalhes existentes na data do trabalho de campo.

Para corresponder a esse desideratum, torna-se, ainda, necessário reunir o conhecimento de outra ordem de assunto indispensável a um bom e criterioso trabalho topográfico, que é o da *Topologia*.

Assim como um pintor ou escultor, na reprodução do corpo humano, precisa conhecer anatomia, um topógrafo não pode prescindir da *anatomia* do terreno, cuja carta expressiva deve obter, isto é, do estudo das formas e leis que regem o modelado, e que constitui a parte descritiva ou anatômica, chamada *Topologia*.

Assim, um bom trabalho topográfico deve compreender três partes distintas, a saber:

- 1.^a – *Topometria*: parte matemática;
- 2.^a – *Topologia*: parte interpretativa;
- 3.^a – *Desenho topográfico*: parte artística.

Em rigor, a Topologia deve preceder as outras duas, pelo auxílio valioso que prestará ao operador na execução mais rápida e precisa do levantamento no terreno, e, também, no desenho posterior da planta.

Sua primordial atenção é para o estudo das formas exteriores da superfície da *Terra* e das leis que regem seu modelado.

Com efeito, se um operador se encontra no terreno com o objetivo de representar por um desenho as formas que o cercam apenas terá como recurso o que lhe fornece a vista.

Esta operação visual está sujeita a erros, somente controlados por outros pontos de apoio, distribuídos por toda a figura a levantar. A superfície do terreno não é porém arbitrária, obedecendo a leis naturais, muitas das quais podemos conhecer. Orientado por essas leis, pode

o topógrafo desenhar com facilidade a forma, utilizando-se de um número *bem restrito* de pontos de apoio. No estudo e *exploração* de estradas é de grande valia essa colaboração na redução do número de pontos de apoio, em economia de tempo e de trabalho para uma execução rápida e precisa dos *reconhecimentos*.

b) *Origem e forma da terra*. A primeira teoria formulada para explicar a conformação do nosso sistema solar e, portanto, da terra, deve-se a Emmanuel Kant, em 1755. Outras se seguiram, mas a mais aceita foi a fórmula dada por Laplace, de que o sistema solar foi, na sua origem, uma única massa em estado de nebulosa, constituída de gases e vapores, e animada de um movimento de rotação. Com as perdas contínuas de calor, essa massa foi se resfriando pouco a pouco, com a condensação de sua parte central ou núcleo, origem do sol. Com a condensação houve um aumento de velocidade da massa e, conseqüentemente, a formação de anéis, destacados do núcleo e que continuaram a girar em torno dele. Com a continuação do resfriamento, fragmentaram-se tais anéis e, continuando a girar em torno do núcleo central, adquiriram forma arredondada. E assim justificou Laplace a formação da terra, e Flammarion, mais tarde, a dos milhões de sistemas planetários, que povoam o universo.

Svante Arrhenius, na sua "L'Evolution des Mondes", contradiz em parte esta teoria que foi, durante muito tempo "La perle des spéculations cosmogoniques", a base das concepções de Herschel sobre o desenvolvimento das nebulosas estelares, de Kant, da descoberta da indestrutibilidade da energia, as conclusões de Clausius sobre a morte calorífica e suas próprias conclusões sobre a existência do universo tal qual é, desde os tempos mais remotos, sendo que a matéria, a energia e a vida não mudam senão de forma e lugar no espaço.

c) *Modelado estrutural. Erosão. Modelado escultural ou topográfico*. A *crosta terrestre*, em contínuos deslocamentos, devidos à ação de causas internas, tomou de início uma forma irregular, cheia de depressões e de elevações, sem formas definidas, constituindo a superfície estrutural da terra — aspecto geral primitivo do globo terráqueo.

Se as formas do terreno fossem devidas a essa causa única seriam muito diferentes das que vemos atualmente; outros fenômenos, tais como as chuvas, escaldantes a princípio e torrenciais depois, produzidas pela condensação atmosférica, o *vento*, o *calor solar*, o *frio intenso* e outros fatores, concorreram com a sua ação mecânica e química para desagregar os acidentés elevados e arrastá-los para as baixadas.

A ação desses agentes de ordem externa, classificados como de *erosão*, deve-se a transformação da superfície *estrutural* em superfície *escultural*, ou *modelado topográfico*.

A ação da *erosão* se exerce de maneira dupla; de um lado, desbastando as saliências e rompendo os diques, que se opunham aos efeitos

da gravidade, e de outro, formando pouco a pouco os terrenos *sedimentares*. Estes poderão ser *locais*, quando formados no próprio local, com terras da mesma natureza que as dos terrenos circunvizinhos; e as de *aluvião*, quando resultantes de depósitos dos produtos de outras regiões, o que se reconhece pela natureza de suas terras diferir das rochas do local em que se formam.

As águas em qualquer estado — *sólido, líquido ou gasoso* — e, principalmente, as *águas correntes* é que pode ser atribuída a forma atual da superfície terrestre.

Há um princípio em *Hidrologia*, que deve aqui ser lembrado: toda a água que cai sobre o solo, abstração feita da que se evapora ou se infiltra, vai ter ao mar, por mais afastado que esteja o litoral do ponto de partida e por mais fraca que seja a declividade do terreno na região percorrida, donde a observação da perfeita *continuidade dos declives*.

As sucessivas modificações de *declividades*, que vem se observando através dos séculos, não são mais do que as ações *química e mecânica* de *erosão* das águas, as primeiras subterrâneas e as segundas sobre a superfície topográfica.

d) *Definições geográficas do terreno*. Chamam-se *vertentes esquerda e direita* de um vale, as que ficam à não esquerda e direita respectivamente do observador colocado com a frente para a foz do curso d'água.

Bacia é a zona limitada pelo divisor de águas que as separe para um e outro vale; na (Fig. 304) está hachureada a zona de uma bacia e de um thalweg secundário.

Chama-se *quebrada* um thalweg apertado entre duas vertentes íngremes; são vales nos quais os traçados rodoviários são extremamente difíceis.

Cabeceiras ou mananciais, em contraposição, são alargamentos dos vales, nos quais nascem em geral os cursos d'água; são zonas paludosas (*pantanosas*).

Sangas, enfim, são erosões produzidas pelo escoamento das águas pluviais.

Chamam-se *contrafortes* as saliências do terreno que se destacam da serra principal, formando os vales secundários ou laterais e *espigões* as ramificações ou saliências destes contrafortes; aos espigões correspondem os vales terciários.

Chama-se *flancos* ou *vertentes* de um acidente orográfico (relevo altimétrico) toda a superfície compreendida entre a linha do vértice e a da base. *Dorso* é propriamente a linha de intersecção de dois flancos de um contraforte ou espigão; é a linha segundo a qual as águas

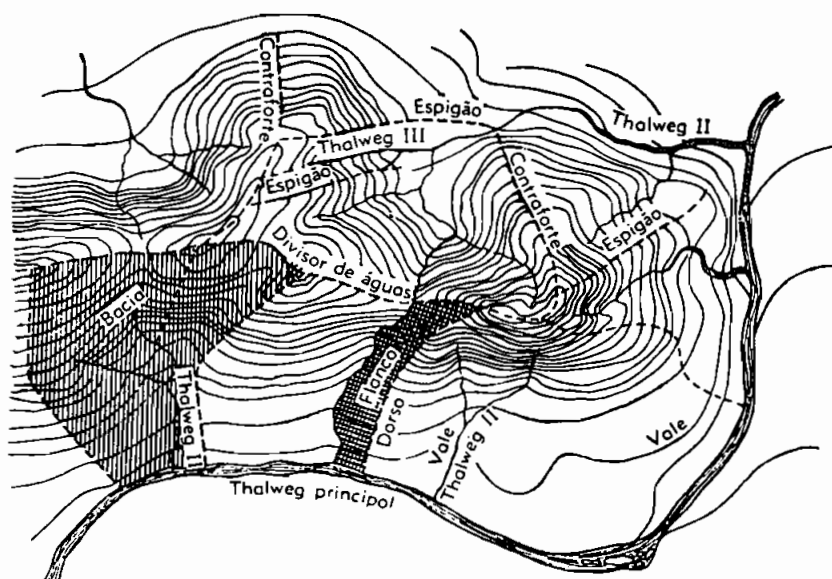


FIG. 304

se dividem para uma e outra vertente, pelo que é também chamada de *divisor de águas* ou *cumiada*.

Chama-se *vale* a superfície formada pela reunião de duas vertentes opostas e *thalweg* ou *alveo* a intersecção destas mesmas vertentes; por elles se escoam as águas reunidas nos vales. O *thalweg* é formado pelo seguimento dos pontos mais baixos de um vale; o divisor d'águas pelo dos pontos mais elevados.

Chama-se *garganta* o ponto em que a linha do divisor d'águas sofre maior depressão: é evidentemente quanto aos dois *thalwegs*, que nascem, o ponto mais alto, e em relação ao divisor d'águas, o mais baixo, como vemos na (Fig. 305).

Detalhes. Sob a ação dos agentes internos e externos, formam-se na terra numerosas protuberâncias separadas entre si por depressões chamadas vales. As montanhas, em conjunto, se apresentam como longas arestas, donde partem, à direita e à esquerda, planos inclinados, formando ângulos diedros. As arestas se denominam *linha de fé* ou *crista das cadeias*, e os planos inclinados se chamam vertentes. A depressão compreendida entre vertentes de duas cadeias vizinhas, isto é, o espaço $A'B_1$ e $A'B'_1$, constitui um vale propriamente dito do qual os planos $A'B_1$ e $A'B'_1$ são os flancos, e a linha de encontro destes planos, a linha $B'B_1$, o *thalweg* (caminho do vale).

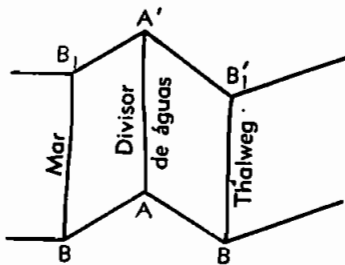


FIG. 305

As vertentes não são planas, mas sim sulcadas de depressões cavadas numa direção quase perpendicular à direção geral da cadeia, denominada vale secundário, cada um com seu thalweg e seus dois flancos, separados uns dos outros pelas cristas ou divisores de água secundários. Tanto os thalwegs como os divisores de águas secundários participam da declividade da vertente de que fazem parte. Formam-se, assim, novas protuberâncias que se destacam quase perpendicularmente da primeira, e que se chamam de contrafortes, dos quais, semelhantemente, se destacam formas idênticas denominadas espigões.

Na realidade, a natureza não apresenta formas poliédricas mas arredondadas; as pontas agudas são arredondadas, os ângulos substituídos por curvas; os thalwegs e os divisores de águas secundários não se destacam perpendicularmente do divisor de águas principal: tomam direções mais ou menos oblíquas; os divisores de águas não são rotas mas apresentam sinuosidades em planta e em elevação.

As sinuosidades das linhas dos divisores de águas, nas grandes elevações apresentam interesse capital sob o ponto de vista do estudo do traçado das estradas (Fig. 306).

As sinuosidades das linhas dos divisores de águas, nas grandes elevações apresentam interesse capital sob o ponto de vista do estudo do traçado das estradas (Fig. 306).

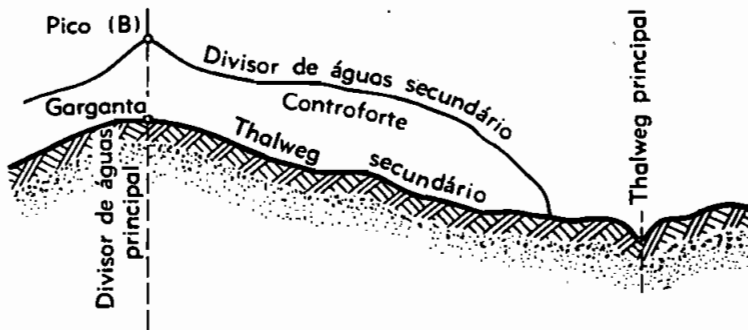


FIG. 306

129 - Formas gerais do modelado topográfico

Examinando em conjunto as formas que constituem o modelado atual da superfície da terra, classificá-las-emos em *elevações e depressões*. Para auxiliar o seu estudo, tornou-se necessária a criação de um modo claro de representá-las graficamente o que se conseguiu pelas

projeções horizontais das linhas resultantes das secções feitas por planos horizontais eqüidistantes entre si. Por este processo de representação plana do relevo do solo, as curvas resultantes desses seccionamentos, denominadas *curvas de nível*, apresentam-se encaixadas umas nas outras; e conforme se tratar de elevação ou depressão, as de cotas menores serão envolventes ou envolvidas.

As formas que constituem os acidentes do terreno se classificam em: formas simples ou elementares e formas compostas ou derivadas.

a) *Formas simples ou fundamentais.* Duas são as formas fundamentais dos acidentes topográficos: o *tergo* e o *vale*, das quais se derivam todas as outras formas existentes na superfície da Terra.

Ambas podem ser assemelhadas a ângulos diedros dispostos com a aresta inclinada.

Supondo esses acidentes cortados por planos secantes horizontais eqüidistantes, teremos, para sua representação teórica em um plano horizontal a representação da (Fig. 307).

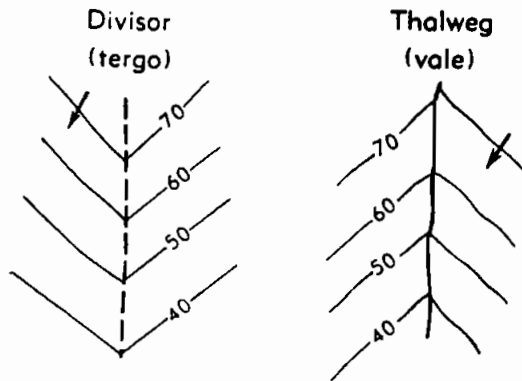


FIG. 307

Na natureza, porém, as superfícies não são rigorosamente planas e sim arredondadas e as curvas de nível não são retas, mas sim curvas que não se encontram segundo um ângulo vivo, mas segundo uma curvatura mais ou menos fechada (Fig. 308).

Nos tergos e nos vales as superfícies laterais que os formam e as linhas divisoras de águas segundo as quais se encontram, têm as denominações de vertentes e divisores de água, na primeira forma, e de flancos e linha de thalweg na segunda.

Os flancos e as vertentes se confundem, pois as superfícies são prolongamentos umas das outras, e as linhas acima são linhas de dupla curvatura.

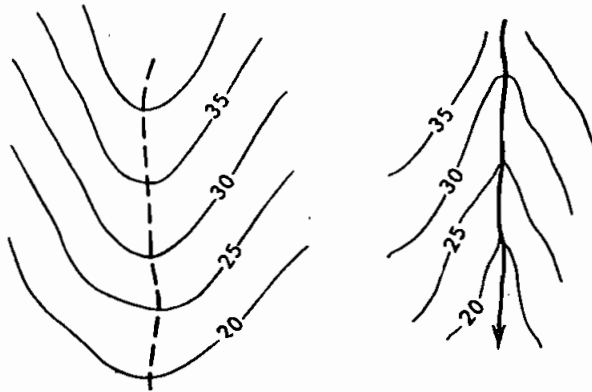


FIG. 308

b) Meios de distinção entre um tergo e um vale. Ambos se apresentam como um V de vértices arredondados mas se distinguem pela posição relativa das curvas de nível cotadas. No tergo, as curvas de cotas menores envolvem as maiores; no vale acontece o contrário. Também se ligarmos por uma reta dois pontos de uma curva situados em vertentes ou flancos opostos, se esta reta cortar curvas de cotas maiores, teremos um tergo, caso contrário um vale. Se as curvas não são cotadas, não é possível fazer a distinção, a menos que haja um curso d'água, como indicam as figuras que se seguem (309) e (310).

c) Linhas importantes do terreno. Entre as linhas mais importantes do terreno, destacam-se o divisor de águas e a linha de thalweg; a

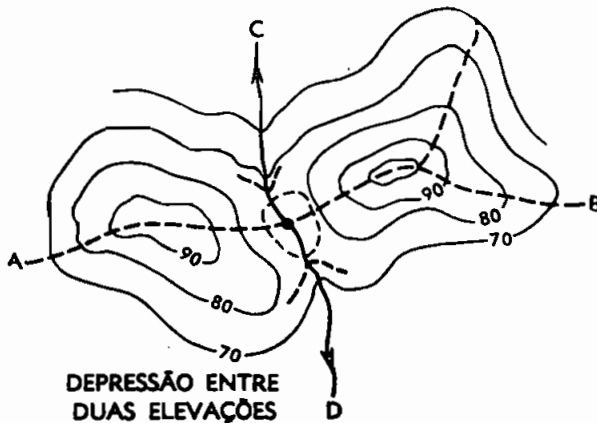
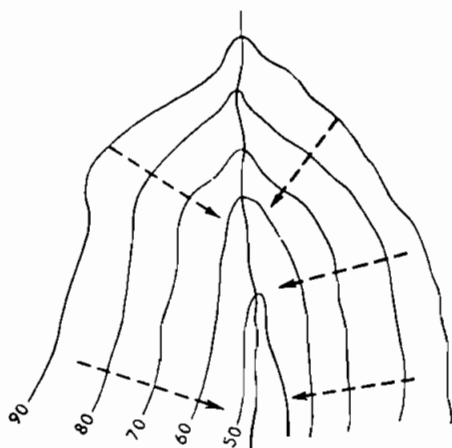


FIG. 309



DEPRESSÃO E VALE

FIG. 310

primeira por ser aquela segundo a qual se encontram duas vertentes, isto é, a linha divisória das águas pluviais que sobre ela caem; a segunda por ser a linha de encontro de dois flancos, a linha coletora por onde escoam as águas que descem das vertentes das elevações.

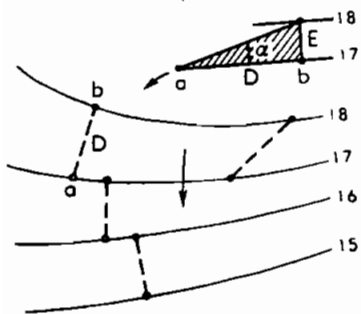


FIG. 311

d) *Declividades do terreno.* A declividade de um terreno é medida por:

$$\frac{E}{D} = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{Fig. 311}), \text{ em que } E \text{ é a}$$

eqüidistância natural entre as curvas de nível e D é o afastamento natural entre duas curvas de nível consecutivas. A linha de maior declive é dada pela menor distância entre as duas curvas, isto é, pela perpendicular comum.

Assim, quanto menor for o afastamento das curvas de nível representativas do acidente, tanto maior será a declividade do terreno entre elas compreendido.

As linhas de mudança de declividade são as linhas do terreno em que a superfície experimenta uma mudança brusca de declividade.

São elas, pois, a intersecção de duas superfícies que se seguem imediatamente com declividades diferentes, no mesmo sentido.

Os pontos *C* e *C'* (Fig. 312) são os pontos de mudança de declive. As linhas resultantes do encontro dessas vertentes de declividades diferentes são as linhas de mudança de declividade ou *cristas topográficas*.

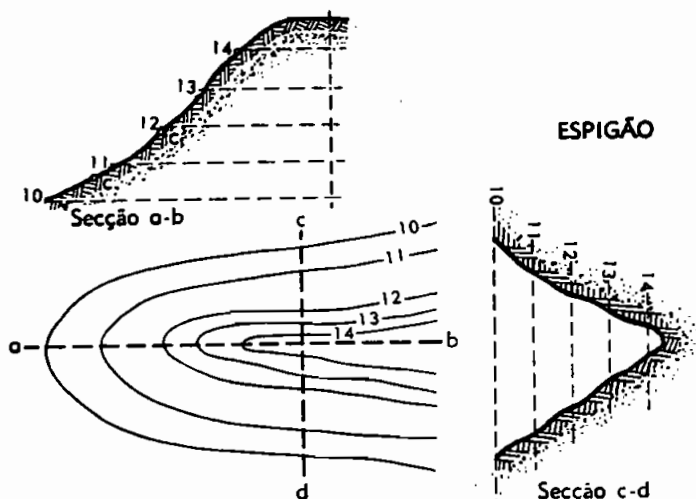


FIG 312

A declividade de um curso d'água ou de uma linha de thalweg cresce da jusante para o montante; seria um curso d'água cujo thalweg ainda não tivesse atingido o perfil de equilíbrio.

O afastamento é cada vez maior, o mesmo acontecendo com os pontos de intersecção das curvas de nível com o thalweg, à medida que desce para a jusante.

Um rio navegável, raramente, apresenta uma declividade superior a 6 ou 8 por 10.000. Em geral é de 0,5 a 2 por 10.000. A declividade das ravinas secundárias que sulcam as vertentes pode ser mais forte. Nas sinuosidades dum curso d'água (meandros), as declividades exteriores às curvas se apresentam sempre superiores às declividades interiores.

e) *Formas compostas: elevações e depressões.* *Elevações* são acidentes do terreno, resultantes da justaposição de dois ou mais tergos. A forma típica é a do *mamelão*. A parte superior das elevações pode terminar em pico, zimbório, aresta ou planura.

Depressões são acidentes constituídos de formas resultantes da justaposição de dois ou mais vales, formando bacias.

Da combinação de vários vales resultam formas diversas que podem apresentar em seus planos várias rugosidades com as formas de tergo (Fig. 313).

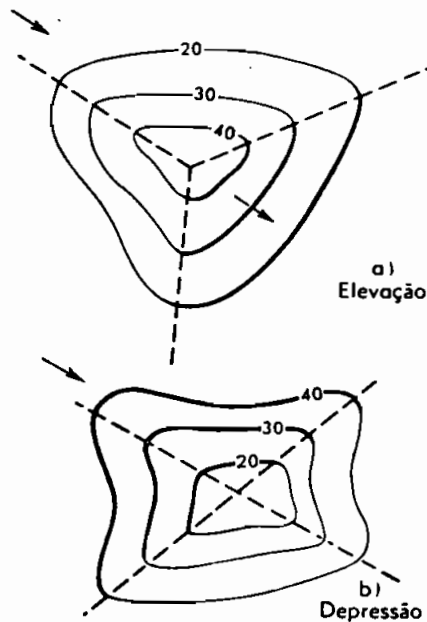


FIG. 313

O *colo* ou *garganta* é a resultante da combinação de dois tergos e dois vales ou simplesmente de dois tergos, que, com as convexidades voltadas uma para a outra, se combinam dando nascimento a dois vales laterais.

Os traços das vertentes dos dois tergos são os thalwegs dos vales assim formados.

As linhas de ligação dos thalwegs TCT_1 (Fig. 314) e dos divisores de águas FCF_1 se cruzam no ponto C da nova forma de terreno, denominada *colo*. Este ponto se chama também *quebrada* ou ainda *garganta* porque aí as linhas de thalwegs e dos divisores de águas se curvam fortemente mudando de sentido. A forma da (Fig. 314-a) é mais comum. No entanto encontramos colos com um só vale lateral oposto à vertente não deprimida, como mostra a (Fig. 314-b).

O aproveitamento destas formas de terreno no estudo das vias de comunicação é de importância capital, pois facilita a travessia do divisor de águas, quando se deseja passar de uma vertente para a outra, com fraca declividade.

f) *Nomenclatura das formas de terreno. Vales e dorsos.* As definições dos principais acidentes orográficos, cuja representação cartográfica

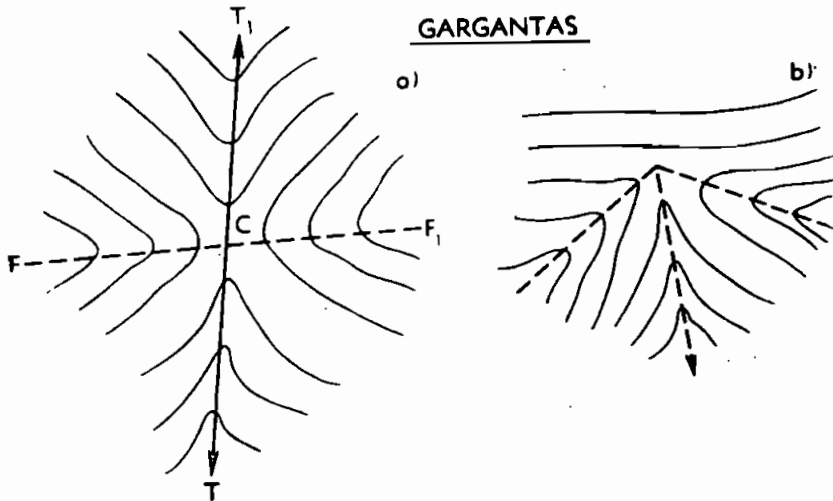


FIG. 314

fica interessa à Topografia, podem ser assim resumidas:

Elevações:

Cordilheira — Grande cadeia de montanhas de elevadas altitudes, donde partem os *contrafortes* secundários e, destes, os *espigões*.

Serra — Cadeia de montanhas de forma muito alongada, cuja parte mais elevada apresenta-se como dentes de serra.

Montanha — termo genérico que exprime um aglomerado de elevações de formas e naturezas diferentes, unidas entre si numa extensão considerável, em que o comprimento sempre excede à largura; alturas superiores a 400 m.

Cimo ou **cabeço** — É a parte mais elevada de uma montanha. Quando é menos arredondada, chama-se *pico*. Tem o nome de *agulha*, quando é pontiaguda. *Pico* da Tijuca, no Rio de Janeiro, por exemplo, Escola Militar das *Agulhas Negras*, em Rezende, etc.

Maçiços — Grandes aglomerados de montanhas ou montes em torno de um ponto culminante central.

Colina — Menos elevada que a montanha, de forma alongada, com declives menos pronunciados, e em geral coberta de vegetação. Alturas entre 200 a 400 metros.

Monte — Elevação de forma variável, às vezes abrupta, com pouca vegetação na parte superior. Altura de 200 a 300 metros.

Morro — Elevação semelhante ao monte, mas de menor altura (entre 100 e 200 m).

Mamelão — De forma arredondada, mais ou menos cônica nos flancos e aproximadamente esférica, no vértice. É a forma mais regular dentre todas as elevações (100 a 200 m); são muito comuns ao sul de Minas Gerais, em virtude de serem os terrenos mais antigos do mundo, na opinião do sábio Dr. Lund.

Outeiro — Elevação isolada em forma de colina, nas planícies ou planalto.

Cerro, montículo — Elevação penhascosa ou coberta de vegetação, de cerca de 100 metros.

Chapadão — Elevação extensa e achatada, de contorno arredondado, algumas angulosas por um lado e outras alongadas em ramificações.

Coxilha — Elevação de terreno, bastante alongada, de suaves declives e de alturas variáveis de 50 a 100 m. Comum na campanha e no planalto do Rio Grande do Sul. Correspondem aproximadamente aos *tabuleiros* dos Estados do Nordeste e às *lombas* de Mato Grosso.

Dobra — Elevação alongada como a coxilha, mas cuja altura não vai ordinariamente além de 20 metros (Rio Grande do Sul).

Depressões:

Garganta — É a parte mais baixa de um divisor de águas e por onde passam as rodovias ou estradas de ferro, que ligam as planícies aos planaltos.

Brecha — É uma garganta bastante estreita e profunda.

Cañon — Garganta estreita e profundíssima, produzida pelo trabalho de erosão das águas correntes. Exemplo muito conhecido é o do famoso *Cañon* do rio Colorado, nos Estados Unidos, com mais de 1 000 metros de profundidade.

Planalto, — Vasta extensão de terreno, mais ou menos plana, situada no interior dos continentes, às vezes a mais de 1 000 metros acima do nível do mar, como o dos *Campos Gerais*, no Estado do Paraná.

Planície — Vasta extensão de terreno, bastante plana, próximo ao mar.

Vale — Grande depressão de terreno, situada entre montes ou montanhas.

Valado — Depressão entre elevações de pequeno porte.

Circo — Depressão circular, vasta e profunda.

Ravina — Depressão entre montanhas de flancos escarpados.

Cuba — Depressão circular, pouco extensa.

Os *vales* são de forma côncava (Fig. 315-a), *ravina* (Fig. 315-b) e *fundo chato* (Fig. 315-c). Os de forma normal (côncavo) têm secção parabólica, com a concavidade voltada para cima.

Os de fundo chato têm a secção modificada pelos depósitos. O vale de ravina, quando muito estreito e profundo com os flancos de forte

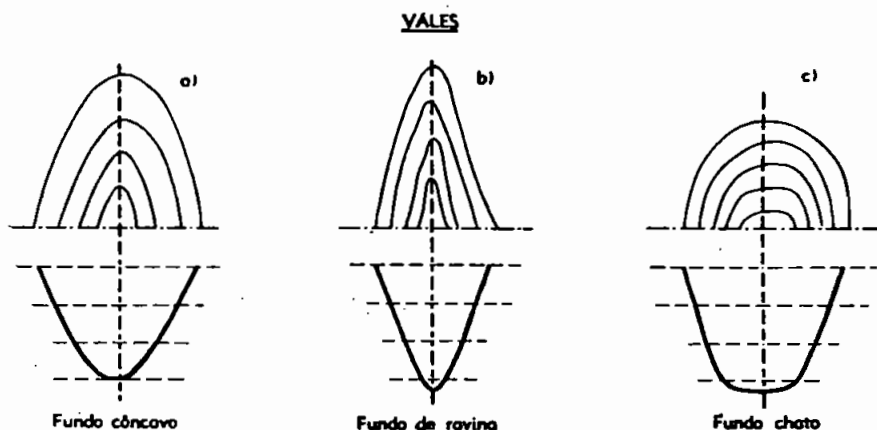


FIG. 315

declividade e secção transversal em V. Os divisores de água (dorsos) podem ser:

Alongados (Fig. 316-a)

de forma plana (Fig. 316-b)

arredondada (Fig. 316-c)

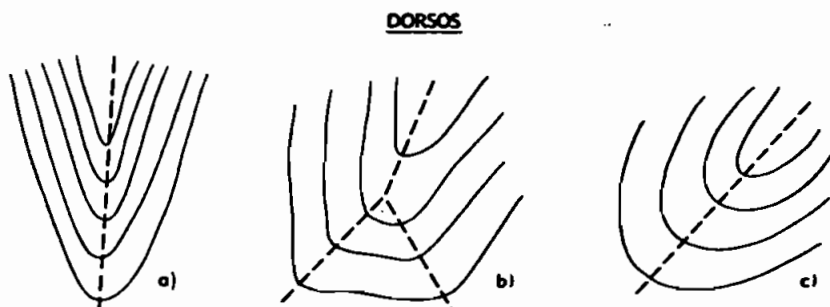


FIG. 316

§ 30 – Representação do relevo orográfico

130 – Desenho plani e altimétrico de uma planta

Com o estudo até aqui feito da planimetria e altimetria, dispõe o topógrafo de recursos para desenhar uma carta topográfica de uma parcela da superfície terrestre, com todos os detalhes naturais e artificiais do terreno.

Acidentes naturais encontram-se na hidrografia, nas elevações e depressões do terreno e na vegetação. Objetos artificiais são as habitações em suas variadas formas, vias de comunicação, pontes, divisas e muitos objetos isolados.

Em escalas grandes os detalhes podem ser representados em verdadeira grandeza, e, em escalas médias ou pequenas, usando as convenções cartográficas. A questão mais importante para o topógrafo é a do traçado sobre a carta das *curvas horizontais* que devem representar as formas do terreno levantado. Essas curvas horizontais, chamadas curvas de nível, podem ser obtidas, quer *diretamente*, quer por *interpolação*. O primeiro método é mais moroso, pois cada curva deve ser amarrada planimetricamente por pontos, mas resulta mais exato em seu conjunto. O segundo método, menos preciso, porém mais cômodo e rápido, tem maior aplicação; desde que haja bastante critério na escolha dos pontos no terreno e na indicação dos esquemas de campo, os resultados também são satisfatórios.

Para facilitar o desenho de uma planta topográfica convém geralmente traçar um *reticulado de coordenadas planas*, com malhas anplas de 4 cm, por exemplo, ou de 1 dm \times 1 dm.

Traçadas e verificadas todas as poligonais de apoio do levantamento feito, inicia-se a marcação de todo o detalhe planimétrico, que deve ter pontos superabundantes de verificação e amarração.

É aconselhável, antes de passar ao relevo altimétrico, cobrir com tinta, nas cores convencionais, as poligonais auxiliares e os detalhes planimétricos.

a) *Planos cotados e seu emprego.* A forma mais simples de representar a altimetria é o *plano cotado*, no qual as projeções dos pontos característicos do terreno têm a seu lado as respectivas cotas, referidas a um *datum* arbitrário, ou *cotas-altitudes*, referidas ao nível do mar (Fig. 317). Os planos cotados, assim *definidos*, podem ser o resultado de um levantamento planimétrico (a teodolito) e altimétrico (a nível) ou taqueométrico com nível ou taqueômetro, resultando num levantamento indireto do terreno.

Se o número de pontos for suficiente, a orografia do terreno ficará bem caracterizada e poderá ainda, para proporcionar uma idéia mais clara do conjunto do terreno, ser preenchida com *curvas de nível* principais.

A *representação das formas de terreno por meio das curvas de nível baseadas nos planos cotados* é a mais apropriada para as necessidades do engenheiro. As cotas dos pontos junto às fundações de um edifício permitem maior aproximação do volume a prever nas escavações. Nas lavouras de arroz, por exemplo, em que há necessidade de traçar curvas de 20 em 20 cm de equidistância, o processo é aconselhável pela como-

didade e exatidão resultantes. Todos os agrimensores, que devem marcar posição de taipas, condutos e esgotos dos diversos quarteirões de uma lavoura, com o auxílio de um nível de luneta retificado e de duas miras apoiadas num reticulado implantado *a priori* no terreno por um bom capataz e peões, com trenas e balizas, resolvem o problema com facilidade e rapidez. Para dar uma idéia do andamento dos trabalhos de levantamento e nivelamento, uma turma, composta de um agrimensor ou topógrafo, um capataz e seis peões, pode num dia levantar 200 Ha de terra, em terreno mais ou menos plano, nivelando pontos de 30×50 m, com 8 horas de efetivo trabalho.

b) *Curvas de nível e linhas de maior declive.* A partir do começo do século XVII é que a representação do relevo nas cartas topográficas surgiu com a aplicação da projeção vertical da Geometria Descritiva e da perspectiva cavaleira ou paralela.

Em meados do referido século, *Cassini de Thury*, na *Carta Geométrica de França*, na escala de 1:86400, representou o relevo do País, por certas convenções particulares, abandonando a perspectiva paralela. Segundo *Lespagnol* esta foi a primeira carta geográfica executada no mundo inteiro, digna desse nome.

As *curvas de nível*, também chamadas *curvas horizontais* ou *hipsométricas*, foram empregadas pela primeira vez em 1730 pelo engenheiro neerlandês *Cruquius* em traçados das curvas dos leitos dos rios (*linhas batimétricas*) e, também, logo a seguir, para o mesmo fim por *Felipe Buache*, em 1737.

Na representação do relevo terrestre, fora d'água, apresentou o engenheiro *Ducarla* à Academia de Ciências da França, pela primeira vez, um projeto de carta com curvas de nível, auxiliado pelo cartógrafo prático *Dupain* e que obteve o Primeiro Prêmio Nacional de 10 000 francos.

As linhas de maior declive (*declíneas*), cujo emprego em cartografia vem da primeira metade do século XVIII, têm por fim representar com maior clareza o relevo do terreno entre as curvas de nível. Para esse fim, consideram-se nos espaços que separam essas curvas, as respectivas *linhas de maior declive*, que são projetadas no plano horizontal de projeção, é obedecendo às seguintes prescrições:

- 1 — devem ser normais às curvas de nível que lhes correspondem;
- 2 — a grossura dos traços varia com o afastamento das mesmas — *grossas* nas curvas próximas e *finas* nas afastadas;
- 3 — as *declíneas*, também chamadas de "hachures", não devem ultrapassar as duas curvas correspondentes, nem ficar no prolongamento das precedentes;
- 4 — devem ser afastadas uma da outra da quarta parte de seu comprimento.

De acôrdo com as prescrições acima, nos declives suaves, as *declíneas* serão mais finas e mais afastadas, e nos declives fortes, as mesmas serão mais grossas e próximas.

Em trabalhos cartográficos do passado tal processo de completar o relevo, além de realçar a planta dava-lhe maior clareza, prestando-se a trabalhos artísticos de urbanização; não é hoje usado senão em detalhes e, assim mesmo, substituídas as declíneas por aguadas coloridas, em tons variáveis, do fraco ao forte, obtido este por várias demãos de tinta.

c) *Tipos de curvas de nível e seu traçado.* A curva horizontal ou *de nível* é a linha de intersecção obtida por planos paralelos, eqüidistantes, com o terreno a representar. Assim, nas (Figs. 317 e 318) são indicadas as duas projeções, horizontal e vertical, de um montículo isolado do terreno, e de uma escharpa rochosa no qual se vêem os planos zero, 10 m, 20 m, etc. e o traçado, em projeção horizontal, das respectivas curvas de nível. Como exemplo natural de uma *curva de nível*, pode

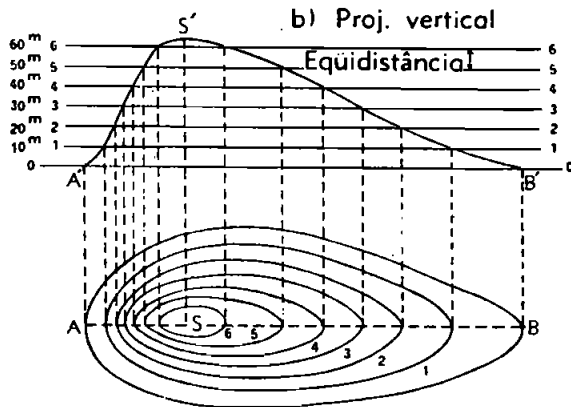
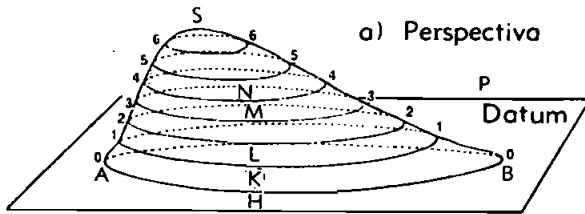


FIG. 317 FIG. 318

dar-se a linha, segundo a qual as águas tranqüilas de um lago encontram o terreno; a linha de contorno da água contida num depósito, ou num vaso, é também uma curva de nível. É inegável a vantagem de representar-se uma elevação ou depressão por meio dessas curvas.

Em uma dada porção de terreno, todos os pontos deste que tiverem a mesma cota pertencerão à mesma curva de nível, junto à qual bastará escrever o valor numérico da cota. As curvas de nível podem ser regulares ou irregulares, abertas ou fechadas, concêntricas ou não, tudo dependendo da forma da elevação ou depressão seccionada.

Existindo na natureza formas idênticas de elevação e depressão, é necessário, além de cotar todas as curvas, destacar, com *linhas de sombra*, mais reforçadas, as que ficam do lado da sombra, com luz a 45° noroeste.

1) *Interpolação das curvas por cálculo numérico.* Seja uma porção do terreno correspondente a uma vertente isolada de um vale, da qual foram determinadas, por nivelamento trigonométrico as cotas dos pontos *A* (37 m), *B* (28,5), *C* (26,6 m), etc. (Fig. 319). Traçar por cálculo as correspondentes curvas de nível.

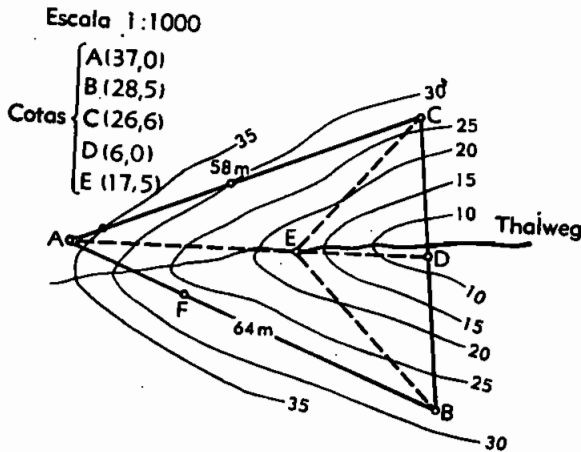


FIG. 319

Seja o alinhamento *AC*, com 58 m de comprimento, e declive

$$n = \operatorname{tg} \alpha = \frac{37 - 26,6}{58} = \frac{10,4}{58} = 0,18 = 18\%.$$

Para achar os pontos *a* e *b* (Fig. 320) de passagem das curvas de nível de cotas inteiras (35 e 30 m) procede-se assim (regra de três):

$$x_1 = n_1 / \operatorname{tg} \alpha = 2 / 0,18 = 11,1 \text{ m}$$

$$x_2 = n_2 / \operatorname{tg} \alpha = 7 / 0,18 = 38,9 \text{ m}$$

O *diapasão* ou afastamento para as curvas mestras, na hipótese de serem retos os alinhamentos entre os pontos, escolhidos e nivelados no terreno, se determina em função da declividade.

Para o nosso exemplo:

$$x = 5/0,18 = \frac{5 \times 100}{18} = 27,8 \text{ m}$$

Também

$$x = x_2 - x_1 = 38,9 - 11,1 = 27,8 \text{ m}$$

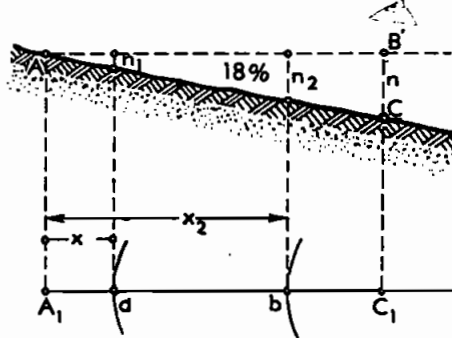


FIG. 320

Interpolando do mesmo modo para todos os alinhamentos, com a ligação dos pontos mais próximos, e unindo por curvas todos os pontos de cota igual, obedecendo ao esquema traçado no campo, determina-se a orografia ou relevo do terreno. Mais cômodo e rápido é recorrer à interpolação gráfica, de que trataremos a seguir.

2) *Interpolação gráfica com diagrama de paralelas*. Na (Fig. 321) é traçado um diagrama de linhas paralelas equidistantes, em papel transparente, correspondente a cotas de metro em metro.

São dadas na planta (Fig. 322) as cotas de dois pontos B e C, a saber:

$$H_B = 58,6 \quad H_C = 48,7$$

Trata-se de marcar graficamente os pontos de passagem X e Y, das cotas inteiras 50 e 55 respectivamente. O modo de proceder é o seguinte: No diagrama transparente, entre as paralelas correspondentes às cotas 48 e 49, marca-se o ponto C, de cota 48,7. Leva-se esse ponto do diagrama a coincidir com seu homólogo da planta e, por rotação, procura-se um novo ponto, à distância CB, de tal maneira que o ponto B se situe na cota 58,6 entre as paralelas 58 e 59.

As interseções X e Y, da reta (alinhamento) CB com as paralelas 50 e 55, podem ser decalcadas na planta, assinalando as posições das cotas 50 e 55 no alinhamento CB.

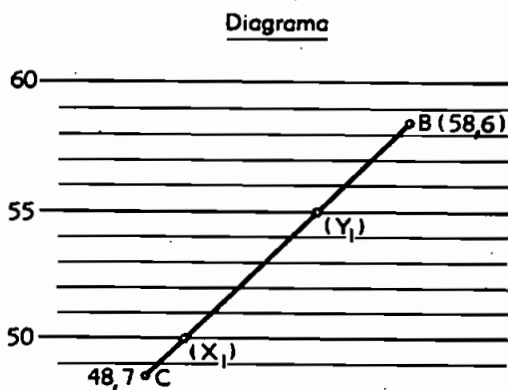


FIG. 321

Do mesmo modo serão determinados os pontos X e Y do alinhamento AB e de todos os outros traçados na planta.

As linhas inclinadas do diagrama são traçadas a lápis e apagadas quando desnecessárias. As verificações podem ser feitas a compasso de ponta seca, em lugar do decalque, embora este, feito com cuidado, não prejudique a marcação de todas as cotas inteiras.

Devemos ressaltar a necessidade de um bom esquema de campo com as linhas diretrizes do terreno. Os *divisores de água* são representados por linhas *grossas* e os *thalwegs* por linhas *finas* e pontilhadas.

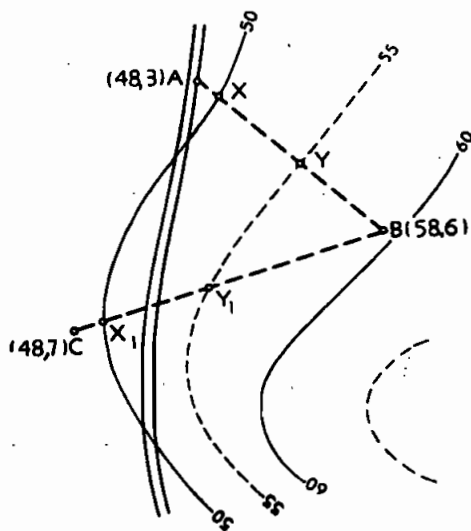


FIG. 322

Cada ponto nivelado num divisor de água terá um número, acompanhado da letra *d*, por exemplo, 5*d*, 6*d*, ... ou de um *t*, se for de um thalweg, por exemplo, 11*t*, 12*t*, etc.

Devem ser traçadas as curvas de nível principais, à mão livre e à vista do terreno, o que virá facilitar a tarefa do traçado definitivo das mesmias, o que exige do topógrafo prática e senso interpretativo do terreno. Não deve-se esquecer, que o terreno, variável de estação para estação, só é reconhecido, através de bons esquemas e criteriosas observações.

Uma das vantagens do levantamento fotogramétrico (levantamento topográfico, combinado com a fotografia) é que, em qualquer ocasião, o terreno estará à vista, para qualquer confronto e verificação.

3) *Interpolação gráfica, com diagrama reticulado (milimétrico)*. É um processo bastante prático para o traçado das curvas de nível. O diagrama (Fig. 323) empregado é um quadrado de papel milimetrado, de dimensão variável, de acordo com a escala da planta e afastamento

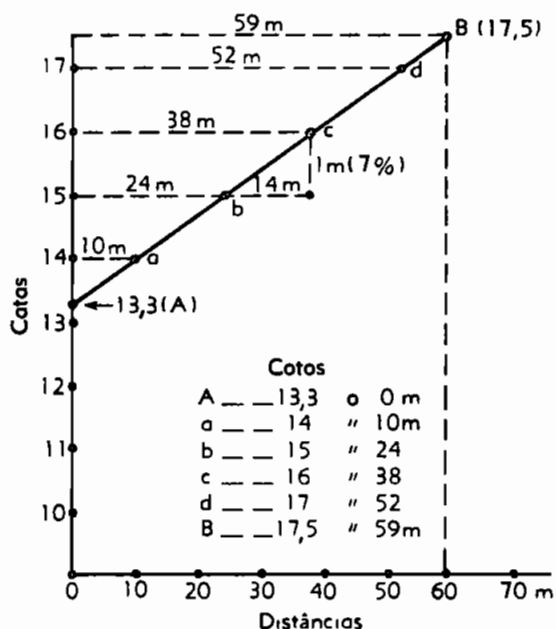


FIG. 323

dos pontos, mas em geral de 10×10 cm. Convém, como nos perfis, exagerar a escala vertical para maior aproximação.

Marcando, na linha de referência, à esquerda, por exemplo, a cota do ponto *A* (13,3) e à distância *horizontal* que separa o alinhamento

AB (59 m), a cota 17,5, facilmente obtém-se os pontos de passagem das cotas inteiras seguintes:

cotas:	14	15	16	17	m	padrão: 14 m (7%)
distâncias:	10	24	38	52	m	

Os traçados são feitos a lápis e cada quadrado permite a interpolação de muitos alinhamentos. Antes de ser iniciada a mesma, deve-se unir, dois a dois, os pontos levantados no terreno e marcados a transferidor e escala (ou com *goniógrafo* especial) na planta geral, com a inscrição ao lado de cada ponto da respectiva cota, com valor aproximado ao decímetro; por exemplo, em lugar da cota encontrada (13,27 m), constará o valor 13,3 m (Fig. 324).

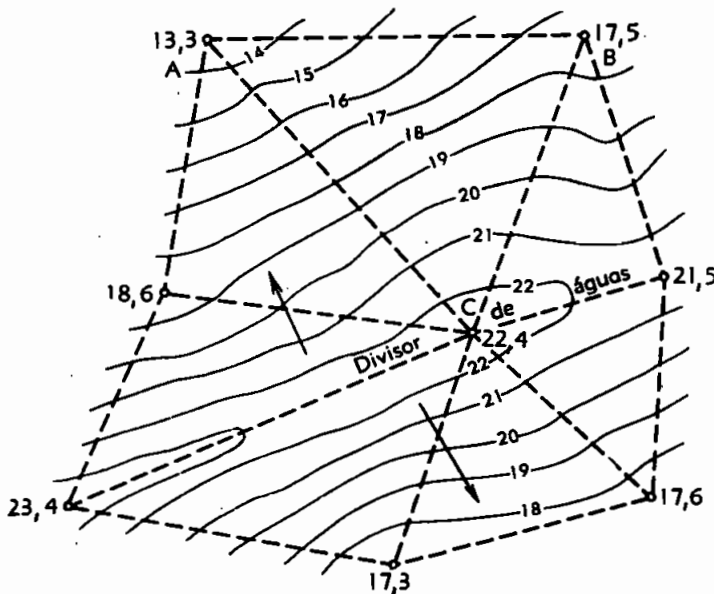


FIG. 324

A ligação dos pontos, formando uma triangulação auxiliar altimétrica, obedece à orientação dos pontos, assinalados no esquema de campo e, em geral, ligando os pontos mais próximos. Depois de preenchidas as malhas de cotas inteiras, segue-se a ligação dos pontos de mesma cota pelas curvas de nível. Essas curvas devem obedecer às regras dadas na Topologia. Devem ser ligeiramente modificadas, principalmente junto às estações, das distorções, devidas às cotas fracionárias. Acontece,

nas verificações, a eliminação de um ou outro ponto de cota errada e que alteraria o traçado.

A cobertura com sépia na planta em papel branco, a cores convencionais, ou a nanquin nas cópias em papel vegetal ou tela, deve ser feita com tiralinha especial de ponta móvel.

Para usá-lo com exatidão é preciso um pouco de prática, usando-o em papel à parte, e seguindo a técnica de segurá-lo levantado ou apoiado no papel, conforme a técnica do operador, percorrendo com cuidado as curvas de mesma cota, de extremo a extremo.

A indicação das cotas deve ser distribuída nos pontos iniciais e intermediários importantes, sem obedecer a orientações seguidas, e somente nas curvas mestras. As curvas mestras ou principais são feitas com traço médio e as intermediárias com traço fino.

4) *Interpolação com auxílio de perfis transversais.* Quando numa faixa de terreno, se projeta uma poligonal de contorno estaqueada e nivelada, bem como poligonais interiores, constrói-se perfis longitudinais que auxiliam muito a determinação das cotas inteiras nas poligonais, de grande importância para o traçado das curvas de nível na referida faixa, completadas por interpolação no interior das malhas.

Imaginemos o levantamento de um colo ou garganta e os respectivos thalwegs (Fig. 325).

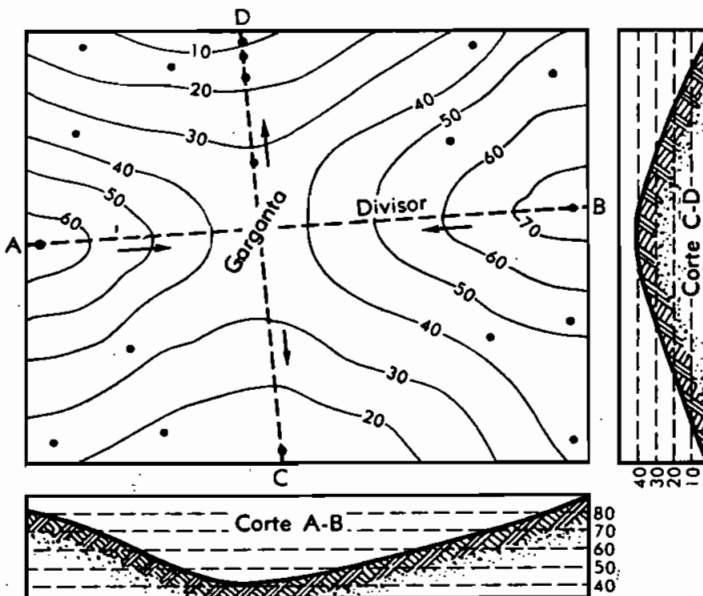


FIG. 325

Com um nível taqueométrico nivelamos todos os pontos de mudança de declive do terreno, numa secção ou perfil transversal, convexo, acompanhando o divisor de águas, representado na Figura pelo corte *AB*.

Do mesmo modo, procedemos para o traçado de outro perfil, côncavo, acompanhando o thalweg que se origina da garganta, mais ou menos normal ao divisor de águas, representado pelo corte *CD*.

Com esses dois perfis, podemos determinar os pontos de passagem das cotas inteiras: 20^m, 30^m, 40^m, etc., pelo simples traçado de paralelas.

Para o traçado das curvas de nível, ainda é necessário interpolar mais alguns pontos em cada canto do retângulo.

d) *Representação do relevo pelas declíneas (hachures)*. Em uma planta topográfica com curvas de nível (Fig. 326-a) pode-se determinar as *declíneas* ou linhas de maior declive e traçá-las entre as curvas de nível como indicado na (Fig. 326-b).

As declíneas substituem as curvas de nível e produzem uma impressão plástica de relevo do terreno. A iluminação direta a 45° no noroeste da planta, ressalta mais esse efeito plástico, ainda mais se combinado com aguadas coloridas. Planos de urbanização, com o emprego desta técnica, e com *critério estético* de um hábil cartógrafo ou desenhista, resultam mais valorizados e representativos.

e) *Representação do relevo pelos planos-relevo e pelo decalque*. A representação mais fiel da superfície terrestre seria uma figura semelhante, tanto na planimetria ou nos detalhes como na altimetria ou

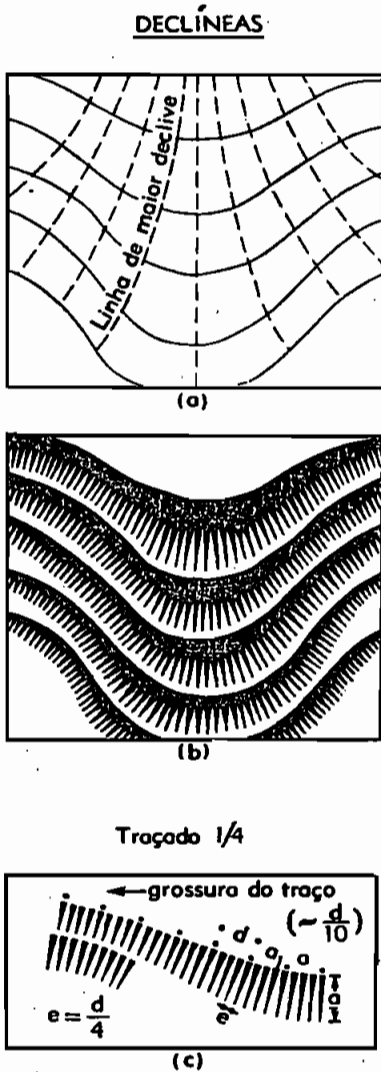


FIG. 326

no relevo. O resultado, tanto no plano, como no *espaço*, será uma figura geométrica semelhante ao terreno representado com suas três dimensões: comprimento, largura e altura.

Uma tal representação do terreno se chama uma *planta em relevo*.

As cartas topográficas sobre as quais o relevo do terreno é representado por curvas de nível permitem a todo topógrafo cuidadoso executar, de uma maneira relativamente fácil, e que não exige senão paciência, o relevo de uma região representada numa carta: é o que se chama *relevo em degraus*.

Escolhe-se uma prancha fina de madeira compensada e nela se desenha a curva de cota mais baixa da planta, cota zero, por exemplo.

Em cartolina, de espessura igual à equidistância gráfica, correspondente a 5 metros, por exemplo, e na escala da planta, recorta-se a curva de cota cinco e cola-se na de cota zero, na posição certa, e assim sucessivamente até a curva mais elevada, formando o relevo por degraus justapostos. Completa-se o plano relevo com o traçado a nanquin sobre as diferentes folhas coladas de cartolina de todo o detalhe planimétrico, o que vem dar realce ao trabalho. Um bom verniz, dado a pincel, completa o acabamento da planta. As árvores poderão ser representadas no plano, a côres, juntamente com outros detalhes.

A escala, letreiros, orientação e referências ainda devem ser figurados em destaque.

Quando o plano-relevo a executar é na mesma escala da planta, a cópia da curva de nível, bem como dos detalhes de cada plano, é feita pelo decalque, interpondo uma folha de plumbagina (transmissor) e

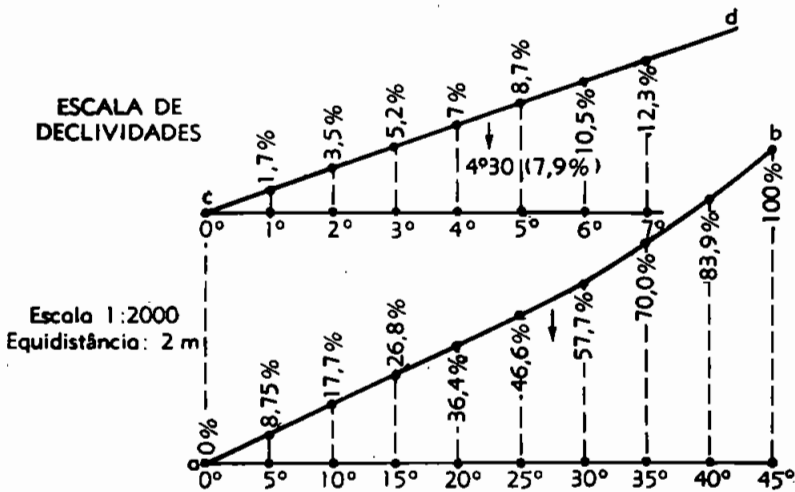


Fig. 327

usando lápis especial para percorrer os contornos, sem ofender o papel nem estragar o modelo.

Ainda é usada massa plástica ou gesso para modelar o terreno, previamente esboçado na prancheta e dando cópia em escala reduzida, *continua*, sem degraus, tal qual o terreno se apresenta na natureza.

A fragilidade do gesso faz com que tenha emprego restrito a modelos para ensino, laboratórios e museus.

Nos Estados Unidos é prensado em folhas de papel especiais, mapas em relevo plástico, de grande valor artístico, pela National Geographic Magazine, com riqueza de detalhes, coloridos, e com curvas de nível reduzidas em escala apropriada e para diversos fins.

f) *Construção e emprego das escalas de declividades.* Para facilitar a tarefa da interpolação das curvas de nível de cotas inteiras, ainda podem ser usados padrões de declividades, organizados à base de tabelas, para cada escala e para percentagens variáveis de declividades. Assim, na (Fig. 327), é dada a percentagem das rampas de 0° a 45° variando de 5 em 5 graus e, também de 0 a 7, variando de grau em

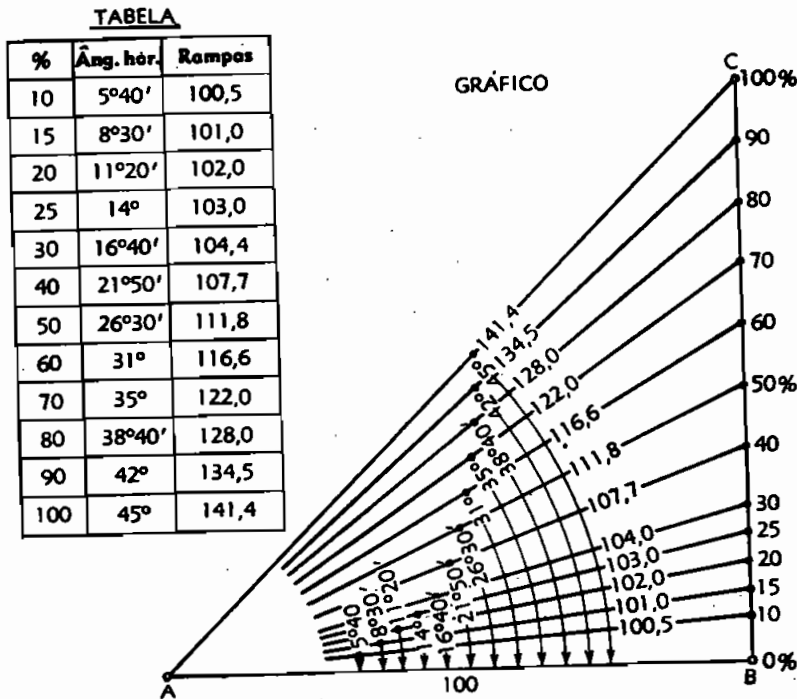


FIG. 328

grau. As percentagens são dadas por duas curvas *a-b* e *c-d* e podem ser obtidos outros valores por interpolação no gráfico. Para os valores inteiros em graus, como é óbvio, correspondem valores fracionários e para valores percentuais inteiros correspondem ângulos fracionários, como se vê na (Fig. 328). Vejamos em que consiste, como se constrói e usa uma escala de *declividades*.

Seu objeto é facilitar o conhecimento do declive do terreno compreendido entre duas curvas de nível sem necessidade de cálculo numérico, tomando por base a equidistância real ou gráfica.

Por meio da escala de declividades, podem-se também marcar os pontos de passagem das curvas de nível, cujos espaçamentos entre pontos de declives conhecidos são dados pela mesma escala, não sendo esses espaçamentos senão as projeções horizontais das linhas de maior declive.

Vejamos como se constrói uma escala dessa natureza, graduada de grau em grau, de 1 a 10°, e de 5 em 5°, de 10 a 25°, e na hipótese de uma planta na escala de 1/2 000, com curvas de nível de 2 em 2 metros.

Para cada escala e condições, é necessário calcular e desenhar uma escala de declividades correspondente. Nas cartas topográficas de um Estado, por exemplo, a escala poderá ser de 1/100 000 a 1/50 000 e a equidistância real de 50 ou 100 metros; nas de um Município 1/10 000 e 10 m de equidistância das curvas e que pode variar conforme se tratar de zona urbana, suburbana ou rural.

Para a escala aludida de 1/2 000 e curvas equidistantes de 2 metros, obteremos para uma inclinação qualquer:

$$d \text{ (declive)} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 4^{\circ}30' = 0,079 = 7,9\%$$

e o afastamento (*x*) para a equidistância de 2 m:

$$x = \frac{2 \text{ m}}{0,079} = 25,3 \text{ m (no terreno)}$$

e

$$x/2\,000 = \frac{25,3}{2\,000} = 12,65 \text{ mm (no desenho)}$$

Damos abaixo o cálculo feito para diversos valores de φ :

φ°	$\varphi(\%)$	valores de <i>x</i>	escala (1/2 000)
1°	1,7%	117,6 m	58,8 mm
2°	3,5%	57,1 m	28,6 mm
3°	5,2%	38,4 m	19,2 mm
4°	7 %	28,6 m	14,3 mm
5°	8,7%	23,0 m	11,5 mm

6°	10,5%	19,0 m	9,5 mm
7°	12,3%	16,2 m	8,1 mm
8°	14,1%	14,2 m	7,1 mm
9°	15,8%	12,6 m	6,3 mm
10°	17,6%	11,4 m	5,7 mm
15°	26,8%	7,5 m	3,7 mm
20°	36,4%	5,5 m	2,7 mm
25°	46,6%	4,3 m	2,1 mm

Assim, a *escala de declividades*, representada graficamente, seria a dada pela (Fig. 329).

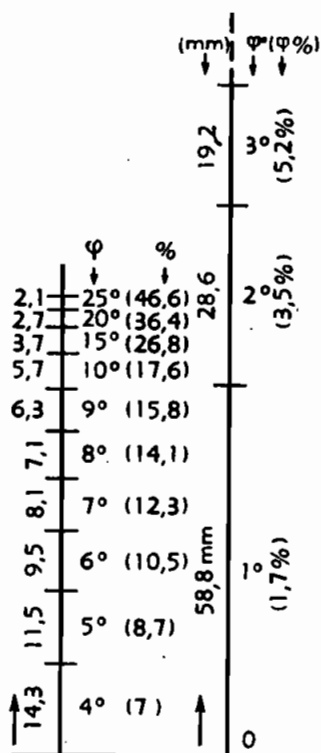


FIG. 329

Admitamos que se deva empregar essa escala para a determinação dos pontos de passagem das curvas de nível no seguinte alinhamento medido e nivelado (Fig. 330).

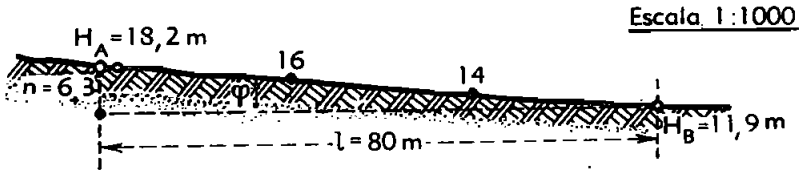


FIG. 330

Diferença de nível = 6,3 m

$$d = \frac{6,3}{80} = 0,07875 \text{ m}$$

$$\varphi^{\circ} = 4^{\circ}30'$$

$$\varphi\% = 7,9\% (d)$$

A declividade é obtida do *gráfico* com a correspondente equidistância gráfica da *escala*; assim obtemos:

$$e_t = 25,4 \text{ m (terreno)}$$

$$e_d = 12,7 \text{ mm (desenho)}$$

Escala: 1/2 000

Equidistância: 2 m

Com um compasso de ponta seca, pode-se marcar os afastamentos, a seguir

da cota 18,2 (A) a 18	1,3 mm	} padrão
da cota 18 a 16	12,7 mm	
da cota 16 a 14	12,7 mm	
da cota 14 a 12	12,7 mm	
da cota 12 a 11,9 (B)	0,6 mm	
	40,0 mm	

Com prática, as interpolações junto as estações são feitas à vista; assim, se para 2 m de diferença de nível o afastamento, na escala dada, é de 12,7 mm (tabela) para 0,2 m será 1,27 ou 1,3 mm.

Exercício. Na escala numérica de $\frac{1}{200}$, construir uma escala de

declives. A escala das distâncias deve ser graduada de metro em metro e a dos ângulos de 3 em 3°. Calcular, por meio dessa escala, a diferença de cotas entre dois pontos A e B, pertencentes a uma reta situada no terreno, e separados um do outro por uma distância de 50 m. Declive da reta $AB = 30^{\circ}$.

Correção horizontal: $[\Delta D = CS(1 - \cos^2 \alpha)]$

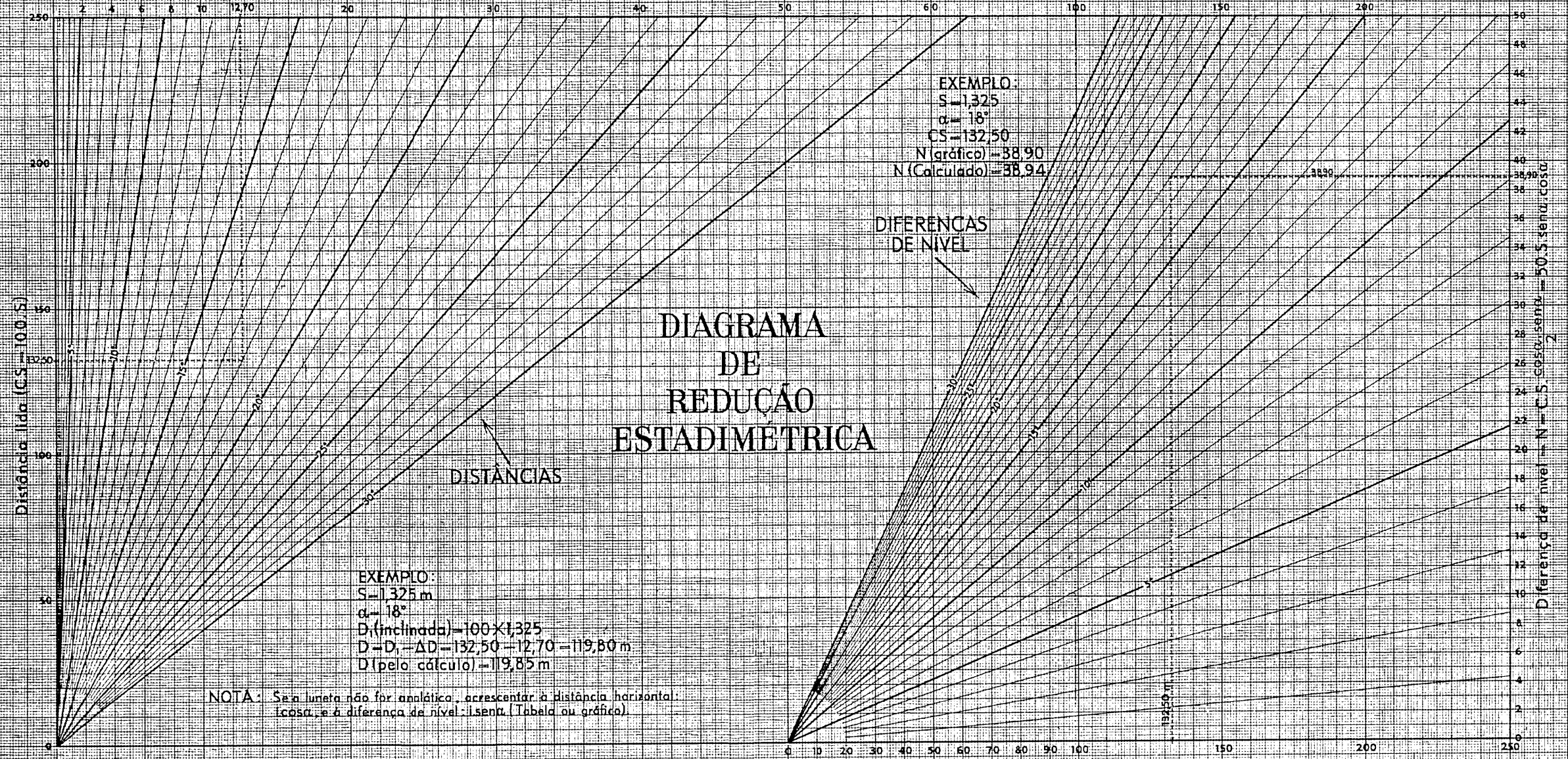


DIAGRAMA DE REDUÇÃO ESTADIMÉTRICA

EXEMPLO:
 $S = 1,325 \text{ m}$
 $\alpha = 18^\circ$
 $D_i (\text{inclinação}) = 100 \times 1,325$
 $D = D_i - \Delta D = 132,50 - 12,70 = 119,80 \text{ m}$
 $D (\text{pelo cálculo}) = 119,85 \text{ m}$

EXEMPLO:
 $S = 1,325$
 $\alpha = 18^\circ$
 $CS = 132,50$
 $N (\text{gráfico}) = 38,90$
 $N (\text{Calculado}) = 38,94$

NOTA: Se a luneta não for analítica, acrescentar a distância horizontal: $icos \alpha$, e a diferença de nível: $l \text{sen} \alpha$ (Tabela ou gráfico)

Fig. 336

Distância lida (Número gerador X Constante) CS ou 100S

Dá-se comumente o nome de *estadimetria* ao método de levantamento em que as distâncias são determinadas com o primeiro tipo de taqueômetro, isto é, pelas leituras dos fios horizontais extremos do retículo da luneta, projetados sobre uma mira graduada (comumente a mira usada nos nivelamentos), chamada *estácia*, mantida verticalmente no ponto a determinar.

A técnica empregada para o levantamento topográfico, tanto planialtimétrico ou taqueométrico é a mesma, qualquer que seja o tipo do taqueômetro usado, incluindo-se os taqueômetros especiais.

A escolha das estações, de preferência situadas em posição dominante, bem como dos pontos de detalhe, segundo os *thalwegs* (linhas do vale) e *divisores de água* (dorsos ou cumeadas), é feita, não em função do taqueômetro empregado, mas de acordo com o terreno, para a obtenção das curvas de nível, que expressem fielmente a sua orografia e hidrografia.

b) *Princípio geral da estadimetria.* Em 1778, um óptico inglês, Green, construiu um simples aparelho, composto de um tubo com 3 fios, a que deu o nome de *Estácia*.

Além dos fios axiais *h-h* e *v-v* (Fig. 331) interpôs mais dois fios extremos *a-a* e *b-b*, com os quais possibilitou achar a distância que separa 2 pontos, num dos quais está colocada o aparelho e noutro a *estácia* respectiva.

Assim (Fig. 332), sendo *O* o ponto de vista e *AB* ou *S* a porção interceptada numa régua pelos fios extremos projetados, tem-se $D = \frac{d}{s} \cdot S$. *d* e *s*, são respectivamente o afastamento e a altura dos fios estadimétricos.

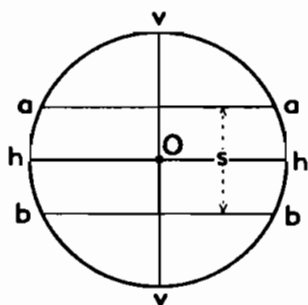


FIG. 331

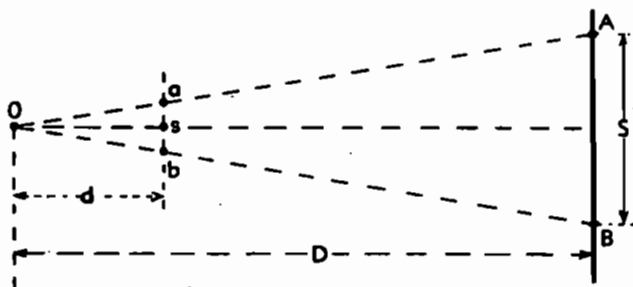


FIG. 332

Terceira Parte – TAQUEOMETRIA

§ 31 – Taqueômetros estadimétricos

131 – a) Generalidades

A *Taqueometria* ou *Taquimetria* é a parte da topografia que se ocupa da medida indireta das distâncias e das diferenças de nível, quer por meios ópticos, quer mecânicos, com a maior rapidez possível, de acordo com as condições atmosféricas, clareza e precisão do instrumento empregado, ao qual se dá o nome de *Taqueómetro*.

A medida direta das distâncias em terreno acidentado oferece dificuldades e exige tais cuidados que tornam, a operação incômoda, demorada e sujeita a diversos erros.

A medida indireta das distâncias, bem como das diferenças de nível, constituiu um problema que muito preocupou os topógrafos e geodestas do passado e teve sua origem no princípio geral, devido ao óptico inglês *William Green*.

Os levantamentos taqueométricos tem sobre os outros processos a vantagem da rapidez e exatidão, visto que todas as medidas são tomadas pelo operador no taqueómetro com uma maior independência na escolha e distribuição dos pontos essenciais do terreno a fixar na planta. A supressão das incômodas medidas das distâncias com fitas ou régua e dos nivelamentos é muito vantajosa pois na maior parte das vezes estes serviços são feitos por auxiliares, em geral incapazes de tomar medidas com a precisão necessária.

O taqueómetro é o instrumento adequado para levantamentos de precisão média, pois com ele obtém-se as seguintes coordenadas polares.

1) As *orientações* pelos azimutes, ou ângulos horizontais, pelo limbo horizontal;

2) As *distâncias horizontais* com os fios suplementares, chamados *estadimétricos* ou deslocamentos da luneta, segundo inclinações determinadas, ou ainda por outros processos ópticos e mecânicos;

3) As *cotas* de cada ponto, com o auxílio das distâncias horizontais e ângulos verticais, ou das tangentes respectivas.

Os taqueómetros são dos seguintes tipos principais:

– de *luneta* especial dotada de *fios estadimétricos*, chamados *taqueómetros estadimétricos*, do tipo *Moinot*;

– de *luneta* comum, com deslocamentos mecânicos por alavanca ou tambor, chamados *taqueómetros auto-redutores*, do tipo *Sanguet*.

Fazendo-os constantes, o comprimento D variará com S . Alguns construtores tornaram móvel a posição dos fios extremos, em cada leitura, mantendo S constante, mas a tentativa, embora cercada de muitos cuidados construtivos não logrou êxito. Modernamente só se empregam aparelhos baseados na primeira categoria.

Como a visada direta com a alidade de *pinulas estadimétricas* só pode ser empregada a pequenas distâncias, foram construídos os taqueômetros de *luneta estadimétrica* tipo *Moinot*, que tiveram incremento extraordinário. Não há fabricante que não construa um teodolito sem dotá-lo de uma luneta estadimétrica, razão porque todos os teodolitos modernos são, também, taqueômetros estadimétricos.

c) *Distâncias horizontais*. Vejamos, a seguir, as propriedades de uma luneta estadimétrica, também chamada *diastimométrica* (do grego "diastema" = intervalo), imaginando para isto a objetiva concentrada num ponto O , centro óptico, e deixando de considerar a ocular, porque sua função consiste apenas em ampliar a imagem real dada pela objetiva.

Os dois fios estadimétricos a e b (Fig. 333) interceptam na mira simples ou estadimétrica, à distância D , um comprimento $AB = S$, chamado *número gerador*.

Dos triângulos aOb e AOB , obtemos:

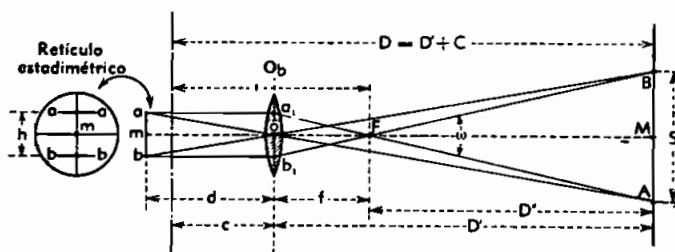


FIG. 333

$$\frac{ab}{AB} = \frac{d}{D} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{S} = \frac{d}{D'}$$

donde:

$$D' = \frac{d}{h} S$$

sendo d a distância, variável, do retículo ao centro da objetiva e h o afastamento ou altura dos fios estadimétricos.

Também dos triângulos a_1Fb_1 e AFB , obtemos:

$$\frac{a_1b_1}{AB} = \frac{OF}{FM} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{S} = \frac{f}{D' - f} = \frac{f}{D''}; \quad \frac{h}{f} = 2 \operatorname{tg} w/2$$

e

$$D' = \frac{f}{h} S + f = D'' + f \quad \text{e} \quad D'' = \frac{f}{h} S \quad (255)$$

sendo o ângulo w , constante, chamado de ângulo *paralático* (sem variação) ou *diastimométrico*.

A distância do centro do taqueômetro à estadia será

$$D = D' + c = \frac{f}{h} S + f + c \quad (256)$$

A constante aditiva $f + c = i$ é denominada *constante instrumental* ou de *Reichenbach*, devida ao mecânico e óptico Jorge Frederico von Reichenbach que em 1810 construiu em suas oficinas, em Munich, a luneta estadimétrica, adotada com êxito em muitos países e baseada no princípio acima exposto.

A constante multiplicativa ou *estadimétrica*, $\frac{f}{h} = C$, tem para valor

$$C = \frac{f}{h} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} w/2} \cong \frac{1}{\operatorname{tg} w} \quad (257)$$

Os construtores fazem geralmente $\operatorname{tg} w$ igual a 0,01, donde a constante $C = \frac{1}{0,01} = 100$, que é a relação existente entre a distância focal

da objetiva e o afastamento dos fios estadimétricos. Se, em lugar dos fios extremos, tomarmos um deles e o fio médio, a constante, evidentemente será 200, o que às vezes é vantajoso para avaliar aproximadamente distâncias superiores às obtidas com a mira estadimétrica de 4 metros.

A fórmula (256), para linha de visada horizontal, será assim:

$$D = CS + i = 100 S + i \quad (258)$$

Nos instrumentos Gurley, o valor da constante i varia de 0,80 pé ($\sim 24,4$ cm) a 1,20 pés ($\sim 36,6$ cm); nos instrumentos Keuffel & Esser Co., com luneta de focagem interna, essa constante é praticamente desprezível em virtude do processo empregado para a determinação de C . Para instrumentos com luneta analítica, seu valor é zero.

A fórmula (258) refere-se a visada horizontal, que constitui um caso particular, pois o geral é aquele em que as visadas formam um ângulo maior ou menor com o plano horizontal que passa pelo eixo secundário do instrumento, com a mira, em qualquer caso, na posição vertical.

A mira estadiométrica para taqueometria deve ser provida de nível esférico e braçadeiras para que possa ser assegurada a sua verticalidade em cada ponto a determinar plani e altimetricamente.

d) *Distâncias inclinadas.* Vejamos as fórmulas para o cálculo das distâncias horizontais e verticais de pontos em desnível.

Seja OM (Fig. 334) a linha inclinada da visada de um taqueômetro instalado em C e a mira mantida verticalmente em P e trata-se de obter a distância horizontal $CQ = D$ a vertical $PQ = N$ ($H_P - H_O$).

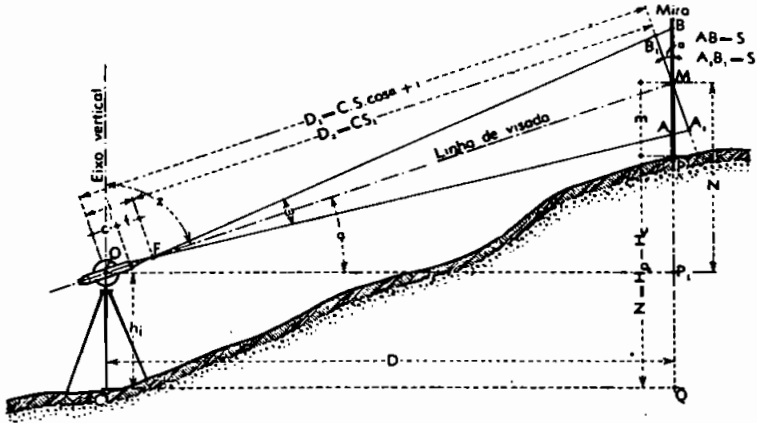


FIG. 334

Os fios estadiométricos e o fio médio projetar-se-ão em A , B e M , determinando o número gerador $AB = S$ e a altura do ponto de mira, $MP = m$. Tirando-se por M uma normal a OM , que fará com a vertical o ângulo α , os fios estadiométricos, projetados em A_1 e B_1 , determinarão $A_1B_1 = S_1$ e a distância OM será

$$D_1 = D_2 + i = CS_1 + i \quad (259)$$

O ângulo diastimométrico w , sendo muito pequeno, não acarretará erro apreciável se os ângulos em A_1 e B_1 forem considerados retos. Dos triângulos AA_1M e BB_1M , obtém-se:

$$\begin{aligned} A_1M &= AM \cos \alpha \\ B_1M &= BM \cos \alpha \end{aligned}$$

Somando-se estas equações, membro a membro:

$$A_1M + B_1M = (AM + BM) \cos \alpha$$

isto é,

$$A_1B_1 = AB \cos \alpha \quad \text{ou} \quad S_1 = S \cos \alpha$$

Pela fórmula (259)

$$D_1 = CS \cos \alpha + i$$

Do triângulo OP_1M , obtém-se o cateto OP_1 ou a distância horizontal, igual a

$$D = D_1 \cos \alpha = (CS \cos \alpha + i) \cos \alpha$$

ou

$$D = CS \cos^2 \alpha + i \cos \alpha \quad (260)$$

se o ângulo lido fosse o zenital z , em lugar da inclinação α , também

$$D = CS \sen^2 z + i \sen z \quad (261)$$

e) Diferenças de nível. Para as distâncias verticais, teremos, sendo MP_1 a diferença de nível entre o centro O do instrumento e o ponto M de mira a equação abaixo obtida do triângulo retângulo OP_1M :

$$MP_1 = n = OP_1 \operatorname{tg} \alpha = D \operatorname{tg} \alpha = D \operatorname{ctg} z \quad (262)$$

ou, substituindo D pelo seu valor (260 ou 261):

$$n = (CS \cos^2 \alpha + i \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha$$

$$n = (CS \sen^2 z + i \sen z) \operatorname{ctg} z$$

Ainda:

$$n = CS \cos \alpha \cdot \sen \alpha + i \sen \alpha$$

ou

$$n = CS \sen z \cdot \cos z + i \cos z$$

também:

$$n = CS \frac{1}{2} \sen 2\alpha + i \sen \alpha \quad (263)$$

ou

$$n = CS \frac{1}{2} \sen 2z + i \cos z \quad (264)$$

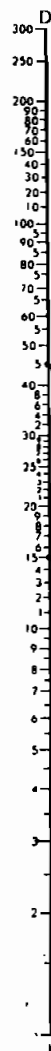
O cálculo de n dá a altura do fio médio sobre a mira acima ou abaixo do centro do instrumento e o que se quer é a diferença de nível N entre a estação do instrumento e o ponto visado.

Da (Fig. 334), tiramos

$$N = H_p - H_c = PQ = MP_1 + P_1Q - PM$$

ou

$$N = n + h_1 - m = h_i + D \operatorname{tg} \alpha - m$$



ESTADIMETRIA

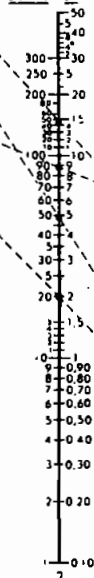
NOMOGRAMA

Para o cálculo da distância horizontal e da diferença de nível entre dois pontos pelas fórmulas

$$D = 100 S \cos^2 \alpha$$

$$N = D \operatorname{tg} \alpha$$

100 S N



(ctg α)² (tg α)



EXEMPLOS

- 1.º - S = 0,20 m e α = 30º
 $D = 100 \times 0,20 \times \cos^2 30^\circ = 20 \times 0,866^2 \approx 15,00 \text{ m}$
 $N = 15 \times \operatorname{tg} 30^\circ = 15 \times 0,577 \approx 8,65 \text{ m}$
- 2.º - S = 0,50 m e α = 18º
 $D = 100 \times 0,50 \times \cos^2 18^\circ = 50 \times 0,951^2 \approx 45,00 \text{ m}$
 $N = 45 \times \operatorname{tg} 18^\circ = 45 \times 0,325 \approx 14,63 \text{ m}$

FIG. 335

A fórmula geral será:

$$\pm N = h_1 \pm D \operatorname{tg} \alpha - m \quad (265)$$

ou ainda:

$$\pm N = h_i \pm C S \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha - m \quad (266)$$

Se fizermos o fio médio do retículo interceptar sobre a mira uma altura m igual a do instrumento h_i , o resultado obtido pela fórmula (263) dá diretamente a diferença de nível N .

Para o cálculo com as fórmulas (260) e (263), emprega-se a tabela estadimétrica XIV (da "Caderneta de Campo", de Lélis Espartel e João Lüderitz) que dá o valor das distâncias e cotas com um produto apenas em cada caso ou, então, as *Tabelas de Jordan*, muito práticas, que dispensam tal cálculo, mas cujos valores precisam ser *interpolados*. Uma boa régua de cálculo taqueométrica permite a obtenção de valores com bastante aproximação.

O traçado de curvas de nível, em plantas na escala de 1:1 000 ou inferiores é suficientemente exato, com pontos assim calculados.

f) *Gráficos: Nomograma e diagrama estadimétrico.* Também podem ser usados em escalas *ampliadas*, os *nomogramas* da (Fig. 335) ou os *diagramas estadimétricos* da (Fig. 336) práticos, e que exigem somente construção gráfica, a mais completa possível.

Quando o ângulo α for igual ou menor de 3° , as fórmulas a empregar podem ser as empregadas para visada horizontal.

g) *Determinação direta das constantes.* Para a verificação ou determinação da constante estadimétrica (C) e da instrumental (i) de um taqueómetro, escolhe-se uma base num terreno (Fig. 337) mais ou menos plano, de 100 a 200 m, estaquea-se de 20 em 20 metros ou de 50 em 50 metros e, instala-se o taqueómetro no vértice inicial, fazendo leituras dos números geradores $S_1, S_2, S_3 \dots$ em uma mira mantida verticalmente nos pontos sucessivos, a distâncias $D_1, D_2, D_3 \dots$ do instrumento e com a luneta na posição horizontal teremos:

$$D_1 = CS_1 + i, \quad D_2 = CS_2 + i, \quad D_3 = CS_3 + i, \dots$$

Das duas primeiras equações obtemos:

$$C = \frac{D_2 - D_1}{S_2 - S_1} \quad (267) \quad \text{e} \quad i = \frac{D_1 S_2 - D_2 S_1}{S_2 - S_1} \quad (268)$$

Com outras leituras de números geradores e respectivas distâncias, se obterá uma série de valores para C e i , cujas médias, simples ou pelo processo dos mínimos quadrados, deverão ser os empregados nas fórmulas. Se a constante C for fracionária, há necessidade de alterá-la, quer modificando o intervalo dos fios estadimétricos quando possível, ou construindo uma mira estadimétrica especial.

A operação de determinação das constantes nos aparelhos antigos, com fios estadimétricos móveis, exige o maior cuidado, pois os valores

encontrados irão servir de base na taqueometria, a todos os cálculos de distâncias e cotas. Deve-se executá-la quando as condições atmosféricas sejam favoráveis, e, sendo possível, das 8 às 10 horas, por ser nesse intervalo de tempo que se verifica o minimum de refração atmosférica.

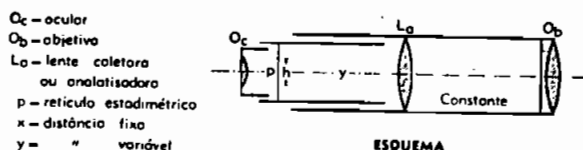


FIG. 337

Como é aparelho muito difundido entre nós pela sua solidez e acabamento, daremos, a seguir, os valores da constante instrumental dos *trânsitos* Gurley (hoje, com luneta analítica, $i = 0$).

1) Engineer's transit	$f = 208$ mm	}	$i = 35$ cm
	$c = 142$ mm		
2) Mountain's transit	$f = 102$ mm	}	$i = 24$ cm
	$c = 137$ mm		
3) Reconnaissance's transit	$f = 146$ mm	}	$i = 25$ cm
	$c = 108$ mm		

h) Luneta analítica. Nos taqueômetros de luneta comum estadimétrica, as distâncias contadas a partir do foco anterior F_1 da objetiva são proporcionais a S . Esse ponto é denominado *centro de analatismo* (imutável, do grego) do sistema.

Para obter as distâncias, é preciso somar a constante de Reichenbach $i(f + c)$ ao produto $100 S$.

A luneta *analítica*, construída pelo Eng.^o militar Ignacio Porro, em 1840, anula a constante instrumental, pois o centro de analatismo, donde são contadas as distâncias, coincide com o centro do instrumento. Para tal, Porro intercalou entre a objetiva e a ocular uma lente *analisadora* (Fig. 337), distância fixa da primeira e de tal maneira que um dos focos situa-se entre o foco posterior da objetiva e a própria objetiva.

Sejam O_b (Fig. 338) a objetiva, L_a a lente analisadora ou analítica, F_1 e F_2 os focos respectivos, A e B os pontos de projeção na mira estadimétrica dos fios do retículo a e b .

Se não existisse a objetiva, o feixe luminoso convergente que cai sobre essa lente e vai passar, depois de refratado, pelo foco F_2 da lente analítica, iria convergir em um ponto V . Este ponto, que deve coincidir com o centro do instrumento, é chamado *centro analítico* e goza das seguintes propriedades:

Para uma imagem de grandeza h (afastamento dos fios do retículo) a altura $S = AB$ interceptada e lida na mira estadimétrica é vista do centro analítico sob um ângulo ω constante.

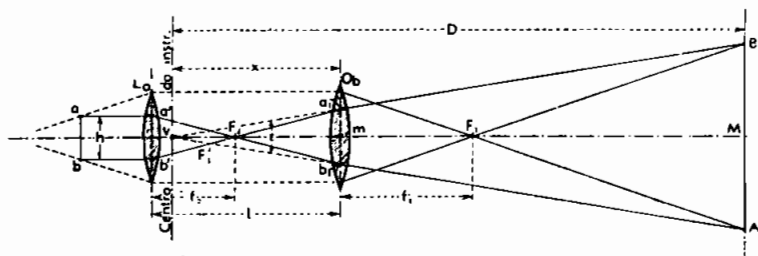


FIG. 338

Sejam: l a distância fixa entre as duas lentes, f_1 e f_2 as distâncias focais respectivas e x a distância Vm , também constante. Do triângulo $a_1 V b_1$, obtém-se:

$$2 \operatorname{tg} \varepsilon/2 = \frac{a_1 b_1}{Vm} \quad (269)$$

Dos triângulos semelhantes $a_1 F_2 b_1$ e $a' f_2 b'$, obtemos:

$$\frac{a_1 b_1}{l - f_2} = \frac{a' b'}{f_2} = \frac{h}{f_2}$$

donde

$$a_1 b_1 = \frac{h(l - f_2)}{f_2} \quad (270)$$

Por outro lado, em relação à objetiva, V é um foco conjugado virtual de F_2 e, conseqüentemente:

$$\frac{1}{l - f_2} - \frac{1}{Vm} = \frac{1}{f_1}$$

donde

$$Vm = \frac{(l - f_2) f_1}{f_1 + f_2 - l} \quad (271)$$

Os valores de $a_1 b_1$ e V_m sendo constantes, o ângulo estadimétrico ε também o será.

Tem-se, pela substituição:
$$\frac{a_1 b_1}{h} = \frac{l - f_2}{f_2}$$

e

$$2 \operatorname{tg} \varepsilon/2 = \frac{a_1 b_1}{V_m} = \frac{h(f_1 + f_2 - l)}{f_1 - f_2} \quad (272)$$

A distância do ponto V à mira é proporcional ao número gerador S e, então:

$$D = \frac{S}{2 \operatorname{tg} \varepsilon/2} = \frac{l}{\operatorname{tg} \varepsilon} S = CS \quad (273)$$

ε sendo muito pequeno, pode-se substituir $2 \operatorname{tg} \varepsilon/2$ por $\operatorname{tg} \varepsilon$.

Geralmente os construtores fazem $\operatorname{tg} \varepsilon = 1/100$. Para colocar o centro analítico no eixo do instrumento, recorrem à fórmula de V_m (271). Se fizermos $V_m = l/2$, teremos, visto f_1 ser positivo,

$$f_1 > l/2 > V_m$$

Para satisfazer a esta condição, o construtor terá de empregar lente de distância focal limitada, o que reduz o aumento. Para compensar esta desvantagem, certos instrumentos são munidos de objetiva dupla, que permite para o mesmo aumento e mesma abertura, reduzir as dimensões e o peso da luneta.

i) Modo de operar no campo. Para obter-se os detalhes topográficos de uma região, de forma a representar claramente o relevo e demais acidentes do terreno, são empregados em geral os taqueômetros estadimétricos ou auto-redutores.

O método correntemente empregado é o de caminhamento e irradiação que consiste em escolher pontos dominantes sobre o terreno e vértices de uma poligonal ou estacas de um eixo locado, e destes pontos levantar outros em todas as direções que definam nitidamente a conformação da área a detalhar.

Para a boa prática das operações é essencial, que as estacas dos pontos de estacionamento do taqueômetro sejam niveladas com a máxima exatidão possível, pois que um erro qualquer afetará naturalmente o cálculo de todas as cotas e, conseqüentemente, o traçado das curvas de nível.

Nos levantamentos taqueométricos, a turma de trabalho deve ser constituída por dois operadores, um no instrumento e outro na cader-

neta que registra as observações e faz os indispensáveis esquemas. O engenheiro chefe, que dirige todo o serviço, escolhe os pontos de instalação do instrumento, faz as principais leituras e distribui os porta-miras nos pontos característicos do terreno.

Entre nós, é comum o próprio operador do instrumento ser o chefe orientador de todo o levantamento, incumbindo-se mesmo de todos os registros na caderneta de campo.

j) *Arco de Beaman e seu emprego.* O emprego do arco de Beaman também chamado de arco *estadia*, no taqueômetro estadimétrico, tem por fim dispensar o uso de tabela para o cálculo das distâncias horizontais e verticais. O arco fornece dados com os quais se consegue, por simples operações aritméticas, determinar esses dois elementos, tal como qualquer auto-redutor, como veremos:

Há dois tipos: um *antigo* (Gurley), que consiste num arco suplementar (Fig. 339) com 2 escalas, uma *H* para as distâncias e outra *V* para as diferenças de nível.

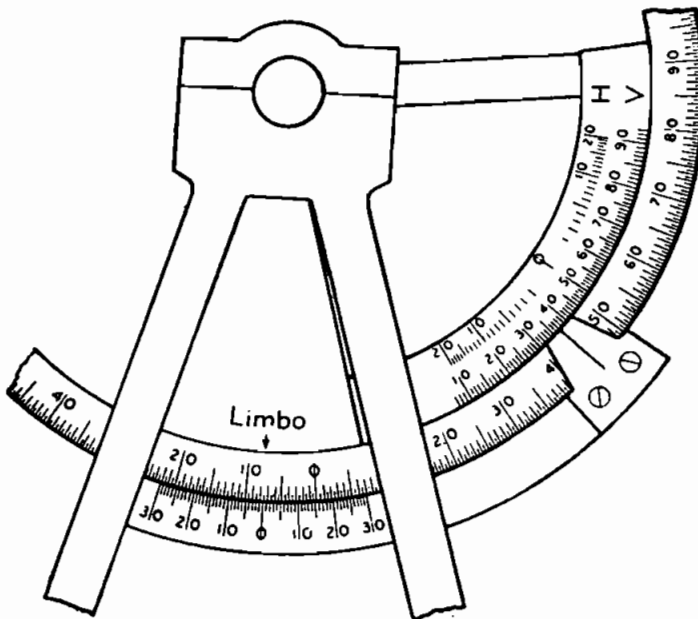


FIG. 339

A escala *H* tem zero (0) no centro, com graduações para os extremos. A escala *V* tem a divisão 50, em coincidência com o zero de *h*. O arco é preso ao círculo vertical do instrumento e disposto de tal

forma que, quando o zero do limbo vertical estiver em coincidência com o zero do respectivo vernier, a escala V terá também em coincidência a graduação 50 com o seu índice, e portanto também com o zero de H , uma vez que o índice é comum às duas escalas.

Tal dispositivo, resulta em inconveniente sério, porque H estando afastado, suas leituras são feitas com menor rigor.

No tipo *novo*, tanto dos aparelhos Gurley, como Keuffel & Esser, as duas escalas são separadas e gravadas no próprio limbo do círculo vertical, estando cada uma de um lado do vernier, e ambas tem o seu índice próprio, o que assegura melhores leituras de H .

Ainda assim a avaliação das frações são feitas por estima, principalmente nas inclinações fortes, tornando sua precisão inferior a do taqueômetro estadimétrico e deve de preferência ser empregado nas poligonais, verificações e nos pontos de detalhe mais importantes.

Vejam, agora, como se obtém e se usa o arco Beaman.

a) *Distâncias horizontais*. A fórmula geral da estadimetria é:

$$D = CS \cos^2 \alpha + i \cos \alpha$$

que se pode escrever:

$$D = CS - CS \operatorname{sen}^2 \alpha + i \cos \alpha$$

ou, para $C = 100$:

$$D = 100 S - 100 \operatorname{sen}^2 \alpha S + i \cos \alpha \quad (274)$$

O termo de correção $100 \operatorname{sen}^2 \alpha$, é transformado em percentagens de S pelas relações:

$$100 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1; \quad 100 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2; \quad 100 \operatorname{sen}^2 \alpha = 3, \text{ etc.}$$

%	(α) ~	Diferença
1	5°44'	2°23'
2	8°7'	1°51'
3	9°58'	1°34'
4	11°32'	1°23'
5	12°55'	

As correções instrumentais $i \cos \alpha$ constam, no rodapé das tabelas estadimétricas, com valores inferiores a i (nos aparelhos Gurley, variáveis de acordo com o tipo, de 0,25 a 0,35 m) e nos taqueômetros com luneta analítica são nulas. As correções estadimétricas são calculadas como indicado acima, resumido no quadro respectivo.

Acha-se assim, as inclinações para as quais as correções são, respectivamente 1%, 2%, 3%, etc.

Esses ângulos e os intermediários, calculados do mesmo modo, é que estão gravados no arco marcado H e indicados pelos traços correspondentes a 1, 2, 3, 4, 5, etc. por cento. Para as *diferenças de nível*, a técnica é a mesma, e os novos valores encontrados são gravados no arco marcado V . Nos modernos taqueômetros, que dispõem de *arco*

Beaman (Keuffel & Esser, etc.) em lugar das correções, são obtidos diretamente os valores de $100 \cos^2 \alpha$ e a fórmula assim se reduz a $D = HS$, pois a constante instrumental é praticamente nula.

b) *Distâncias verticais*. A fórmula deduzida para a diferença de nível entre o centro do taqueômetro e o ponto médio da mira é: $n = 50 S \operatorname{sen} 2\alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, que se transforma com a substituição da leitura V dada pelo arco *Beaman* em:

$$n = S(V - 50) + i \operatorname{sen} \alpha \quad (275)$$

$i \operatorname{sen} \alpha$ também é tabelado. $(V - 50)$ chama-se de *fator altimétrico*.

Nos taqueômetros modernos em que $i = 0$ e onde as diferenças de nível são dadas com sinais $+$ ou $-$, o valor da escala já dá diretamente $50 \operatorname{sen} 2\alpha$ e o valor de $n = VS$.

Não há tipo especial de caderneta para o arco de *Beaman*, pois na própria caderneta taqueométrica de campo, pode-se acrescentar duas colunas, uma relativa ao fator planimétrico (H) e outra ao altimétrico (V).

Quando se dispuser de boas tabelas, como as de Jordan, em taqueometria de precisão, dá melhores resultados a utilização da fórmula taqueométrica diretamente em cada ponto levantado, e por isso os instrumentos europeus preferem o aperfeiçoamento das leituras nos limbos verticais, do que a utilização do arco *Beaman*.

132 — Erros nas medidas estadimétricas

a) *Introdução*. A indagação do erro provável na medida óptica das distâncias é de suma importância, pois poderá definir o limite de precisão que é possível alcançar com as lunetas estadimétricas.

Sabemos que a medida das distâncias com a estádia tem por base a resolução de um triângulo do qual são conhecidos um ângulo muito agudo e o lado oposto S ou número gerador (Fig. 340). O ângulo ω é determinado no próprio instrumento por dois fios do retículo, e as linhas de visada correspondentes a esses fios determinam na estádia o lado S . O ângulo ω sendo muito pequeno, pode-se considerar isósceles o triângulo ABC , quando a inclinação do eixo óptico sobre o horizonte for de pequena amplitude. Nessas condições, a medida da distância D pode exprimir-se pela relação:

$$D = \frac{S}{\omega} \quad (276), \text{ quando } \omega \text{ for dado em partes do raio,}$$

ou

$$D = \frac{S}{\omega \cdot \operatorname{sen} 1''} \quad (276\text{-bis}), \text{ quando } \omega \text{ for expresso em segundos}$$

de arco.

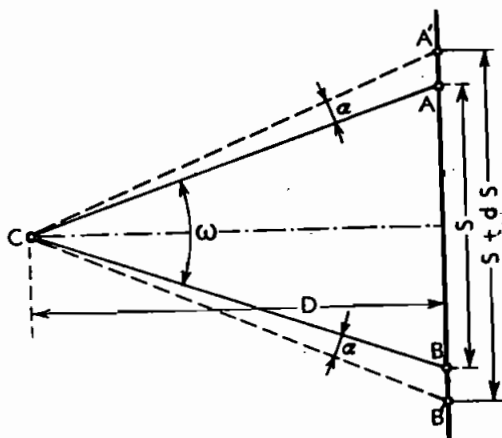


FIG. 340

b) *Lunetas de ângulo diastimométrico constante.* Vamos considerar em primeiro lugar as lunetas de ângulo diastimométrico constante.

Seja C o centro de analatismo do sistema ou vértice do ângulo invariável ω , o qual nas lunetas analíticas coincide com o centro do instrumento, e nas lunetas comuns é o foco principal anterior da objetiva.

O erro que se pode cometer na avaliação da distância D deve ser considerado como diferencial de D em relação ao segmento variável S da estadia; portanto, designando por dD o erro na determinação de D para um erro infinitesimal de S , para mais ou para menos, a fórmula (276) dá:

$$dD = \pm \frac{dS}{\omega} \quad (277)$$

O erro dS é um erro de colimação o qual depende da *acuidade da vista* através da luneta. Admitindo que a acuidade natural da vista seja de $60''$, a acuidade através duma luneta de aumento A , será:

$$\alpha'' = \frac{60''}{A}$$

Assim, o operador, ao avaliar o número gerador S na estadia, poderá fazer as leituras em A' e B' em vez de fazê-las em A e B cometendo os erros AA' e BB' , cuja soma algébrica será o erro total dS . Considerando o caso mais desfavorável, isto é, que os dois erros tenham o mesmo sinal positivo, por exemplo, neste caso:

$$dS = AA' + BB'$$

Os triângulos $AA'C$ e $BB'C$ dão, respectivamente:

$$\alpha = \frac{AA'}{D}; \quad AA' = \alpha \cdot D; \quad \alpha \cong \frac{BB'}{D}; \quad BB' \cong \alpha \cdot D$$

Donde:

$$dS \cong 2\alpha D$$

Substituindo em (277) virá:

$$dD = \pm \frac{2\alpha}{\omega} D \quad (278)$$

Esta expressão mostra que "nas lunetas de ângulo diastimométrico constante o erro provável na avaliação de uma distância D , é proporcional a essa distância".

Substituindo α pelo seu valor $\frac{60''}{A}$, na fórmula (278), teremos:

$$dD = \pm \frac{120''}{\omega A} D; \text{ ou, exprimindo } \omega \text{ em partes do raio:}$$

$$dD = \pm \frac{120''}{206265 \cdot \omega \cdot A} D \quad (279)$$

Suponhamos, por exemplo, $\omega = 0,01$ ($\text{tg } \omega = \frac{1}{100}$) e $A = 20$ (dois valores práticos muito usados), teremos:

$$dD = \pm \frac{120''}{41\,253} D = \pm 0,003 \cdot D$$

Este resultado mostra que, embora empregando todas as precauções, fica-se sempre sujeito a cometer um erro de $3^{\circ}/100$.

c) *Lunetas de ângulo diastimométrico variável.* Um erro cometido na medida de ω dará lugar a um erro dD na distância D , o que equivale a considerar dD como diferencial de D em relação a ω , na expressão fundamental (276):

$$dD = \pm \frac{S}{\omega^2} \cdot d\omega \quad \text{Porém } \omega^2 = \frac{S^2}{D^2} \quad \text{Donde: } dD = \pm \frac{d\omega}{S} \cdot D^2 \quad (280)$$

O que mostra que "nas lunetas de ângulo diastimométrico variável, o erro dD é proporcional ao quadrado da distância D ".

Resulta daí a superioridade do método de *Green* sobre o de *Montanari*; entretanto, convém observar que esta superioridade é somente

teórica, pois na prática os dois processos se equivalem, pois com o emprego do parafuso micrométrico, obtém-se maior precisão na avaliação do ângulo ω do que nos números geradores S da estadia.

Exprimindo ω em partes do raio, teremos:

$$dD = \pm \frac{S}{\omega^2 \cdot \text{sen } 1''} d\omega; \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{S^2}{D^2} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 1''}$$

$$\text{Substituindo} \quad dD = \pm \frac{d\omega}{S} D^2 \cdot \text{sen } 1'' = \pm \frac{d\omega}{206265 \cdot S} D^2 \quad (281)$$

Suponhamos que o ângulo ω seja avaliado pelo micrômetro com a aproximação de $10''$, e que a constante da estadia seja 100, o que equivale a fazer:

$$d\omega = 10'' \quad \text{e} \quad S = \frac{D}{100}; \quad \text{Substituindo em (281), virá:}$$

$$dD = \pm \frac{1000}{206265} D = 0,0048 \cdot D \quad \text{o que representa um erro de } 4,8\%.$$

Pelo exposto, podemos concluir que, para praticar racionalmente a estadimetria, não basta colocar 2 fios no campo da luneta; será necessário harmonizar os vários elementos de medidas para conseguir resultados satisfatórios.

A idéia que surge naturalmente ao espírito é de empregar lunetas de forte aumento e ângulo diastimométrico de grande amplitude pois as fórmulas anteriores mostram que o erro provável é inversamente proporcional a esses elementos. Surge, porém, uma dificuldade: o campo da luneta é inversamente proporcional ao aumento: ora, quanto maior for o ângulo diastimométrico, tanto mais amplo deve ser o campo e portanto menor o aumento.

Nota: Os valores acima indicados representam os erros teóricos máximos; nada tem de absoluto, servindo apenas para prevenir o operador dos cuidados e critérios necessários para o emprego racional da estadimetria.

A experiência mostra que em condições normais o erro médio é de cerca de 0,25%.

d) Principais causas do erro na medida indireta das distâncias.

1) *Inexatidão da constante estadimétrica (C)*

— Dá lugar a um erro sistemático que afeta no mesmo sentido todas as medidas.

2) *Erro devido às leituras das divisões da estadia.*

— Vimos anteriormente que dá lugar a um erro que, em condições normais, pode ser avaliado em 0,25%.

3) Erro devido ao desvio da mira (estadia) da posição vertical.

— É o mais grave de todos e exige que a estadia seja confiada a um porta-mira hábil e consciencioso.

Calculemo-lo:

Suponhamos (Fig. 341) que a estadia se desvie de um ângulo θ da posição vertical QB ; então, em vez de fazer a leitura $AB = S$, faz-se a leitura $A'B' = S'$. Se a estadia estivesse colocada verticalmente em Q' , a leitura seria $CD = S_1$; de modo que as três leituras correspondem respectivamente às distâncias:

Distância certa: $D = C \cdot S \cdot \cos^2 \alpha$ (com luneta analítica)

Distância errada: $D' = C \cdot S' \cdot \cos^2 \alpha$

Distância certa: $D_1 = C \cdot S_1 \cdot \cos^2 \alpha$

Vê-se assim que o erro total decompõe-se em duas partes:

1 — a diferença $D_1 - D$;

2 — a diferença $D' - D_1$

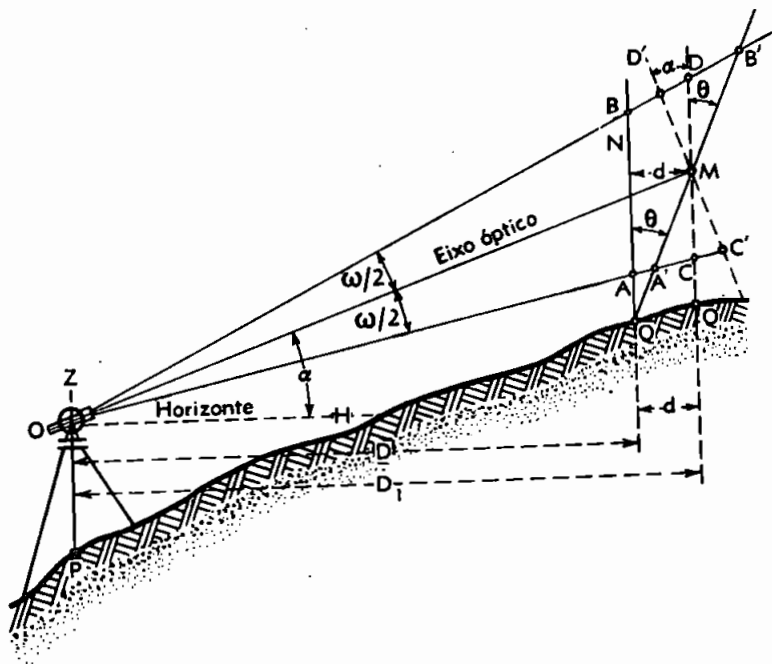


FIG. 341

Chamando h a leitura QM correspondente ao fio axial do retículo a figura dá:

$$D_1 - D = d = h \cdot \operatorname{sen} \theta \quad (282)$$

$$D' - D_1 = C \cdot S' \cdot \cos^2 \alpha - C \cdot S_1 \cdot \cos^2 \alpha = C \cdot \cos^2 \alpha \cdot (S' - S_1)$$

Admitindo que os ângulos em C' e D' sejam retos, o que não acarreta erro sensível, teremos:

$$C'D' = S_1 \cdot \cos \alpha; \quad C'D' = S' \cos (\alpha + \theta)$$

Donde

$$S_1 \cos \alpha = S' \cos (\alpha + \theta)$$

e

$$S_1 = S' \frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha}$$

Fazendo a diferença:

$$\begin{aligned} S' - S_1 &= S' - S' \cdot \frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} = \delta' \left[1 - \frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} \right] = \\ &= S' \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha \cdot \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

Para pequena inclinação da estadia, pode-se fazer $\cos \theta = 1$, e assim virá:

$$S' - S_1 = S' \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha}$$

Substituindo acima, virá:

$$D' - D_1 = C \cdot S' \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta}{\cos \alpha} = C \cdot S' \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Mas } C = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2 \alpha}{2}$$

Portanto:

$$D' - D_1 = S' \frac{\operatorname{sen} 2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta}{4 \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} \quad (283)$$

O erro total será:

$$\varepsilon_1 = S' \frac{\text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } \theta}{4 \cdot \text{tg} \frac{\omega}{2}} + h \cdot \text{sen } \theta = (S' \frac{\text{sen } 2\alpha}{4 \cdot \text{tg} \frac{\omega}{2}} + h) \text{sen } \theta \quad (284)$$

Se a estádia estivesse inclinada para o lado da luneta, teríamos analogamente:

$$\varepsilon_1 = - (S' \frac{\text{sen } 2\alpha}{4 \cdot \text{tg} \frac{\omega}{2}} + h) \text{sen } \theta \quad (285)$$

Vê-se por estas fórmulas que o erro cresce com α , com θ e com h , e diminui com ω ; ou, em outros termos, o erro cresce com a inclinação da linha de visada, com a inclinação da mira e com a leitura do fio axial, e diminui com a constante estadimétrica.

Também

$$\varepsilon_1 = - (S' \cdot \frac{\text{sen } 2\alpha}{2} + h) \cdot \text{sen } \theta = - (C \cdot S' \cdot \frac{\text{sen } 2\alpha}{2} + h) \cdot \text{sen } \theta \quad (286)$$

4) *Erros devidos à paralaxe dos fios.* Estes erros provêm da incerteza que se verifica, quando se consegue focalizar um dos fios do retículo, na determinação das imagens dos fios restantes. Daí resulta um erro médio nas leituras que pode ser avaliada aproximadamente, para uma distância D , pela fórmula:

$$e_p = \frac{D}{2000} \quad (287)$$

5) *Erros devidos a circunstâncias atmosféricas.* As refrações, as ondulações, os ventos e o modo de iluminação dos instrumentos influem de certo modo sobre as observações estadimétricas. As refrações são frequentes pela manhã e na vizinhança imediata do solo. Os desvios que sofrem os raios visuais diminuem rapidamente à medida que se afasta do solo, e por isso convém não utilizar o meio metro inferior da estádia. Pode-se, contudo, constatar se o erro devido ao fenômeno é ou não é admissível. Os fios da luneta sendo geralmente equidistantes, bastará comparar as duas diferenças de leituras feitas com o fio nivelador e os fios simétricos, superior e inferior.

As ondulações aéreas causam oscilações nas imagens que dificultam bastante as leituras, sobretudo à hora da temperatura máxima do dia. O fenômeno não tem influência capital sobre a precisão dos resultados; ele aumenta apenas um pouco o erro accidental na apreciação das frações de divisão da estadia. Os ventos, que atenuam um tanto os efeitos das refrações e ondulações, provocam trepidações nos instrumentos, e nas estadias, aumentando assim os erros.

Finalmente, um fenômeno ainda inexplicado e que influi sobre as observações estadimétricas é o modo de iluminação da luneta. Têm-se verificado que quando se mede uma distância visando com a luneta estadimétrica na direção do Sol, encontra-se um comprimento maior do que visando com a luneta em sentido inverso.

Cumprir notar que os erros devidos às circunstâncias atmosféricas escapam a uma avaliação teórica, a despeito de experiências feitas por hábeis operadores.

6) *Erros devidos a variações no comprimento da estadia.* A temperatura e a umidade de ar influem sobre o comprimento das régua. Uma dupla variação tem-se verificado. A variação diurna, segundo a marcha da temperatura, conduz a um desvio de $\pm 0,02$ mm por metro de distância, o que conduz a um erro insignificante. A régua experimenta também variações lentas devidas à dissecação da madeira e ao grau de umidade do ar. Tais variações, que atingem no máximo $\pm 0,2$ mm a $0,3$ mm por metro, correspondem ao erro máximo de $\pm 0,025$ m sobre 100 metros. O erro médio sobre a distância, proveniente das variações do comprimento da estadia, é expresso por:

$$e_e = \pm \frac{D}{8\,000} \quad (288)$$

Fórmula geral. Do exame de todos os erros que resultam das causas mencionadas e da aplicação da teoria dos erros, conseguiu-se reunir na fórmula:

$$e_t = \pm (0,04 \text{ m} + 0,0006 D) \quad (289)$$

a lei teórica dos erros possíveis, devida às experiências de Sanguet e Jordan. Esta fórmula dá com suficiente aproximação o erro total e_t cometido em uma distância D .

e) Fórmula completa (exata) da redução ao horizonte. Ao deduzirmos a fórmula $D = C \cdot S \cdot \cos^2 \alpha$, que dá a distância do centro de analatismo à estadia, admitimos que fossem retos os ângulos em A' e B' , formados pelo eixo da estadia perpendicular ao eixo óptico OC e pelas visadas extremas OA' e OB' , o que não é rigorosamente exato.

Vamos calcular o erro resultante, deduzindo a fórmula exata da redução ao horizonte. O triângulo OAP (Fig. 342) fornece:

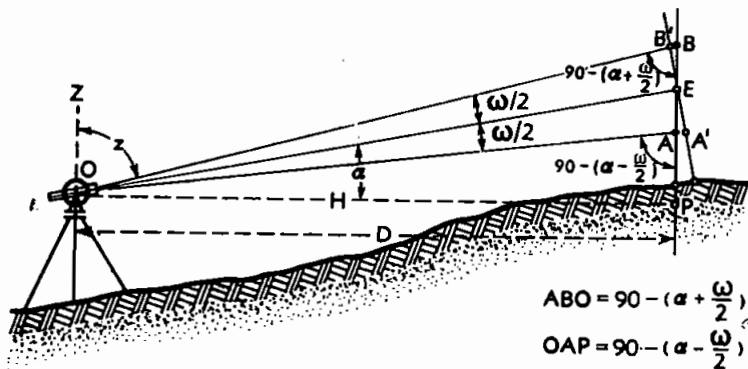


FIG. 342

$$D = OA \cdot \text{sen} \left[90^\circ - \left(\alpha - \frac{\omega}{2} \right) \right] = OA \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\omega}{2} \right) \quad (290)$$

Do triângulo OAB , tira-se:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{\text{sen} \left[90^\circ - \left(\alpha + \frac{\omega}{2} \right) \right]}{\text{sen } \omega} = \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\omega}{2} \right)}{\text{sen } \omega}$$

donde:

$$OA = AB \cdot \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\omega}{2} \right)}{\text{sen } \omega}$$

Substituindo em (290), virá:

$$\begin{aligned} D &= AB \cdot \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\omega}{2} \right) \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\omega}{2} \right)}{\text{sen } \omega} = \\ &= AB \cdot \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\omega}{2} \right) \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \text{ sen } \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\cos \alpha \cdot \cos \frac{\omega}{2} - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}) (\cos \alpha \cos \frac{\omega}{2} + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}) \\
 = AB & \cdot \frac{\phantom{(\cos \alpha \cos \frac{\omega}{2} + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\omega}{2})}}{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2}} = \\
 & = \frac{AB}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\omega}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega}{2}} \right) = \\
 & = \frac{AB}{2} \left(\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right) = \\
 & = \frac{AB}{2} \left(\cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} - \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Mas $AB = S$ e $\frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = C$; substituindo, virá:

$$D = C \cdot S \cdot \cos^2 \alpha - \frac{S}{4 \cdot C} \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (291)$$

Esta fórmula mostra que o erro é igual a:

$$\varepsilon = \frac{S}{4 \cdot C} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (292)$$

É, portanto, inversamente proporcional à constante C e diretamente proporcional ao segmento S da estadia. Vamos calcular a grandeza desse erro. Suponhamos, por exemplo $C = 100$, $S = 4$ m e $\alpha = 30^\circ$.

$$\varepsilon = \pm \frac{S}{4 \cdot C} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \pm 0,0025 \text{ m} = \pm 2,5 \text{ mm}$$

Vê-se que este erro é insignificante em face da incerteza correspondente à medida indireta das distâncias.

f) *Redução das distâncias inclinadas ao horizonte.* Na redução ao horizonte das medidas em terrenos inclinados é preciso atender-se à orientação da estadia. A régua pode ser horizontal e perpendicular à direção da visada, inclinada sobre a vertical e perpendicular à mesma direção, ou, enfim, pode ser mantida em posição simplesmente vertical:

1) *Com estadia horizontal.* A estadia horizontal é nesta posição fixada a uma régua que traz, um colimador em cujo campo o portamira deve ser o instrumento a fim de orientar a régua perpendicular à linha de colimação. A distância D' fornecida pelo instrumento sendo a do ponto O (Fig. 343) à estadia é preciso para ter a distância horizontal D , medir a inclinação α da visada sobre o horizonte. Ter-se-á então:

$$D = D' \cdot \cos \alpha \quad (293)$$

Para o cálculo, empregam-se tábuas ou escalas gráficas.

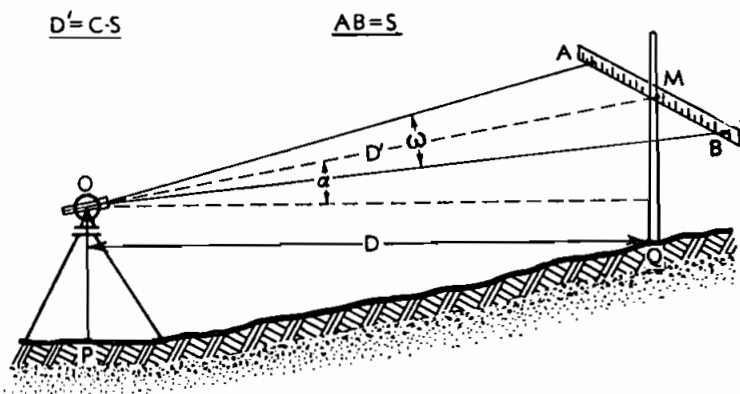


FIG. 343

2) *Com estadia inclinada.* A posição inclinada sobre a vertical e perpendicular à visada é preferida por alguns topógrafos europeus. Para conservar uma tal posição é a estadia munida a uma certa distância Fm (Fig. 344) de um colimador que lhe é perpendicular. Seja A o ponto onde se acha instalado o instrumento e B o ponto onde se coloca a estadia, normalmente à direção da visada feita com o fio médio.

OM será a distância D' fornecida pela leitura S feita com os dois fios estadimétricos que determinam as direções OP e OQ . Seja α o ângulo de inclinação do eixo óptico sobre o horizonte. A distância Ab ,

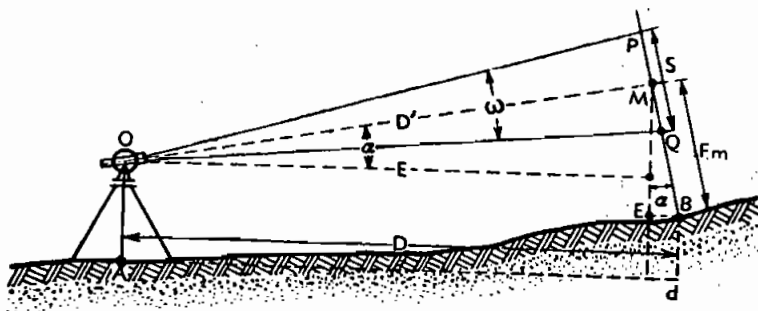


FIG. 344

projeção de AB sobre o horizonte, compõe-se de Am , projeção de D' , e de mb . Então:

$$D = D' \cos \alpha + mb$$

Chamando F_m a leitura feita com o fio médio, ter-se-á:

$$mb = EB = F_m \operatorname{sen} \alpha$$

Portanto:

$$D = D' \cos \alpha + F_m \operatorname{sen} \alpha \quad (294)$$

Este modo de empregar a estadia em terreno inclinado é pouco prático, por ser difícil ao porta-mira manter a posição normal à direção média da visada. Outra desvantagem está em que a fórmula de redução contém dois termos.

3) *Vantagens e inconvenientes das estádias não verticais.* A estadia vertical oferece manejo cômodo, ainda mesmo que o seu comprimento ultrapasse 3 metros. A estadia horizontal, menos estável, tornar-se-ia muito embaraçosa se a sua maior dimensão excedesse de 1,50 m.

O grande comprimento das estádias verticais oferece a dupla vantagem de permitir a medição de grandes distâncias e o emprego, no interesse da precisão, de um ângulo estadimétrico mais considerável do que o facultado, em igualdade de circunstâncias, pelas estádias horizontais. Com a estadia vertical pode-se ainda efetuar simultaneamente a medição das distâncias e o nivelamento trigonométrico.

Em oposição a essas vantagens, apresentam as estádias verticais o inconveniente de não se prestarem à fácil leitura da parte inferior, ordinariamente o primeiro metro, em terrenos onde abundam arbustos e vegetações rasteiras. Além disso, as leituras feitas próximo ao solo estão sujeitas aos erros da refração e das ondulações.

O principal inconveniente das estádias verticais procede da exageração dos erros cometidos na medida das distâncias em terrenos inclinados, erros devidos, à falta de perpendicularidade da régua com o eixo óptico da luneta, e outras causas.

As estádias horizontais atenuam os inconvenientes que acabamos de enumerar. Cumpre, porém, notar que apesar disso o emprego das estádias verticais é mais geral.

133 — Diastimômetro de Sanguet

a) *Princípio teórico.* No diastimômetro imaginado por *M. Sanguet*, o princípio teórico fundamental é aplicado sob a forma da segunda variante; somente o ângulo constante *AOB* (Fig. 345); formado pelos raios visuais que encontram os fios horizontais do retículo, é gerado pelo desvio que sofre a linha de visada, em consequência de um prisma de ângulo agudo que se fixa diante da objetiva da luneta.

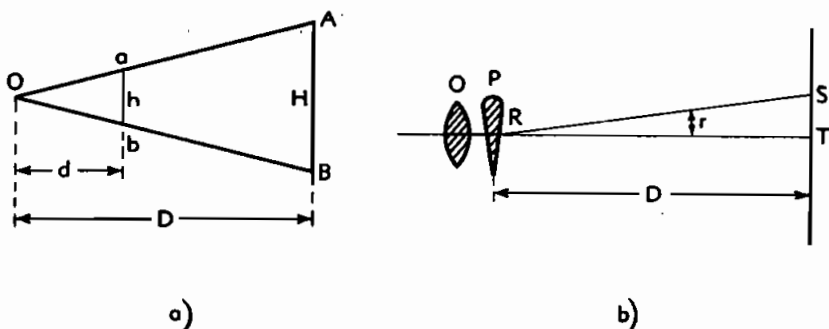


FIG. 345

Sejam *O* a objetiva e *P* o prisma em questão. A linha de colimação encontraria a estadia em um ponto *T*, mas a interposição do prisma faz desviar essa linha segundo a direção *RS* formando um ângulo r com a primeira.

Designando por *H* a diferença das leituras da estadia, tem-se:

$$D = \frac{H}{\operatorname{tg} r} \quad (295)$$

O valor de r depende unicamente do índice de refração do vidro e do ângulo das faces inclinadas do prisma. Realizando por construção um ângulo r tal que a sua tangente seja um número simples 0,01, por exemplo, tem-se imediatamente pela leitura de *H* a distância. Claro está que, à distância assim determinada, deve-se ajuntar a do prisma ao centro do instrumento.

b) *Descrição e uso.* O prisma é mantido em um anel de cobre (Fig. 346) móvel em torno de um eixo, de maneira a ser facilmente afastada da objetiva; esse eixo faz corpo com um bocal que se pode ajustar à extremidade da luneta.

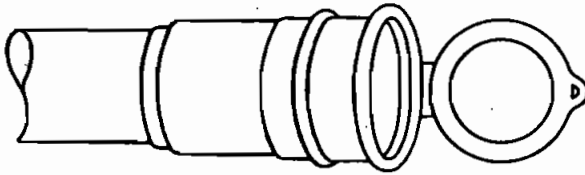


FIG. 346

Para operar com o diastimômetro, faz-se uma primeira leitura da estadia com o prisma afastado e uma segunda com o prisma rebatido; a diferença das duas leituras multiplicada por 100 dá a distância procurada.

c) *Verificação e retificação.* Mede-se exatamente em terreno horizontal uma distância de 100 metros; em uma das extremidades coloca-se a estadia e, a prumo da outra, a face do diastimômetro. Conserva-se a luneta em posição mais ou menos horizontal, faz-se uma leitura da estadia com o diastimômetro fechado, depois, afastando o prisma, faz-se nova leitura: se o instrumento está retificado, a diferença entre as leituras é de 1 m. Se esta condição não for satisfeita, desloca-se o bocal do aparelho e repete-se a operação até que a diferença entre as duas leituras seja exatamente de um metro. O operador tendo procedido à retificação, deverá marcar um traço de referência sobre o bocal e outro no tubo da luneta, a fim de não ser obrigado ulteriormente a nova operação.

d) *Inconvenientes e vantagens.* O diastimômetro, por exigir uma pequena manobra antes de cada visada, oferece emprego menos prático do que a luneta estadimétrica; todavia, sob o ponto de vista da precisão, leva-lhe vantagens, visto não estar sujeito ao erro de paralaxe, muito freqüente nas lunetas que comportam vários fios.

Segundo experiências práticas o grau de precisão dado pelo diastimômetro é pelo menos igual ao obtido com uma luneta estadimétrica, sendo mesmo superior na prática corrente, pela razão precitada.

134 — Exemplo prático

Calcular as distâncias e cotas de pontos levantados com um taqueômetro estadimétrico. Seja a seguinte página de caderneta:

Levantamento topográfico, com taqueômetro estadimétrico, Keuffel & Esser, de um terreno sito à Rua no Bairro de, etc.

Data: de de 19

Operador

(Dados de campo)

(Escritório)

Estações Alturas (h)	Pontos visados P _v	ÂNGULOS		ESTÁ- DIA	DIFE- RENÇAS	Lei- turas do fio médio (m)	Dis- tâncias redu- zidas (D)	Dife- renças de nível (n)	Cotas (h)	Observações e croqui
		Horizontal H	Vertical V							
A ⊙ 1,41m (i)	B 1	0°	—	—	—	—	—	—	m 50,00	Veja a Fig. 347.
		37°35'	+ 4°21'	1,000	0,584	1,292	58,06	+ 4,42	54,64	
	2	139°10'	- 13°14'	0,600	0,554	0,875	52,50	- 12,34	38,19	
		227°42'	- 4°35'	1,154	0,412	1,500	40,94	- 3,28	46,63	
	4	283°13'	+ 6°54'	1,706	0,553	1,000	54,50	+ 6,60	57,01	
		346°27'	+ 14°32'	1,376	0,696	1,410	65,22	+ 16,91	66,91	
B	0°	+ 12°24'	1,082	1,008	1,410	96,15	+ 21,14	71,14		
			1,914							

(*) Na prática esta coluna pode ser dispensada quando as leituras do fio inferior forem números inteiros (pontos 1 e 2).

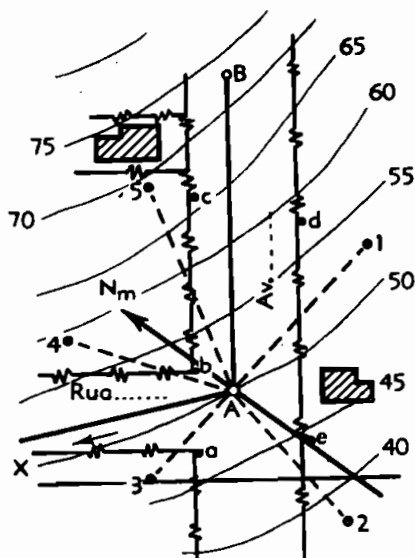


FIG. 347

A primeira e a segunda colunas são destinadas ao registro das estações (⊙), altura do instrumento (i) e pontos visados (P_v), e a terceira e quarta aos ângulos horizontais (H) a contar da estação de vante e aos ângulos verticais, lidos a partir do horizonte (H) ou do zênite (Z).

As leituras dos fios estadiométricos extremos e médio podem ser anotados verticalmente numa coluna ou então, como indicado acima, isto é, as leituras dos fios superior e inferior na 5.^a coluna e a do fio médio na 7.^a. As diferenças de leitura dos fios estadiométricos extremos, isto é, os números geradores (S), vêm registrados na 6.^a coluna.

As colunas seguintes são reservadas para as distâncias reduzidas, diferenças de nível e cotas, calculadas a posteriori, no escritório.

Nas páginas contíguas às de anotações dos valores taqueométricos, são feitos os croquis (Fig. 347), com indicação de pontos, levantados detalhes planimétricos e traçado aproximado das curvas de nível.

Como elucidação, tomamos 6 pontos, com 3 processos de leitura no campo. Os pontos 1 e 2 são obtidos com o processo que empregamos de preferência, de coincidência do fio inferior com uma leitura exata da mira ou estadia, no caso, 1,000^m e 0,600^m. Os pontos 3 e 4 com o processo clássico do fio médio interceptar leituras inteiras na mira (1.500 e 1.000) e os pontos 5 e 6 com uma altura na mira igual a do instrumento (1,41 m).

α) *Distâncias reduzidas.* A fórmula a empregar, para os taqueômetros estadimétricos e analíticos, com círculo vertical, graduado a partir do horizonte, é a seguinte:

$$D = C \cdot S \cdot \cos^2 \alpha = 100 S \cos^2 \alpha$$

Aplicando ao primeiro ponto, temos:

$$D_1 = 100 \times 0,584 \times \cos^2 4^{\circ}21'$$

A tabela dá o valor do produto $100 \times \cos^2 4^{\circ}21' = 99,425$ m e $D_1 = 99,425 \times 0,584 = 58,06$ m (a máquina ou régua de cálculo).

As tabelas para taquimetria de *W. Jordan* dão para o mesmo ponto os valores:

$$58 \times \cos^2 4^{\circ} = 57,7 \quad \text{e} \quad 59 \times \cos^2 4^{\circ} = 58,7 \dots (58,1)$$

$$58 \times \cos^2 5^{\circ} = 57,6 \quad \text{e} \quad 59 \times \cos^2 5^{\circ} = 58,6 \dots (58,0)$$

Interpolando, obteremos:

$$D_1 = 58,05 \text{ m} = (58,4 \times \cos^2 4^{\circ}21')$$

valor idêntico ao anterior.

Para os pontos 2 e seguintes (com a tabela XIV da "Caderneta de Campo" de Lélis Espartel e João Lüderitz):

$$D_2 = 0,554 \times 100 \cdot \cos^2 13^{\circ}14' = 0,554 \times 94,76 = 52,50 \text{ m}$$

$$D_3 = 0,412 \times 100 \cdot \cos^2 4^{\circ}35' = 0,412 \times 99,365 = 40,94 \text{ m}$$

$$D_4 = 0,553 \times 100 \cdot \cos^2 6^{\circ}54' = 0,553 \times 98,56 = 54,50 \text{ m}$$

$$D_5 = 0,696 \times 100 \cdot \cos^2 14^{\circ}32' = 0,696 \times 93,70 = 65,22 \text{ m}$$

$$D_6 = 1,008 \times 100 \cdot \cos^2 12^{\circ}24' = 1,008 \times 95,39 = 96,15 \text{ m}$$

β) *Diferenças de nível.* A fórmula a empregar é a seguinte:

$$n = CS \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \alpha = S \frac{50}{2} \operatorname{sen} 2 \alpha$$

Aplicando-a, ao ponto 1, teremos:

da tabela para $\alpha = + 4^{\circ}21'$ obtém-se o valor

$$50 \operatorname{sen} 2 \alpha = 7,56$$

e

$$n_1 = 0,584 \times 7,56 = 4,42 \text{ m}$$

Pela tabela de *Jordan*, teríamos:

$$58 (1/2 \operatorname{sen} 2 \alpha) = 4,39 \text{ (para } \alpha = 4^{\circ}21')$$

e

$$59 (1/2 \operatorname{sen} 2 \alpha) = 4,46$$

Pela interpolação:

$$n_1 = 58,4 (1/2 \operatorname{sen} 2 \alpha) = 4,42 \text{ m}$$

valor idêntico ao anterior.

Para os pontos 2 e seguintes (tabela III):

$$n_2 = -0,554 \times 22,28 = -12,34 \text{ m}$$

$$n_3 = -0,412 \times 7,965 = -3,28 \text{ m}$$

$$n_4 = 0,553 \times 11,93 = +6,60 \text{ m}$$

$$n_5 = 0,696 \times 24,29 = +16,91 \text{ m}$$

$$n_B = 1,008 \times 20,97 = +21,14 \text{ m}$$

Cotas dos pontos. A fórmula a empregar é a seguinte:

$$H = \underbrace{H + h_i}_{\text{constante}} \pm \underbrace{C \cdot S \cdot 1/2 \operatorname{sen} 2 \alpha}_n - m \quad (296)$$

Aplicando-a, obteremos:

$$H_1 = 50,00 \text{ m} + 1,41 + 4,42 - 1,29 = 54,54 \text{ m}$$

$$H_2 = 50,00 \text{ m} + 1,41 - 12,34 - 0,88 = 38,19 \text{ m}$$

$$H_3 = 50,00 \text{ m} + 1,41 - 3,28 - 1,50 = 46,63 \text{ m}$$

$$H_4 = 50,00 \text{ m} + 1,41 + 6,60 - 1,00 = 57,01 \text{ m}$$

$$H_5 = 50,00 \text{ m} + 1,41 + 16,91 - 1,41 = 66,91 \text{ m}$$

$$H_B = 50,00 \text{ m} + 1,41 + 21,14 - 1,41 = 71,14 \text{ m}$$

Uma máquina de calcular, manual ou, de preferência, elétrica facilita o cálculo permitindo a determinação de grande número de pontos por hora de trabalho.

§ 32 — Taqueômetros auto-redutores

135 — Taqueômetro Sanguet

a) *Determinação das distâncias pelos níveis de rampa.* O taqueômetro auto-redutor de Sanguet, do qual daremos adiante a descrição, é um aparelho muito empregado no levantamento de plantas cadastrais, nos levantamentos para estudos de estradas de ferro, de rodagem, etc., dada a rapidez e exatidão com que se efetuam os trabalhos, sendo aliás aplicação bastante engenhosa dos princípios de estadimetria já expostos.

A distância horizontal se obtém pela diferença de duas leituras feitas numa mira, por uma luneta, em duas inclinações sucessivas, inclinações essas obtidas mecanicamente e das quais se conhece a diferença.

b) *Descrição do aparelho.* O taqueômetro Sanguet se compõe das duas partes principais seguintes:

- 1) destinada à medida dos ângulos azimutais.
- 2) destinada à medida das distâncias e declives.

Para efetuar a primeira medida ele é provido (Fig. 348) dum limbo graduado com alidade e respectivo parafuso de pressão P , que detém à vontade o movimento de rotação do círculo horizontal graduado; um

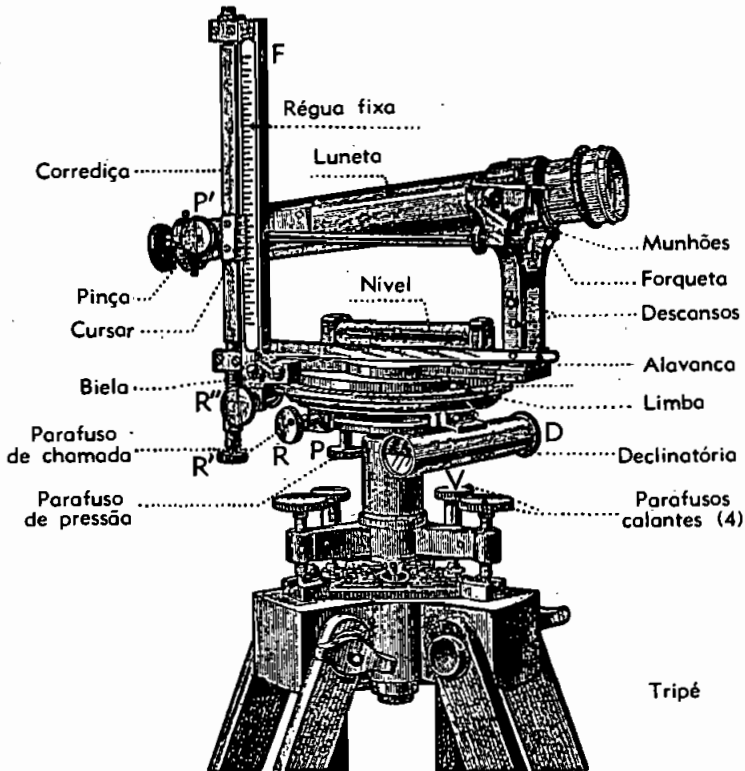


FIG. 348

parafuso diferencial de chamada R serve para completar ou retificar a visada no sentido horizontal e um R' no sentido vertical.

Uma declinatória D , com aparência de uma pequena luneta, fixa ao círculo graduado, é destinada a dar a orientação magnética.

A ocular desta declinatória, adaptada a um duplo tubo, permite a sua inversão no tubo ordinário e é constituída por uma agulha recurvada em suas duas pontas, vendo-se a mais afastada diretamente e a outra refletida num espelho aí adaptado.

O instrumento está num plano coincidente com o meridiano da estação ou orientado quando a ponta, que está mais afastada da vista, confunde-se com a sua imagem refletida; visando-se através da parte

inferior de um vidro de faces planas e paralelas, de que o fundo da declinatória é provido, pode-se ainda colocar uma baliza para fixar a direção N.S., o que nos serve para a sua retificação ou para a medida da declinação em um dado lugar.

Para soltar a agulha bastará fazer sair um pouco a ocular.

A segunda parte, destinada a declividades, consiste em uma barra que tem numa extremidade uma forqueta na qual repousa a luneta e na outra uma escala graduada vertical e mais um nível para calar o instrumento.

A régua graduada fixa tem, em dois esquadros nos extremos, furos cilíndricos, dentro dos quais passeiam com atrito doce as extremidades de uma barra prismática paralela à régua dividida e descansando sobre a ponta de um parafuso de chamada vertical (R').

Uma pinça, levando o vernier, abrange a correção ou barra que pode percorrer de alto a baixo, movimento este orientado pelo parafuso P' .

Esta pinça tem na parte posterior um cutelo de aço que carrega a luneta (invisível na Fig. 348).

A luneta não está equilibrada sobre os munhões, pois estes estão próximos da objetiva a poucos centímetros do centro de gravidade; à esquerda e à direita tem a luneta duas réguas com as quais repousa sobre o cutelo, sendo a face inferior das réguas paralela ao eixo da luneta.

Pode-se pois modificar a posição da luneta, afrouxando o parafuso de pressão ou pinça, e fazendo-a deslizar ao longo da régua vertical, para fixá-la quando estiver feita a visada sobre o ponto desejado, fazendo-se a chamada com o parafuso respectivo; o vernier fixo à pinça indica então sobre a escala de rampa a inclinação do raio visual em partes da projeção horizontal tomada como unidade.

A luneta do taqueômetro Sanguet é astronômica, simples, sem fio suplementar nem vidro analatizador.

O fio horizontal só poderá pois fazer uma visada com uma só posição da luneta, obtendo-se a medida das distâncias por leituras em diversas inclinações da luneta.

Para tal fim a ponta do parafuso de chamada do prisma vertical da régua de rampas está ligada por meio de uma alavanca a um ponto de apoio na própria régua; o braço maior desta alavanca vai contra a face da forqueta, onde se acham quatro descansos ou cabeças de parafusos salientes, dispostos em forma de arco de círculo e limados em forma de plano inclinado.

Pelo próprio peso, o da luneta, e a ação de uma mola (biela) o prisma ou barra, ou melhor cursor, tende sempre a descer, obrigando o braço maior da alavanca a bater nos descansos; soltando esse braço

de um descanso, irá o mesmo bater com força no seguinte: o cursor descendo faz articular o ponto de apoio da alavanca e o eixo da luneta.

c) *Relações diastimométricas e sua aplicação nas distâncias.* Sejam (Fig. 349), O o centro óptico da objetiva e aOA , bOB , cOC e dOD quatro inclinações sucessivas da luneta, a partir de um ponto visado A qualquer, em uma mira taqueométrica.

Dos triângulos semelhantes aOB e AOB , aOc e AOC , etc., e com as anotações da figura, obtemos:

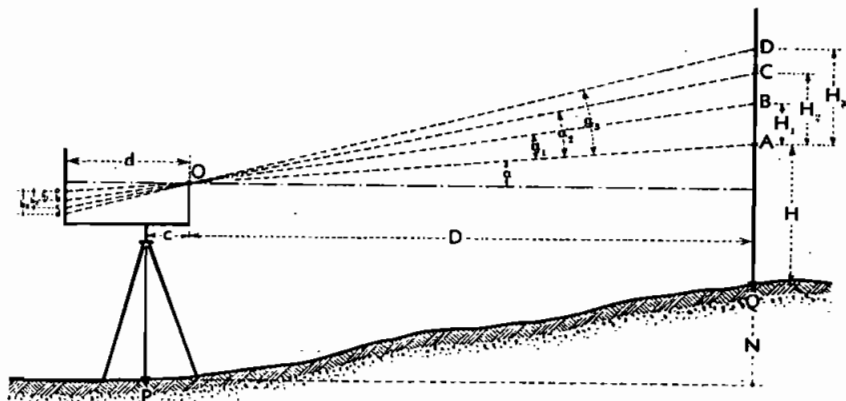


FIG. 349

$$d/h_1 = D/H_1, \text{ donde } D = d/h_1 \times H_1$$

$$d/h_2 = D/H_2, \text{ donde } D = d/h_2 \times H_2$$

$$d/h_3 = D/H_3, \text{ donde } D = d/h_3 \times H_3$$

Os construtores Sanguet, H. Morin, Kern e outros deram os seguintes valores às relações obtidas, chamadas *relações diastimométricas*:

$$h_1/d = \text{tg } \alpha_1 = 0,010 \text{ ou } 1\%, \text{ donde } d/h_1 = 100$$

$$h_2/d = \text{tg } \alpha_2 = 0,018 \text{ ou } 1,8\%, \text{ donde } d/h_2 = \frac{100}{1,8} \quad (297)$$

$$h_3/d = \text{tg } \alpha_3 = 0,022 \text{ ou } 2,2\%, \text{ donde } d/h_3 = \frac{100}{2,2}$$

Os deslocamentos da luneta são feitos com o auxílio de *alavanca* (Sanguet), de tambor *excêntrico* (Kern) ou outro dispositivo; são *independentes* da inclinação inicial da luneta e *constantes*, visto não dependerem senão da posição relativa dos descansos da alavanca ou dos entalhes do excêntrico.

Combinando as relações entre si, ainda se obtém:

$$\frac{h_2 - h_1}{d} = \operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,018 - 0,010$$

$$0,008, \text{ ou } 0,8\%, \text{ donde } \frac{d}{h_2 - h_1} = \frac{100}{0,8}$$

$$\frac{h_3 - h_1}{d} = \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,022 - 0,010 = 0,012 \text{ ou } 1,2\%$$

donde

$$\frac{d}{h_3 - h_1} = \frac{100}{1,2}$$

$$\text{e } \frac{h_3 - h_2}{d} = \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,022 - 0,018 = 0,004 \text{ ou } 0,4\%$$

donde

$$\frac{d}{h_3 - h_2} = \frac{100}{0,4}$$

E as distâncias horizontais podem ser obtidas pelas seguintes 6 relações:

$$D = 100 \cdot H_1; \quad D = \frac{100}{0,4} (H_3 - H_2)$$

$$D = \frac{100}{1,8} \cdot H_2; \quad D = \frac{100}{0,8} (H_2 - H_1) \quad (298)$$

$$D = \frac{100}{2,2} \cdot H_3; \quad D = \frac{100}{1,2} (H_3 - H_1)$$

Na amarração dos pontos de detalhe, utiliza-se a 1.^a relação que é a mais prática, pois basta considerar os centímetros da mira como metros de distância horizontal.

Para maior aproximação na medida dos alinhamentos de uma poligonal, utilizam-se as três relações diretas, e, assim:

$$D = \frac{100}{1 + 1,8 + 2,2} (H_1 + H_2 + H_3) = 20 (H_1 + H_2 + H_3) \quad (299)$$

A vantagem das relações combinadas reside na possibilidade de amarrar pontos, dentro do mato, por exemplo, em que com apenas 0^m,40 de mira visível, se podem marcá-los a 100 metros de distância.

Em virtude das distâncias obtidas serem contadas a partir do centro óptico da objetiva, há uma constante c a considerar, cujo valor é indicado para cada aparelho; no taqueômetro *Sanguet* é de $+ 0^m,12$, no *Kern* (antigo) $- 0^m,08$ e no *Kern de contato* é zero, por ser a luneta analítica e de rotação central.

Nos *aparelhos modernos* são usadas apenas as relações 1 e 2% com prejuízo, a nosso ver, das possibilidades de maior alcance e aplicação em terreno difícil, embora com melhores resultados na taqueometria da precisão.

d) Diferenças de nível. Cotas. Para a leitura das inclinações, pelos ângulos verticais (taqueômetros não redutores) os taqueômetros auto-redutores, são dotados de uma escala de *rampas*, também chamada escala das inclinações ou das tangentes.

A escala que é centesimal, tem divisões principais de 10 em 10 unidades e intermediárias em unidades e meias unidades ou 50 centésimos. Um vernier duplo permite a aproximação direta dos 5 centésimos, ou por estimativa, dos 2,5 centésimos.

Na posição horizontal, a escala tem nos aparelhos antigos, a graduação *zero*, com duplo sinal $+$ ou $-$, correspondente às rampas ascendentes ou descendentes. Nos aparelhos modernos essa graduação é 100, exigindo para obter uma tangente subtrair antes 100 do valor lido; o resultado será afetado do sinal mais ou menos.

A tangente lida não é a natural, para o raio $= 1$, e sim multiplicada por 100. Assim, por exemplo, se num *acrive* temos diretamente, na escala das tangentes o valor 127,45, a tangente natural do ângulo correspondente é:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{127,45 - 100}{100} = + 0,2745$$

Num *declive*, se o valor lido, por estima, for de 83,775, a tangente respectiva, terá para valor:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{83,775 - 100}{100} = - 0,16225$$

A diferença de nível é dada pela mesma fórmula estadimétrica obtida em função da distância horizontal: $N = i \pm D \operatorname{tg} \alpha - H$ em que:

N é a diferença de nível dos dois pontos;

i a altura do centro do taqueômetro acima do ponto de estação;

H a leitura inicial, que de preferência se faz igual a 1 m 1,50, 2 m etc.; pode ser qualquer, e a tangente deve ser lida em relação à leitura inicial;

α o ângulo cuja tangente é obtida da escala de rampas.

e) *Retificações do taqueômetro Sanguet.* O taqueômetro de Sanguet (Fig. 348), é composto de uma luneta astronômica L , com dois fios do retículo a 90° , que gira em torno de um eixo que passa por O ; de uma régua F ao longo da qual desliza uma corrediça com um parafuso de pressão, e que faz corpo com a luneta, permitindo fixá-la na posição que se quiser. A corrediça está preso um vernier que permite ler tangentes em uma escala que existe na mesma régua. Presa à régua há uma alavanca que fazendo ponto de apoio em K permite dar inclinações diferentes à luneta, desde que se a desloque de a para b , c ou d . É com estes movimentos que o instrumento satisfaz ao princípio que mostramos.

Então, a cada posição da alavanca, nos quatro descansos a , b , c e d corresponde um valor de tangente lido em T , e as suas diferenças entre b e a , c e a , e d e a é que são exatamente iguais a 0,010, 0,018 e 0,022. A cada posição de alavanca, e portanto da luneta, corresponde também uma leitura da mira.

A posição inicial da luneta, com a alavanca no descanso a , é escolhida arbitrariamente, fazendo porém, de preferência uma leitura inteira sobre a mira. Uma vez escolhida essa posição inicial se desloca a alavanca para fazer as três leituras seguintes.

Como o taqueômetro estadimétrico, o auto-redutor também está sujeito a umas tantas retificações que passamos a estudar.

1.ª retificação: — O plano tangente à linha de fé do nível preso ao limbo deve ser perpendicular ao eixo principal do instrumento. A verificação e retificação são feitas exatamente como no caso do taqueômetro estadimétrico.

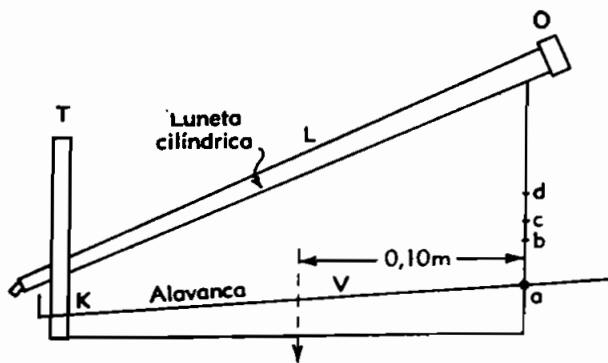


FIG. 350

2.^a retificação: — O eixo de colimação da luneta deve ser perpendicular ao eixo de rotação. A verificação se faz do seguinte modo: Visa-se um ponto ao longe, tira-se a luneta de seus suportes e dá-se-lhe uma rotação de 180° em torno de seu eixo geométrico, colocando-a novamente em seu lugar e procurando o ponto visado.

A não coincidência do cruzamento dos fios do retículo com o ponto indica a falta de perpendicularismo procurado, o desvio traduzindo o dobro do erro, corrige-se a metade com os parafusos horizontais do retículo que fazem mover o fio vertical. Acerta-se a pontaria sobre o ponto com o parafuso de chamada do limbo e repete-se a operação.

3.^a retificação: — O eixo de rotação da luneta deve ser perpendicular ao eixo principal do instrumento. Verifica-se fazendo o cruzamento dos fios do retículo correr de alto a baixo por um fio a prumo, que se coloca a uma certa distância do instrumento. Se houver desvio, corrige-se por tentativa com um parafuso que existe numa das munhoneiras da luneta, e que permite modificar sua inclinação em relação ao eixo principal do instrumento.

4.^a retificação: — Quando o zero da escala de tangente estiver em coincidência com o zero do vernier, o eixo de colimação da luneta deverá ser perpendicular ao eixo principal do instrumento. Verifica-se do seguinte modo: — Instala-se o instrumento em um ponto e, a uma distância de cerca de 100 metros em terreno levemente inclinado, faz-se uma leitura sobre a mira igual a altura do instrumento e lê-se a tangente φ_1 do ângulo de inclinação correspondente; em seguida, coloca-se o instrumento onde estava a mira, e esta onde estava o instrumento; faz-se nova leitura sobre a mira igual a nova altura do instrumento, e lê-se a tangente φ_2 que deverá ser igual a φ_1 se houver o perpendicularismo procurado. Se φ_2 for diferente de φ_1 toma-se a média,

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

e corrige-se afrouxando os parafusos que prendem o vernier, e obrigando o zero do mesmo a coincidir com φ . Deve-se repetir a operação até a perfeita coincidência.

5.^a retificação: — Verificação das constantes. Colocando-se uma mira exatamente a 100, 10 m do centro do instrumento, se tratar-se de um taqueômetro Sanguet, ou 99,92 m o caso de um Balu-Kern, em terreno tão plano quanto possível, e fazendo a série de leituras sobre a mira, suas diferenças devem ser iguais a 1,000 m, 1,800 m, e 2,200 m ou:

$$100 = \frac{1,000}{0,010} = \frac{1,800}{0,018} = \frac{2,200}{0,022}$$

Se isto não se verificar, o operador nenhuma retificação poderá fazer, devendo então o instrumento ser ajustado numa oficina de mecânica especializada.

6.^a retificação: — O eixo da declinatória deve ser paralelo ao eixo de colimação da luneta quando o zero do limbo estiver em coincidência com o zero do respectivo vernier. Marca-se no terreno com uma bússola comum uma linha na direção norte-sul magnética. Em seguida coloca-se o instrumento em uma das extremidades, acerta-se o zero do vernier com o zero do limbo, e visa-se uma baliza na outra extremidade; a agulha magnética da declinatória deverá estar com a ponta norte respectiva marcando zero. Se não estiver, há um parafuso que permite mover a caixa da declinatória e retificá-la.

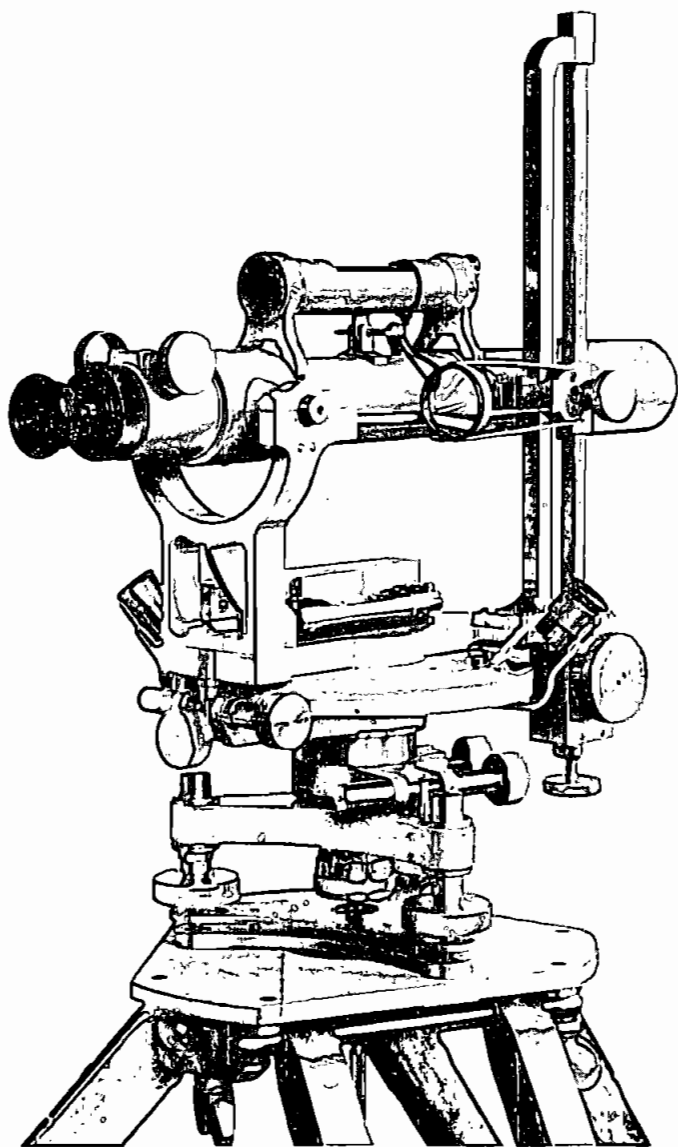


FIG. 351

136 – Taqueômetro Balu – Kern

Este excelente taqueômetro (Fig. 351), fabricado por Kern Aarau, na Suíça, tem aprovado integralmente e é um aperfeiçoamento dos aparelhos originários, tipo Sanguet.

Tem características que o tornam muito prático nas medidas e de grande rendimento.

O *limbo horizontal*, coberto, com um diâmetro de 146 mm, é dividido em 360° , graduado em graus e em terços de grau ($20'$).

As leituras são feitas com o auxílio de 2 microscópios móveis e verniers que permitem a avaliação direta dos $30''$ ou por estima dos $15''$.

A luneta tem objetiva acromática de 30 mm de diâmetro e ocular negativa de Huyghens, distância focal de ~ 300 mm, aumento de 34 diâmetros e o retículo, com 2 fios (horizontal e vertical) é gravado nitidamente sobre o vidro.

Uma *escala vertical* para leitura das tangentes, com *tambor de redução* e 3 *contatos*, para as proporções 10, 18 e 22 mm por metro; a divisão da escala é feita de $1/2$ em $1/2\%$, permitindo a leitura direta no vernier de $0,05\%$, com o auxílio da lupa móvel.

A disposição da luneta e dos microscópios é tal que permite ao observador, de um mesmo ponto, com deslocamento lateral da cabeça, fazer todas as leituras.

A técnica operacional é idêntica à dada para o *Sanguet*.

137 – Taqueômetros universais (de contato)

Os taqueômetros auto-redutores dão resultados pouco inferiores aos estadimétricos, razão porque a associação dos dois princípios num só aparelho traz a vantagem de se dispor de um ou outro tipo de taqueômetro, conforme a exigência do trabalho, ou, então, dos dois tipos para maior aproximação e verificação das medidas.

A fábrica *Kern Aarau*, na Suíça, constrói dois ótimos tipos de taqueômetros, ditos de contato, um grande de 12 cm (diâmetro do limbo) e um médio de 9 cm.

1) *Taqueômetro Kern de contato (12 cm)*. O taqueômetro de contato patenteado *Kern* (Fig. 352) é um teodolito auto-redutor com luneta analítica e de revolução completa, com círculos vertical e horizontal, fios estadimétricos e mecanismo de contato, auto-redutor.

a) A *base* do instrumento repousa sobre 3 parafusos calantes protegidos, e o modo de fixação do mesmo ao tripé permite uma rápida montagem.

b) O *limbo horizontal* permite a medida dos ângulos repetidos ou reiterados, com os respectivos parafusos de pressão e de chamada.

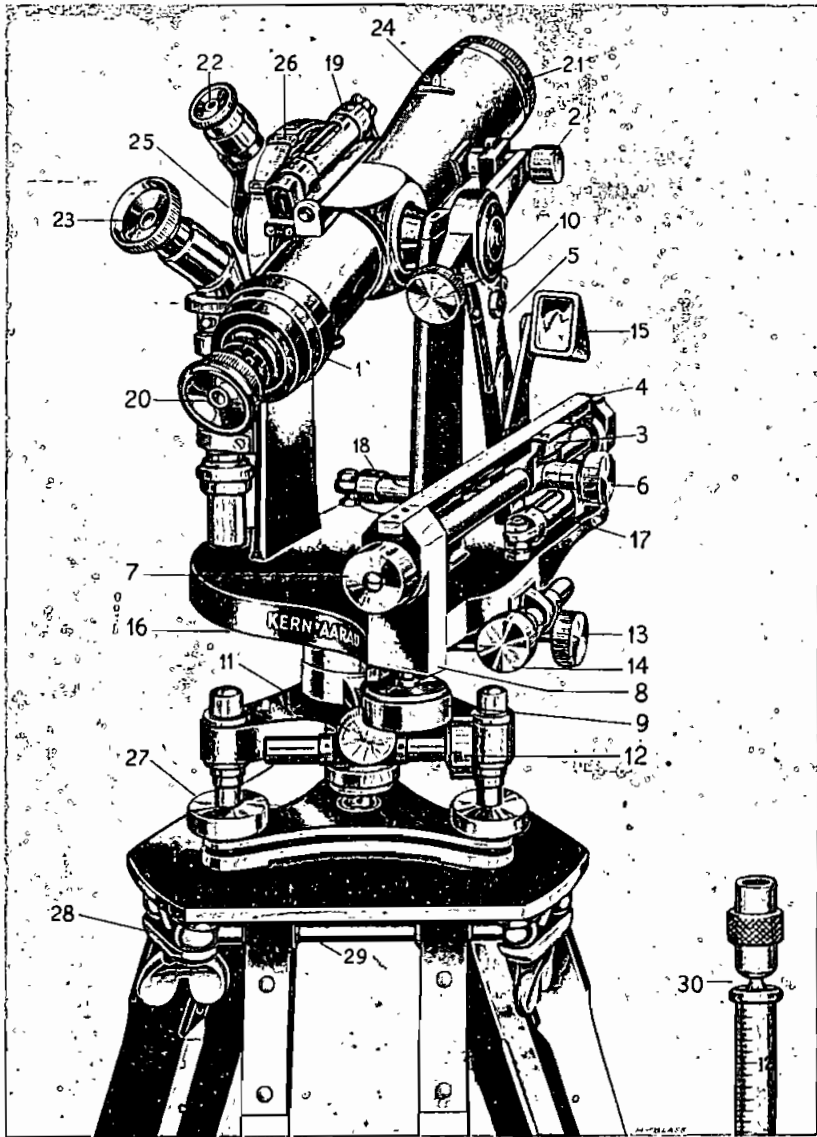


FIG. 352

Nomenclatura das principais peças

- | | |
|--|--|
| 1) Anel de focalização da imagem; | 13) Parafuso de pressão da alidade; |
| 2) Parafuso de fixação da luneta e mecanismo de contato; | 14) Parafuso micrométrico da alidade; |
| 3) Suporte e vernier da escala de rampas; | 15) Lupa com prisma para leitura das inclinações; |
| 4) Escala de rampas (horizontal); | 16) Círculo azimutal coberto (20"); |
| 5) Braço de alavanca do mecanismo de contato; | 17 e 18) Níveis do círculo horizontal; |
| 6) Parafuso de pressão do movimento vertical da luneta; | 19) Nível da luneta e círculo vertical; |
| 7) Parafuso micrométrico zenital da luneta; | 20) Ocular da luneta analítica com anel de focalização do retículo; |
| 8) Suporte do mecanismo auto-redutor; | 21) Objetiva da luneta; |
| 9) Tambor das relações diastimométricas; | 22) Lupa para leitura do círculo vertical; |
| 10) Parafuso de fixação da luneta (quando o mecanismo auto-redutor estiver desligado); | 23) Microscópio para leitura do círculo horizontal, com anel de focalização; |
| 11) Parafuso de pressão do limbo; | 24 e 25) Visor e alvo para a pontaria aproximada; |
| 12) Parafuso micrométrico do limbo; | 26) Círculo vertical (aprox. 1'); |
| | 27) Parafuso calante; |
| | 28) Parafuso de fixação do tripé; |
| | 29) Gancho de suspensão do prumo; |
| | 30) Bastão-prumo. |

c) Os *suportes da luneta*, a cobertura do círculo horizontal e os suportes do mecanismo de contato constituem uma só peça, dificilmente desretificável.

d) A *luneta*, reversível do lado da ocular, tendo um comprimento de 27 cm, é dotada de uma lente interna para focagem. A objetiva tem 40 mm de abertura livre e um aumento de 27 vezes, com imagens claras e nítidas.



FIG. 353

e) Um *nível* e um visor são presos à luneta e dois níveis fixos à alidade servem para horizontalizar o instrumento.

f) O *limbo horizontal* metálico, com 12 cm, de diâmetro, é dividido de 5 em 5 minutos, numerado de grau em grau, e dispõe de um vernier com a aproximação de 20" (Fig. 353).

g) O *limbo vertical* tem 8 cm de diâmetro e dá a aproximação de 1 minuto.

h) A *escala de rampas*, disposta horizontalmente, apoia-se no suporte do dispositivo de contato. Um vernier permite a leitura direta de 0,05% e por estima de 0,025%. A divisão vai de 0 a + 90% e de 0 a - 85%.

i) O *mecanismo de contato* ou auto-redutor, na extremidade da direita do eixo de rotação da luneta, dispõe de uma alavanca em ângulo.

reto, tendo uma das extremidades ligada por um parafuso de contato à luneta e a outra numa corrediça ligada ao vernier da escala de rampas.

A modificação de inclinação da luneta, necessária à determinação da distância reduzida, é obtida por um excêntrico situado no suporte do mecanismo de contato, do lado da ocular e contra o qual a extremidade da haste corrediça do porta-vernier é mantida por uma mola. O excêntrico é um disco em aço extra duro com três entalhes.

O intervalo entre dois entalhes corresponde exatamente a uma constante de multiplicação de 100, de maneira que o intervalo entre o primeiro e o terceiro entalhe representa uma constante de multiplicação de 50.

Se forem necessários medidas com precisão superior a ± 6 cm por 100 metros, pode-se colocar junto à objetiva um prisma taqueométrico de dupla imagem para obter uma precisão de 1 a 2 cm por 100 metros.

j) Uma *bússola declinatória*, com agulha imantada de 10 cm, se adapta lateralmente sobre o prato do círculo horizontal.

k) Um *bastão-prumo* com nível graduado em cm para a medida das alturas do instrumento, recomenda-se particularmente para as poligonais niveladas.

l) *Características.* Aproximação do vernier com microscópio: direta 20", por estima 10".

Leitura direta na escala de rampas: 0,05%;

Inclinação máxima da luneta $+ 90\%$ até $- 85\%$;

Sensibilidade do nível para 2 mm = 40";

Exatidão do nível = $\pm 1,5''$, isto é, 0,7 mm por 100 m;

Erro médio de um ângulo medido uma vez $\pm 6''$;

Erro médio de uma distância medida uma vez:

para a constante 100 = ± 10 cm

para a constante 50 = ± 6 cm

Erro médio de uma inclinação medida uma vez = $\pm 0,02\%$;

Até 150 metros, pode-se avaliar os milímetros sobre uma mira dividida em centímetros e contar os centímetros até a distância de 300 metros.

138 — Taqueômetros modernos

Os modernos construtores de aparelhos topográficos tem introduzido novos dispositivos nos taqueômetros, dando-lhes maior precisão e facilitando as operações de cálculo.

a) *Taqueômetro Bosshardt-Zeiss (Redta)*. Assim, a fábrica Zeiss, de Iena, constrói o taqueômetro redutor *Bosshardt-Zeiss "Redta"* para os levantamentos de poligonais e de detalhes pelas coordenadas polares e a amarração de pontos trigonométricos.

A leitura da distância horizontal é direta e contada do centro do taqueômetro ao ponto de estacionamento de uma mira especial, mantida em posição horizontal.

Para facilitar as leituras, a medida dos centímetros e milímetros é feita com o auxílio de uma placa plana de vidro móvel, colocada na parte inferior da objetiva e de um tambor graduado.

As imagens obtidas são claras, sem superposição, com eliminação óptica de todos os erros pessoais, e permitem a obtenção das distâncias já reduzidas ao horizonte, independente da inclinação da luneta.

Para as diferenças do nível, no entretanto, é necessária a medida dos ângulos verticais, como no processo trigonométrico comum.

A precisão nas distâncias é de 2 a 3 cm por 200 metros.

Os resultados de muitas experiências dão a economia de tempo, tanto nas operações de campo como nas de escritório, nos trabalhos da poligonal ou no levantamento de detalhes, entre 20 e 50%.

b) *Prisma estadimétrico e duplicador taquimétrico "Wild"*. A fábrica *Wild*, de Heerbrugg, na Suíça, fornece dispositivos acessórios que se adaptam a seus teodolitos repetidores T1, para a maior precisão na medida das distâncias; são eles, o prisma estadimétrico e o duplicador taquimétrico.

O *prisma estadimétrico*, colocado sobre a objetiva da luneta, serve para obter uma dupla imagem de uma mira, com vernier, colocada horizontalmente. O vernier permite ler uma distância de 100 metros com uma aproximação de 2 a 3 cm. Quando as visadas são inclinadas, a redução ao horizonte é obtida multiplicando-se a distância obtida pelo co-seno do ângulo de inclinação.

O *duplicador taquimétrico* se fixa igualmente sobre a objetiva; é provido de um micrômetro óptico e produz uma dupla imagem da mira horizontal. Em boas condições de observação pode-se alcançar uma precisão de $1/5\ 000$ da distância medida; para as distâncias inclinadas multiplica-se o resultado pelo co-seno do ângulo de inclinação.

c) *Taqueômetro "DKR", Kern*. Os fabricantes Kern & Cia. S/A, em Aarau, na Suíça, lançaram recentemente no mercado, em sua nova linha de construção do Eng.^o Henri Wild, um modelo de teodolito-taqueômetro auto-redutor "DKR" (Fig. 354), baseado no "*princípio de Hammer*", ou das curvas logarítmicas gravadas no campo da luneta e que permitem obter tanto as distâncias reduzidas, como as diferenças de nível entre a estação do instrumento e o ponto visado, com segurança, comodidade e rapidez.

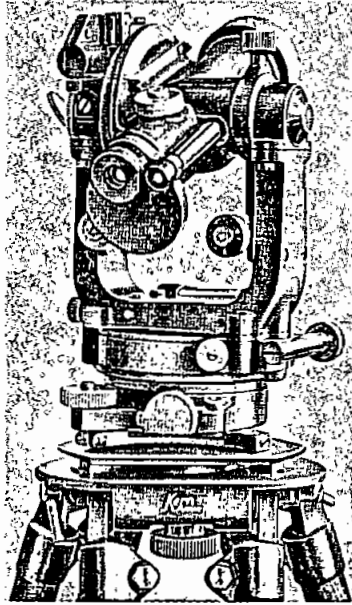


FIG. 354

O teodolito DKR tem círculo duplo, é um taqueómetro auto-reductor, pois com uma mira vertical graduada em centímetros e o dispositivo auto-reductor citado permite ler diretamente a distância horizontal e a diferença de nível, para inclinações que vão até 40 graus.

A luneta analítica, de focagem interna, tem uma abertura de 45 mm e um aumento de 27 vezes. No campo visual da luneta vêem-se quatro linhas de fraca curvatura um traço vertical formado de duas partes, a cruz central da linha de visada, assim como dois traços estadimétricos horizontais e curtos (Fig. 355). Os fios superior e inferior, ou sejam as curvas exteriores tem um afastamento proporcional à função trigonométrica $\cos^2 \alpha$ e servem para a leitura das distâncias. As duas curvas interiores são obtidas de maneira a representar a função $\sin \alpha \cos \alpha$ e servem para determinar as diferenças de nível.

O citado diagrama estadimétrico curvilíneo, é gravado sobre um disco em vidro que gira ao redor de um centro situado fora da luneta e cuja rotação é provocada pelo basculamento desta última.

O traço vertical, a cruz central e os traços estadimétricos são gravados em segunda placa, de vidro fixo. A construção é de tal modo que os traços da placa de vidro e os do diagrama curvilíneo aparecem nítidos simultaneamente. É possível fazer-se pontaria da cruz central para o ponto ou sinal visado, obtendo-se na mesma ocasião as leituras de distância e diferença de nível.

O afastamento das curvas é tal que a constante de multiplicação é 100 para a medida das distâncias.

Na medida das alturas, utiliza-se a constante 20 para inclinações fracas (0° a 12°), 50 para as inclinações médias (12° a 27°) e 100 para as inclinações fortes (27° a 40°).

A constante a empregar é indicada por pequenos traços colocados em intervalos curtos entre as curvas de altura. A constante 20 é marcada por traços duplos repetidos, a constante 50 por grupos de cinco traços próximos e a constante 100 por traços isolados.

A Fig. 356 representa a constante 20, que se reconhece pelas pequenas marcas verticais.

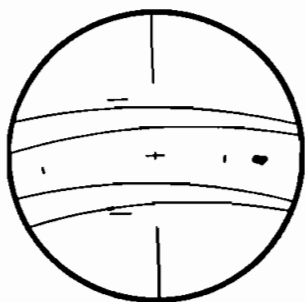


FIG. 355

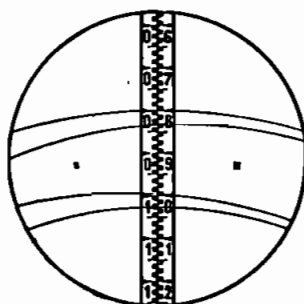


FIG. 356

Quando, por exceção, se apresentarem inclinações superiores a 40° , pode-se utilizar os dois traços estadimétricos horizontais, superior e inferior, para a leitura do número gerador empregando-se então, as fórmulas conhecidas da estadimetria.

As constantes para esses dois traços são

$$c = 100 \quad \text{e} \quad i = 0$$

Contrariamente a outras soluções, na luneta telemétrica e auto-reduzora deste taqueômetro o operador pode usar a *totalidade do campo visual*, o que de fato é vantajoso.

A *precisão das medidas*, obtidas diretamente, é semelhante à dada por qualquer luneta da mesma potência óptica, munida dos fios estadimétricos de "Reichenbach" com a utilização de uma mira vertical.

139 – Calcular as distâncias e cotas de diversos pontos levantados com taqueômetro auto-reduzora

Seja a seguinte página de caderneta de um levantamento taqueométrico:

Exemplo prático (Taqueômetro auto-reduzora).

a) *Página de caderneta.*

Levantamento taqueométrico de
 DATA: de de 19.....

Aparelho:
 Taqueômetro
 auto-reductor
 (Balu-Kern)
 $i = -0,06$ m

Dados de campo

Escritório

Estações Alt. Instr. (h_i)	Pontos vis-los P_v	Ângulos horizontais (α)	Leituras na mira (l)	Inclinações (φ) (tangentes)	DISTÂNCIAS		Diferença de nível (n)	Cotas (C_p)
					Por relações distimo- métricas	Constante (-1)		
B ⊙ 1,43 m(h_i) C41=64,60m	C ⊙	0°	a — 1,000 b — 1,962 c — 2,733	+ 4,05 104,05	•	96,28	m. + 3,90	69,83
	1	28°12'	a — 0,800 b — 1,357 c — 1,200	— 0,15 99,85 5,75	•	55,70	— 0,08	65,05
2	2	74°18'	a — 1,200 b — 1,534	— 5,75 94,30	•	41,75	— 2,38	82,92
	3	74°18'	a — 1,000 b — 1,867 c — 1,600	— 6,65 91,35 6,50	•	72,25	— 6,25	58,68
4	4	104°32'	a — 2,863 b — 3,276 c — 1,500	— 94,50 3,47 96,53	•	103,48	— 5,69	59,24
	A ⊙		a — 2,828 b — 3,891	— 2,20 97,80	•	132,82	— 4,61	58,48
5	5	121°11'	a — 2,000 b — 2,371	— 2,20 97,80	•	92,75	— 2,04	61,89
	6	133°07'	a — 1,983	— 1,95 98,05	•	58,30	— 1,14	63,79

NOTA: • Em nossa prática individual usamos nesta coluna, em lugar de zero (0) a, b e c, correspondentes aos contatos, traços horizontais nas falhas. No caso de duas observações intermediárias, a 2.ª, c a 4.ª, por exemplo, anotamos: $\frac{1,200}{1,200}$ o que nos parece mais fácil e menos sujeito a erros. Quando as leituras são completas ou somente a 1.ª e 2.ª, não há necessidade de letras ou traços.
 •• Em desenhos na escala 1:1000 e inferiores, o valor de i é desprezível.

CROQUIS E OBSERVAÇÕES

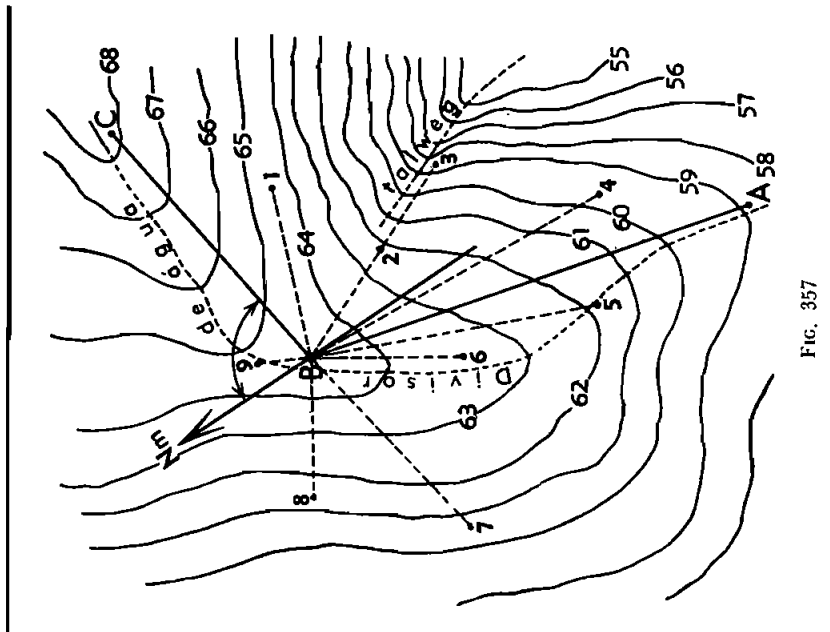


Fig. 357

Como já vimos o taqueômetro auto-redutor, muito empregado no levantamento de plantas cadastrais e nos levantamentos para estudos de estradas de rodagem e de ferro em vista da rapidez e da exatidão com que se efetuam as medidas, é uma aplicação bastante engenhosa dos princípios da estadimetria.

A distância horizontal se obtém pela diferença de duas ou mais leituras feitas numa mira, por uma luneta, em duas ou mais inclinações sucessivas, inclinações essas obtidas mecanicamente conhecendo-se sua diferença.

As relações diastimométricas, já definidas, em ordem crescente, dão as alturas ou diferenças de leitura de 4, 8, 10, 12, 18 ou 20 mm por metro de distância horizontal sobre uma mira vertical.

A relação 4 mm por metro, dada nos taqueômetros antigos, tipo *Sanguet*, pelo deslocamento da alavanca do terceiro ao quarto descanso ou nos taqueômetros modernos, tipo *Kern*, pelo deslocamento dos contatos 18 e 22 do tambor de redução, convém aos levantamentos desenhados em escala de 1/5 000 ou menores. Com miras de 4 metros de altura, pode-se alcançar 800 metros, com aproximação de meio decâmetro.

A relação prática 10 mm por metro é indicada para os levantamentos nas escalas 1:1 000 a 1:2 000, pois que se apreciam perfeitamente bem até 200 e mesmo 250 m, os centímetros que correspondem aos metros e os milímetros até 150 m, que correspondem aos decímetros.

Para as medidas precisas dos alinhamentos devem ser empregadas todas as relações e para a amarração dos pontos de detalhe basta a relação decimal 10 que possibilita escrever diretamente na caderneta a distância horizontal de cada ponto levantado. No cálculo de qualquer distância deve-se levar em conta o acréscimo ou subtração da constante do taqueômetro empregado (distância do eixo de rotação da luneta ao centro do instrumento = ± 6 a 10 cm). Quando coincidentes, como no taqueômetro de contato *Kern*, essa constante é nula).

Para facilitar a compreensão dos cálculos que se seguem, chamemos 0 (zero), *a*, *b*, *c*, os quatro descansos ou contatos do taqueômetro, na ordem em que se acham de baixo para cima (alavanca) ou da esquerda para a direita (tambor).

As relações diastimométricas a empregar para obter a distância horizontal, em função das posições da luneta serão:

$$\begin{array}{l}
 H_1 \dots 1\% \quad \text{ou } 0,010 \quad 1.^\circ \text{ e } 2.^\circ \text{ descanso} \\
 H_2 \dots 1,8\% \quad \text{ou } 0,018 \quad 1.^\circ \text{ e } 3.^\circ \text{ descanso} \\
 H_3 \dots 2,2\% \quad \text{ou } 0,022 \quad 1.^\circ \text{ e } 4.^\circ \text{ descanso} \\
 H'_2 \dots 0,8\% \quad \text{ou } 0,008 \quad 2.^\circ \text{ e } 3.^\circ \text{ descanso} \\
 H'_3 \dots 1,2\% \quad \text{ou } 0,012 \quad 2.^\circ \text{ e } 4.^\circ \text{ descanso} \\
 H''_3 \dots 0,4\% \quad \text{ou } 0,004 \quad 3.^\circ \text{ e } 4.^\circ \text{ descanso}
 \end{array} \quad (300)$$

As duas primeiras colunas da caderneta são idênticas as de estadiometria; na terceira e na quinta coluna registram-se os ângulos horizontais (α), e os ângulos verticais dados pelas tangentes ou inclinações (φ) com quatro casas decimais, obtidas da relação dada $\left(\frac{\varphi - 100}{100}\right)$

As leituras na mira são anotadas na quarta coluna, completas como no vértice A e somente duas ou três quaisquer como nos outros pontos de detalhe, precedidas das letras correspondentes aos descansos indicativos das relações a empregar para o cálculo das distâncias horizontais.

As colunas seguintes são reservadas para as distâncias horizontais (diretas e com a constante i), bem como as diferenças de nível (n) e cotas dos pontos (C_p).

Como no exemplo anterior, é indispensável o croqui com o traçado aproximado das curvas de nível, divisores, água, thalwegs e pontos levantados.

b) *Distâncias horizontais.* As relações a empregar, de acordo com as inclinações da luneta, são as seguintes:

$$D = \frac{H_1}{0,010} = \frac{H_2}{0,018} = \frac{H_3}{0,022} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{0,050} = 20(H_1 + H_2 + H_3) \quad (301)$$

e, ainda, outras, pelas combinações possíveis:

$$D = \frac{H'_2}{0,008} = \frac{H'_3}{0,012} = \frac{H''_3}{0,004} = \frac{H_2 + H_3}{0,040} = \frac{H_1 + H_2}{0,028} = \frac{H_2 + H'_3}{0,03} = \frac{H_3 + H'_2}{0,03} = \text{etc.} \dots \quad (302)$$

para que essas igualdades realmente ocorram, seria preciso que todas as leituras fossem exatas, o que na prática não acontece, ocasionando pequenas diferenças entre as médias obtidas das relações simples e das combinadas.

Se cada distância fosse obtida, primeiro pela relação e em seguida feita a média aritmética de todos os resultados obtidos, todas as leituras teriam o mesmo *peso*, o que não se justifica, pois os erros nas distâncias são tanto menores quanto maior for a relação empregada.

A regra geral consiste em dividir a *soma das leituras pela soma das relações empregadas*, o que dá a média mais lógica e racional.

1) *Distância de B a C (Estação de vante):*

$$D'_c = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{0,05} = 20 (0,962 + 1,733 + 2,119) = 96,28 \text{ m}$$

sendo

$$H_1 = 1,962 - 1,000 = 0,962$$

$$H_2 = 2,733 - 1,000 = 1,733$$

$$H_3 = 3,119 - 1,000 = 2,119$$

pelas relações simples encontramos 96,20^m, 96,28^m e 96,31^m, cuja média é 96,26^m, pouco difere da média combinada acima, que dá o máximo de precisão.

Sendo o taqueômetro empregado o *Balu-Kern*, das distâncias obtidas deve ser subtraída a constante $i = 6$ cm.

Assim $D_c = 96,28 - 0,06 = 96,22$ m.

2) *Distância de B ao ponto 1:*

$$D'_1 = \frac{H_1}{0,010} = 100 \times H_1 = 100 (1,357 - 0,800) = 55,70$$

c

$$D_1 = 55,70 - 0,06 = 55,64 \text{ m}$$

As distâncias calculadas com esta relação são as mais práticas e usadas preferencialmente, pois prescindem do emprego de qualquer tabela ou gráfico. As anotações das distâncias podem ser feitas diretamente, à vista do terreno, o que facilita a constatação de qualquer erro.

3) *Distância de B ao ponto 2:*

$$D'_2 = \frac{H'_2}{0,008} = 100 \frac{H_2}{0,8} = \frac{100 \times 0,334}{0,8} = 41,75 \text{ m}$$

A utilização da tabela IV facilita o cálculo com todas as relações diastimométricas; assim para o ponto acima, na relação $\frac{n}{0,8}$, obtemos da referida tabela:

$$\text{para } n = 33 \dots\dots\dots 33/0,8 = 41,25$$

$$\text{para } n = 0,4 \dots\dots\dots \text{diferença} = 0,50$$

e

$$\text{para } n = 33,4 \dots\dots\dots D'_2 \quad 41,75 \text{ m}$$

e

$$D_2 = 41,75 - 0,06 = 41,69 \text{ m}$$

4) *Distância de B ao ponto 3:*

$$D'_3 = \frac{H'_3}{0,012} = \frac{100 \times H_3}{12} = \frac{100 \times 0,867}{12} = 71,67 + 0,583 = 72,25$$

resultado também obtido da relação $n/12$ da tabela IV.

e
$$D_3 = 72,25 - 0,06 = 72,19 \text{ m}$$

5) *Distância de B ao ponto 4:*

$$D'_4 = \frac{H_2 + H_3}{0,040} = \frac{100 (H_2 + H_3)}{4} = \frac{100 (1,863 + 2,276)}{4} = 103,48$$

No caso de se empregar a tabela para a relação $n/18$, obtemos:

para $n = 186$	103,33
e $n = 0,3$ — (Diferença)	0,17
	103,50 m

e para a relação $n/2$, 2, em exemplos como este, em que $n = 100 \times 2,287 = 228,7$ é maior do que o máximo da tabela ($n = 199$), assim se procede:

para $n = 100$	45,45
e $n = 127$	57,73
e $n = 0,6$ (Diferença)	0,27
	103,45 m

e pela média, obtemos $D'_4 = 103,48$.

Como vemos, a relação combinada, além de mais precisa, é mais rápida de calcular.

A distância procurada

$$D_4 = 103,48 - 0,06 = 103,42 \text{ m}$$

6) *Distância de B a A (estação de ré).* Só foram feitas as 3 primeiras leituras na mira, em vista de um obstáculo impedir uma menor 1.^a leitura e por ultrapassar a 4.^a a altura da mira, em casos tais, na prática, para a medida precisa dos alinhamentos, deve-se medi-los, nos dois sentidos, ou então repetir nova série de medidas com outros des-cansos e pela média obter valores mais aproximados.

No caso em apreço, teremos:

$$D'_{A} = \frac{H_1}{0,010} = 100 \cdot H_1 = 100 \times 1,328 = 132,80 \text{ m}$$

também

$$D'_A = \frac{H_2}{0,018} = \frac{100 \times H_2}{1,8} = 132,84 \text{ (pela tabela)}$$

e, pela média,

$$D'_A = 132,82 \text{ m}$$

por fim:

$$D_4 = 132,82 - 0,06 = 132,76 \text{ m}$$

7) *Distância de B ao ponto 5:*

$$D'_5 = \frac{H''_3}{0,004} = \frac{100 \times H''_3}{0,4} = \frac{100 \times 0,371}{0,4} = \frac{100 \times 0,742}{0,8} = 92,75 \text{ m}$$

Multiplicamos a fração por 2 para poder calcular com a relação $n/0,8$ da tabela.

$$D_5 = 92,75 - 0,06 = 92,69 \text{ m}$$

8) *Distância de B ao ponto 6:*

$$D_6 = 100 (1,583 - 1,000) - 0,06 = 58,24 \text{ m}$$

c) *Diferenças de nível. Cotas.* A escala de *declives* ou *rampas* dos taqueômetros auto-redutores dão, como dissemos, as *tangentes* dos ângulos verticais de inclinação e tem divisões principais numeradas de 10 em 10 ou de 5 em 5 unidades e divisões secundárias. As divisões principais são tomadas para unidade e exprimem diferenças de nível em metros para uma distância horizontal de 100 metros. As divisões secundárias correspondem a meio metro e o vernier (simplex ou duplo conforme o taqueômetro) dando o $1/10$ das divisões da escala, permite ler os centímetros de cinco em cinco, correspondentes aos décimos das divisões da escala.

A divisão 0 ou 100 da escala corresponde à posição horizontal da luneta, se o taqueômetro estiver convenientemente retificado.

Quando se nivelam pontos de detalhe, não é necessário maior aproximação do que a direta dada pelo vernier, de 5 em 5 cm por 100 m. Somente em nivelamentos trigonométricos dos vértices de uma poligonal, por exemplo, deve-se estimar os centímetros com o auxílio de uma lupa (+ 8,46, 8,48, ... em lugar de 8,45 ou 8,50).

O erro resultante do cálculo, com dados inteiros, não pode exceder 0,02 m por hectômetro de distância horizontal, o que é pequeno e até inferior a outros erros a que a taqueometria está sujeita:

Para o cálculo das diferenças de nível, multiplica-se a distância horizontal resultante de duas ou várias leituras, *sem a constante*, pela inclinação reduzida (tangente do ângulo vertical), e o resultado dividido

por 100 dará a diferença de nível ($\pm n$) entre o eixo de rotação da luneta e o ponto da mira sobre o qual se projetam o fio horizontal do reticulado no momento da leitura da inclinação da visada correspondente.

A altitude ou cota do ponto de mira é, pois, igual a do eixo de rotação do instrumento (cota da estação + altura h_i) aumentada ou diminuída de n . A altura ou cota do ponto visado (solo) é igual a do ponto de mira *diminuída* da altura deste ponto acima do zero da mira.

1) *Diferença de nível entre B e C.*

$$N_c = \frac{D'_c \times \operatorname{tg} \varphi'}{100} = \frac{96,28 \times 4,05}{100} = 3,90 \text{ m}$$

A escala do taqueômetro *Balu-Kern*, na posição horizontal da luneta é marcada com o número 100, em lugar de zero, como no *Sanguet* ou *Kern* de contato, moderno; a vantagem está em serem mais difíceis no primeiro os enganos do que com os sinais + ou - dos últimos, mas exige a subtração de 100 de cada leitura feita, o que é uma desvantagem, a nosso ver.

Para a cota da estação C, teremos

$$n_c = \dots\dots\dots = 3,90$$

$$\text{A cota do instrumento é: } 64,50 + 1,43 \dots\dots = 65,93$$

$$\text{Cota do ponto de mira } \dots\dots\dots = 69,83$$

$$\text{Leitura da mira no descanso 0 } \dots\dots\dots = 1,00$$

$$\text{Cota do ponto C } \dots\dots\dots = 68,83 \text{ m}$$

2) *Diferença de nível e cotas dos outros pontos.*

Ponto 1

$$n_1 = \frac{D'_1 \times \operatorname{tg} \varphi'}{100} = - \frac{55,70 \times 0,15}{100} = - 0,08 \text{ m}$$

c

$$C_1 = 65,93 - 0,08 - 0,80 = 65,05$$

Ponto 2

$$n_2 = \frac{D'_2 \times \operatorname{tg} \varphi_2}{100} = - \frac{41,75 \times 5,70}{100} = - 2,38 \text{ m}$$

e

$$C_2 = 65,93 - 2,38 - 1,53 = 62,02 \text{ m}$$

a tangente foi lida no descanso *b*, razão porque a altura do ponto de mira não é a 1.^a e sim a 2.^a leitura.

Ponto 3

$$n_3 = \frac{D'_3 \times \operatorname{tg} \varphi_3}{100} = - \frac{72,25 \times 8,65}{100} = - 6,25 \text{ m}$$

e

$$C_3 = 65,93 - 6,25 - 1,00 = 58,68 \text{ m}$$

Ponto 4

$$n_4 = \frac{D'_4 \times \operatorname{tg} \varphi_4}{100} = - \frac{103,48 \times 5,50}{100} = - 5,69$$

e

$$C_4 = 65,93 - 5,69 - 1,00 = 59,24 \text{ m}$$

Estação A

$$n_A = \frac{D'_A \times \operatorname{tg} \varphi_A}{100} = - \frac{132,82 \times 3,47}{100} = - 4,61$$

e a cota da Estação A, será

$$C_A = 65,93 - 4,61 - 2,83 = 58,49 \text{ m}$$

Ponto 5

$$n_5 = \frac{D'_5 \times \operatorname{tg} \varphi_5}{100} = - \frac{92,75 \times 2,20}{100} = - 2,04$$

e

$$C_5 = 65,93 - 2,04 - 2,00 = 61,89 \text{ m}$$

Ponto 6

$$n_6 = \frac{D'_6 \times \operatorname{tg} \varphi_6}{100} = - \frac{58,30 \times 1,95}{100} = - 1,14$$

e

$$C_6 = 65,93 - 1,14 - 1,00 = 63,79 \text{ m}$$

Os produtos, nas diferenças de nível, são feitos com precisão suficiente até centímetros, servindo-nos de régua de cálculo, ábacos ou diagramas; as máquinas de calcular permitem cálculo mais rápido e mais exato.

A tábua de interpolação de Schrön (Gauthier — Villars — Paris) muito prática e cômoda, dá os produtos de todos os números de 40 a 409 por 0,01, 0,02... 0,99.

Quarta Parte – FOTOGRAMETRIA TERRESTRE

§ 33 – Introdução à Fotogrametria – Instrumentos

140 – Definição. Aplicações

A *Fotogrametria*, etimologicamente “*medida fotográfica dos sólidos*”, utiliza medidas feitas em fotografias orientadas (fotogramas) para definir a forma e as dimensões dos objetos nelas contidos.

A definição dada é muito geral: a Fotogrametria tem já numerosas aplicações em domínios muito diversos entre os quais nos reconhecimentos geológicos, na arqueologia e na astronomia de posição.

Mas, na hora presente, a aplicação mais importante da Fotogrametria em quase todos os países do mundo, com considerável desenvolvimento, é a da representação topográfica ou cartográfica da superfície do solo, em particular pelas fotografias verticais ou inclinadas, tomadas de avião, ditas fotografias aéreas.

É da Fotogrametria “topográfica”, antigamente também chamada de Fototopografia, com o desenvolvimento da *Fotogrametria terrestre*, que serão dedicadas as páginas deste capítulo.

Em outro livro, na parte aplicada da Topografia (levantamentos aerofotogramétricos) serão dados detalhes sobre o importante processo de levantamento de grandes extensões, que é a Fotogrametria aérea, ou *Aerofotogrametria*, de literatura tão vastamente difundida.

A *Editora Globo*, na sua coleção – “*Enciclopédia Técnica Universal Globo*” – volume I (1958) publicou um expositivo *Tratado de Aerofotogrametria*, do Professor Paulo Ferraz de Mesquita, Livre Docente da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Como base da Fotogrametria, encontra-se a *Fotografia*, cuja técnica deve ser conhecida ou estudada, pois fotografias falhas de nitidez e de detalhes pouco valor terão na identificação dos pontos e, conseqüentemente, na determinação de suas coordenadas. Também a *Óptica* deve ser conhecida para maior sucesso nas operações práticas.

Um aparelho fotográfico, qualquer que seja, compõe-se sempre das partes essenciais seguintes:

- 1.^a — uma *objetiva fotográfica*,
- 2.^a — um *obturador* (de objetiva ou de placa),

3.^a — uma *superfície sensível*, na qual vem se fixar a “*imagem latente*”, que será em seguida *revelada e fixada* por um tratamento químico apropriado.

141 — Histórico. Generalidades

a) *Histórico.* A fotogrametria ou fototopografia é uma ciência nova, inventada em meados do século dezenove pelo coronel francês *Aimé Laussedat*, professor de Astronomia da Escola Politécnica e Diretor do Liceu de Artes e Ofícios de Paris, e que, desde 1848, já empregava a câmara clara para desenhar vistas geometricamente exatas de zonas levantadas, passando, mais tarde, para as câmaras escuras.

Antes de Laussedat o engenheiro Beautemps Beupré havia imaginado o processo de fazer acompanhar seus levantamentos de desenhos, dando o relevo dos objetos mais notáveis e próximos dos pontos considerados.

Também é a Laussedat que se deve o método das intersecções para o desenho das plantas com o auxílio de fotografias.

Não progrediu durante muito tempo este ótimo processo de levantamento, tão vantajoso, rápido e de precisão suficiente para detalhes, em virtude da falta de aperfeiçoamento das lentes e sensibilidade das chapas. O primeiro e mais extenso levantamento (cerca de 20 km²) foi o da praça de Grenoble, em França, executado em 1864 pelo capitão Javary, seguido do importante trabalho de M. J. Vallot, no levantamento do maciço do Mont Blanc.

Os engenheiros alemães, que se aperceberam desde logo das vantagens do novo processo de levantamento de detalhe, fizeram muitas aplicações, tais como a planta do oasis de Gaser-Daschel, por Jordan em 1873; levantamentos na Pérsia com fins arqueológicos em 1874 por Stolze, geleiras de Jungfrau, pelos professores Doernges e Koppe, que aperfeiçoaram instrumentos e processos empregados e muitos outros trabalhos.

O engenheiro Pio Paganini, na Itália, refez grande parte da planta dos Alpes e, na Áustria, reconhecimentos em grande escala, nos Alpes, no Tirol e noutros pontos.

Parece, porém, que a mais notável aplicação da fotogrametria terrestre foi, na época, a confecção da planta das Montanhas Rochosas, no Canadá, na escala de 1:40 000, feitas pelos engenheiros Devilles Drewry e Mac Arthur, que, com outros colegas canadenses e norte-americanos, fizeram, em seguida, o levantamento da zona fronteira entre a Colúmbia Britânica e o Território de Alasca. Entre nós, o primeiro trabalho fototopográfico foi o do levantamento da Ilha do Governador,

no Rio de Janeiro e, também, da carta do Distrito Federal, no início do século vinte. Aqui, no Rio Grande, em 1902, o Eng.^o Rodolfo Ahrons fez uma aplicação da fotogrametria, levantando para a então Intendência Municipal, a planta cadastral dos primeiros seis distritos de Porto Alegre, na escala de 1:10,00 (detalhes dos morros e curvas de nível).

O engenheiro Bidault des Chaumes, em artigo publicado no Génie Civil (1924) diz que o Serviço Geográfico do Exército se propôs aplicar os processos, os *mais modernos* da estereofotogrametria terrestre e aérea na execução da nova carta de França; cita dados interessantes relativos aos custos do levantamento: 3,5 milhões de francos anuais durante vinte anos para levantar plani e altimetricamente uma área total de 450 milhões de hectares, com 500 técnicos para todos os trabalhos de triangulação, nivelamento; detalhes fotogramétricos e trabalhos cartográficos respectivos.

Devemos distinguir dois processos de levantamento: o da *fotogrametria comum*, terrestre, que, com o emprego de uma simples câmara fotográfica ou fototeodolito, tipo Laussedat, permite, com um pessoal técnico e auxiliar reduzido, levantar com precisão suficiente, detalhes em zonas inacessíveis aos processos taqueométricos, com maior rapidez e o da *estereofotogrametria*, processo moderno, que requer pessoal experimentado, com aparelhagem bastante cara e que tem aplicação para trabalhos geodésicos, cadastrais e para estudos de vias de comunicação de vulto.

A fotogrametria oferece mais vantagens sobre outros métodos de levantamento de detalhes, pois prescinde do croqui do terreno e respectivas letras de anotação dos pontos amarrados, exige, menor número de auxiliares, não prejudica os agricultores com passagens em suas terras lavradas e plantadas, não dá lugar a erros na avaliação dos ângulos e leituras das miras, dependentes de condições atmosféricas e outras causas.

Para o explorador a fotogrametria oferece um campo de ação muito grande, tanto maior quanto mais detalhada for a exploração. É bem verdade que nem todos os terrenos se prestam para a aplicação da fotogrametria comum, pois ela exige terreno a descoberto, de preferência, e de serra, bastante acidentado e com detalhes naturais; terrenos cobertos de vegetação e levemente ondulados sem detalhes, dificultam sua aplicação.

Nas geleiras e nos penhascos nus, ela triunfa em toda a linha.

A fotogrametria não prescinde dos processos da topografia comum, mas, presta grandes vantagens a esta como rápido e moderno processo de levantamento de *detalhes*, cujas fotografias constituem sempre um

ótimo cabedal para quaisquer verificações posteriores ou de maiores detalhes que se exijam de determinadas zonas ou regiões.

E o que dizer, então, da aerofotogrametria?

Que é e será cada vez mais a topografia de precisão, embora dispendiosa na instalação inicial, mas permite a execução de qualquer trabalho topográfico com grandes recursos, em técnica e exatidão.

Após estas considerações é justo que se diga que a *1.ª Divisão de Levantamento do Serviço Geográfico do Exército*, com material moderno e técnicos de reconhecida competência, aplica juntamente com a *Divisão de Cartografia* do I.B.G.E. em larga escala, neste Estado a fotogrametria aérea e trabalha ativamente para nos dar uma Planta Geral do Estado, com curvas de nível, de que tanto carecem as administrações municipais para o estudo de vias de comunicação, mais acessíveis para o escoamento de seus produtos.

O *Departamento Autônomo de Estradas de Rodagem (DAER)* para a execução de um vasto plano de rodovias modernas, ligando centros importantes de produção aos centros consumidores, e, mesmo, em estradas de turismo e de ligação interestadual, criou no corrente ano uma *Secção de Fotogrametria*, com aparelhagem Wild de restituição (A8) para seus estudos de reconhecimentos, tão necessários aos anteprojetos de novas estradas neste Estado.

Outros Estados do nosso País criaram institutos idênticos, que tem contribuído sobejamente para seu progresso e desenvolvimento.

b) *Condições de aplicação.* Baseia-se a fotogrametria terrestre no fato comprovado de que as vistas obtidas com boas objetivas, são perspectivas cônicas perfeitas, podendo, portanto, ser desenhados em escala os planos ortogonais correspondentes; é assim a aplicação da fotografia e perspectiva aos levantamentos topográficos.

As condições para bons resultados de sua aplicação são:

1.º) *Boa orientação das fotografias*, pois quando as mesmas se cortam em ângulos muito agudos darão pontos identificáveis com erros bem sensíveis;

2.º) *Determinação precisa das estações fotográficas*, tanto plani como altimetricamente, condição essa primordial;

3.º) *Nitidez nas fotografias*, pois fotografias defeituosas de nada nos poderão servir;

4.º) *Retificação acurada do aparelho* com que se trabalha, pois do contrário, obteremos cotas e distâncias com erros, tanto maiores, quanto mais desretificado estiver o aparelho.

Procurando satisfazer às condições acima, pode-se ter a certeza de conseguir bons resultados em levantamentos terrestres.

c) *Noções gerais. Método de Laussedat.* Suponhamos (Fig. 358), entre um observador que contempla uma paisagem e a própria paisagem uma superfície plana, vertical e transparente na qual todos os raios visuais emitidos pelos diferentes objetos que constituem essa paisagem deixam seu traço.

Assim, o conjunto de todos os traços deixados pelos diversos raios luminosos em suas intersecções com a superfície imaginada, nos dará uma perspectiva cônica de todo o terreno.

Os elementos desta projeção, a considerar, serão:

1.º O ponto de vista (V), que é a posição no espaço do olho, com relação à superfície a que se dá o nome de quadro ou plano de perspectiva;

2.º O ponto principal (P) da perspectiva, que é o pé da perpendicular baixada do ponto de vista sobre o quadro;

3.º A linha do horizonte (HH'), que é a intersecção do plano de perspectiva com o plano horizontal que passa pelo ponto de vista.

Assim, se considerarmos, por exemplo, uma pirâmide sobre um prisma, $CDMO$, obteremos em $cdmo$ sua imagem em perspectiva sobre o quadro.

Vejamos agora em que condições poderemos obter, da maneira mais precisa, uma perspectiva desta classe, com o auxílio de um aparelho fotográfico.

Suponhamos (Fig. 359) que no lugar do observador de uma paisagem seja colocada uma máquina fotográfica, tendo o centro óptico da objetiva colocado exatamente no ponto de vista.

O que se percebe claramente é que a imagem ou perspectiva aérea vista sobre a superfície transparente é semelhante à obtida do negativo pela prova positiva (cópia); se a distância focal da máquina for igual à do centro óptico da objetiva à superfície transparente, o positivo obtido será igual à perspectiva aérea da paisagem nesta superfície.

A (Fig. 359) indica em V o centro óptico da objetiva: PVP é o eixo óptico suposto horizontal.

O que se vê da paisagem obtida sobre o vidro despolido é bem exatamente a perspectiva geométrica desta paisagem, tendo a objetiva como ponto de vista, porém, invertida; a cópia ou positivo dará a verdadeira perspectiva.

Para evitar erros de medida e deformação das imagens obtidas, devem os aparelhos fotográficos, bem retificados, satisfazer às duas condições seguintes:

1.º Ter o eixo óptico *horizontal*, para que sejam as medidas tomadas com precisão;

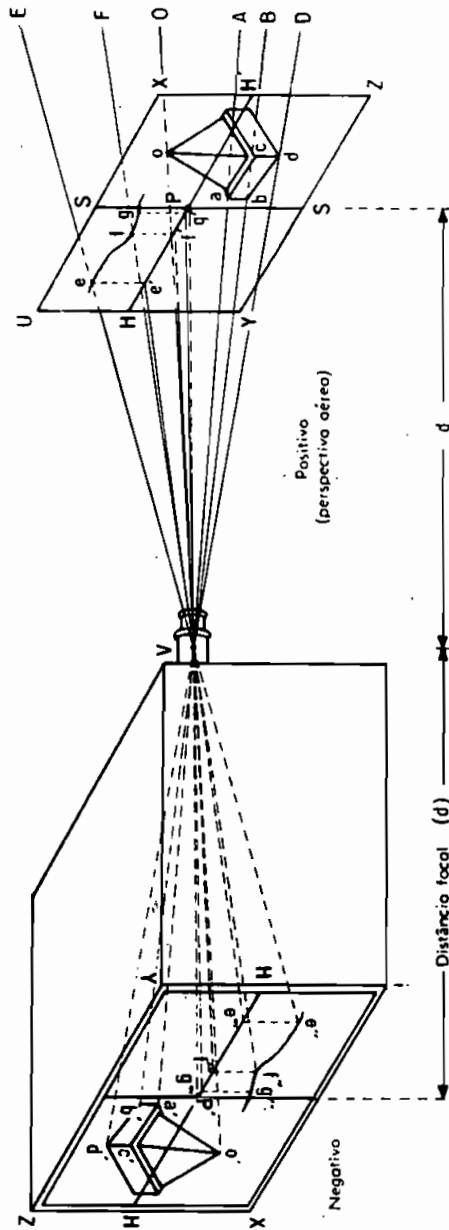


Fig. 359

2.º) Ter objetiva *retilínea e acromática* para que as imagens não sofram deformação alguma, prejudiciais à exatidão da perspectiva aludida e nítidas.

De duas ou mais fotografias obtidas em direções determinadas, é que podemos marcar os pontos identificados, referidos tanto em cota como em distância, uns em relação aos outros.

d) *Distâncias e cotas.* Tomemos uma cópia fotográfica *UXYZ* (Fig. 360) na qual estão impressas em preto as marcas da linha do horizonte *HH'* e da vertical *SS'*.

A linha do horizonte *HH'* pode sofrer um deslocamento para cima ou para baixo, conforme tiver sido abaixada ou levantada a objetiva por meio de um cursor, por ocasião da tomada da fotografia.

A medida deste deslocamento, a traçar na cópia, é a mesma dada pela régua graduada do aparelho fotográfico com que se trabalhou; em geral é milimétrica.

Suponhamos que de certos pontos bem visíveis da cópia (Fig. 360) são baixadas perpendiculares, tais como *aa'*, *bb'*, *cc'*, *ee'* etc., sobre *HH'*.

Se na linha *SS'* prolongada marcarmos um comprimento *V-P* igual à distância focal, e unirmos os pés das perpendiculares acima com o ponto *V*, centro óptico projetado da objetiva, obteremos em verdadeira grandeza os ângulos horizontais formados pelas linhas do espaço que unem os pontos *a'b'*, *c'*, *d'*, *e'*, etc., com o centro da objetiva, quer dizer, os ângulos reduzidos ao horizonte tais como poderíamos obter com um teodolito qualquer.

Por outra parte a mesma fotografia permite ainda o cálculo das altitudes com a medida dos ângulos verticais aparentes dos pontos da paisagem.

Seja *f*, por exemplo, um ponto de depressão máxima; tracemos *f'f''* perpendicular a *f'V* e igual a *ff'* e unamos *f''* a *V*; o ângulo *f'Vf''*; será o ângulo vertical *B* rebatido e pode ser ainda calculado diretamente pela relação:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f'f''}{Vf'} = \frac{ff'}{Vf'} \quad (303)$$

As distâncias *ff'* e *Vf'* são expressas em milímetros e medidas, a primeira sobre a fotografia e a segunda sobre a planta, depois da sua orientação, como veremos a seguir.

Com o conhecimento das tangentes dos diversos pontos identificados, fácil será, depois da orientação das fotografias em projeção horizontal, medir as distâncias destes pontos às estações fotográficas respectivas e obter as cotas dos diversos pontos.

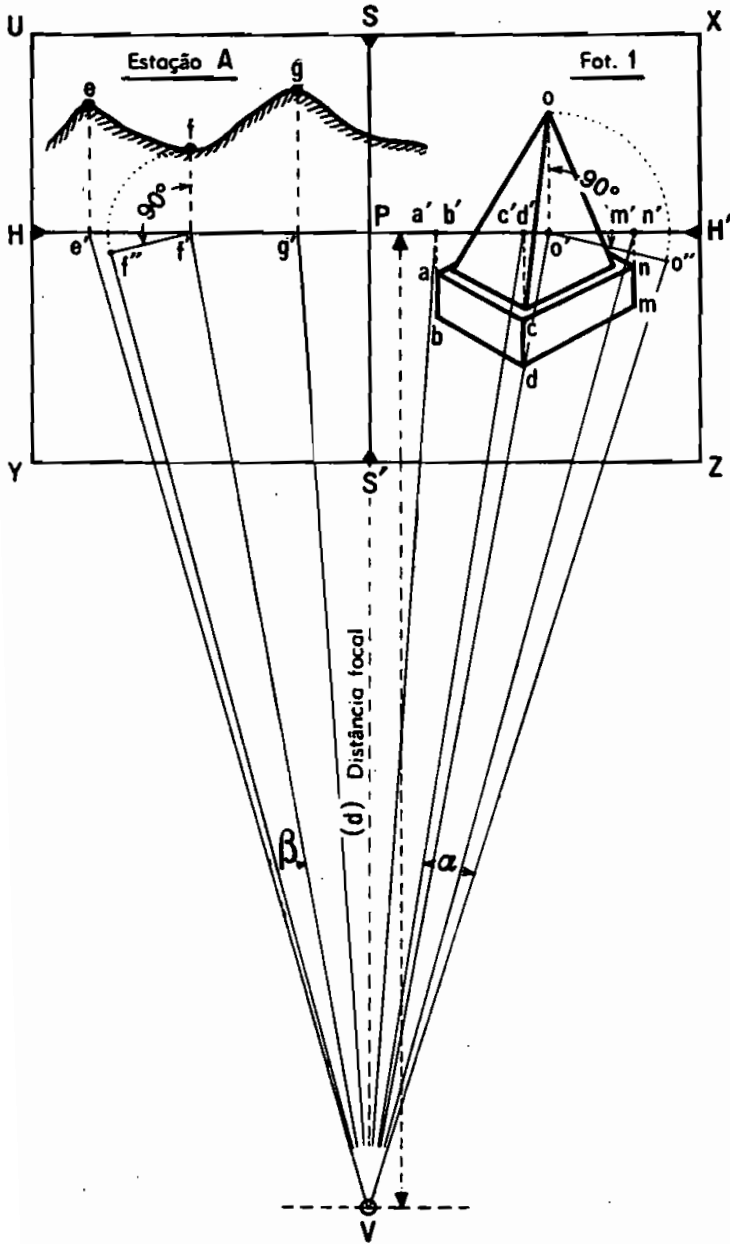


FIG. 360

Indicada, como fizemos, de uma maneira geral a marcha para obtermos distâncias e cotas, vejamos como se procede para a construção das plantas.

e) Desenho da planta. Para ser determinada a distância e a cota de um ponto em relação à estação fotográfica, deve o mesmo ser *identificado* em duas fotografias pelo menos e melhor se o for em três, pois mais exata será sua determinação plani e altimétrica.

Para exemplo, suponhamos (Fig. 361) duas fotografias, I e II, tomadas das estações L e L' , estações estas determinadas com precisão por operações anteriores de Topometria e situadas de modo a não fornecerem pontos que se cortem em ângulos muito agudos.

Conhecemos, portanto, a distância E entre as duas estações L e L' , bem como a orientação desta linha e os ângulos α e β que o eixo óptico, nas duas estações das fotografias I e II, fazem com LL' .

Traçada sobre o papel a base LL' , medida e reduzida pela escala adotada marcados nas extremidades os ângulos α e β de orientação das fotografias e as distâncias focais LP e $L'P'$ (*em qualquer escala e de preferência em escala natural milimétrica*) inicia-se a construção da planta.

Baixando as perpendiculares ee' , gg' , oo' , etc., sobre as linhas de horizonte HH' traçadas sobre as fotografias I e II e unindo estes pés de perpendiculares com as respectivas estações, obteremos no encontro destas linhas prolongadas, os pontos E , F , G , O , etc., do terreno.

Nas plantas de levantamentos fotogramétricas as diversas fotografias são marcadas somente pelas linhas de horizonte projetadas convenientemente orientadas, fazendo-se todas as identificações e projeções dos diversos pontos sobre a linha do horizonte nas próprias fotografias.

Para a orientação das fotografias e transporte das distâncias de projeções de todos os pontos identificados até o ponto de vista P , usamos de um retângulo conveniente de cartão, em forma de T , como nos esclarece a (Fig. 362).

Vejamos agora como proceder para o cálculo das cotas dos diversos pontos.

Para exemplo tomemos o ponto F . Basta medir sobre a planta a distância LF , do ponto à estação L , na escala da planta, e multiplicá-la pela tangente do ângulo vertical correspondente $\text{tg } \beta = \frac{f \cdot f'}{L \cdot f'}$ para se

obter a diferença de nível respectiva; para a verdadeira grandeza, deve-se ainda multiplicar o resultado anterior pelo inverso da escala.

Entrando com a altura do fototeodolito, obteremos de cada ponto indicado a cota, e pode-se então determinar as curvas de nível.

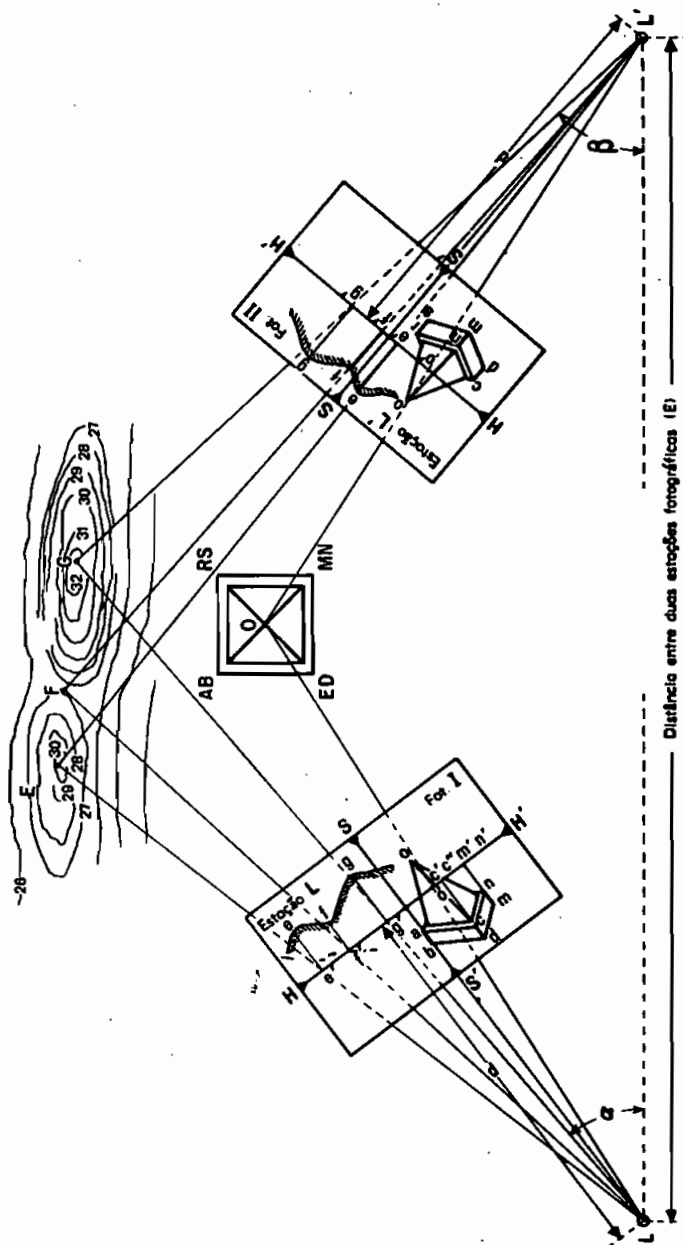


FIG. 961

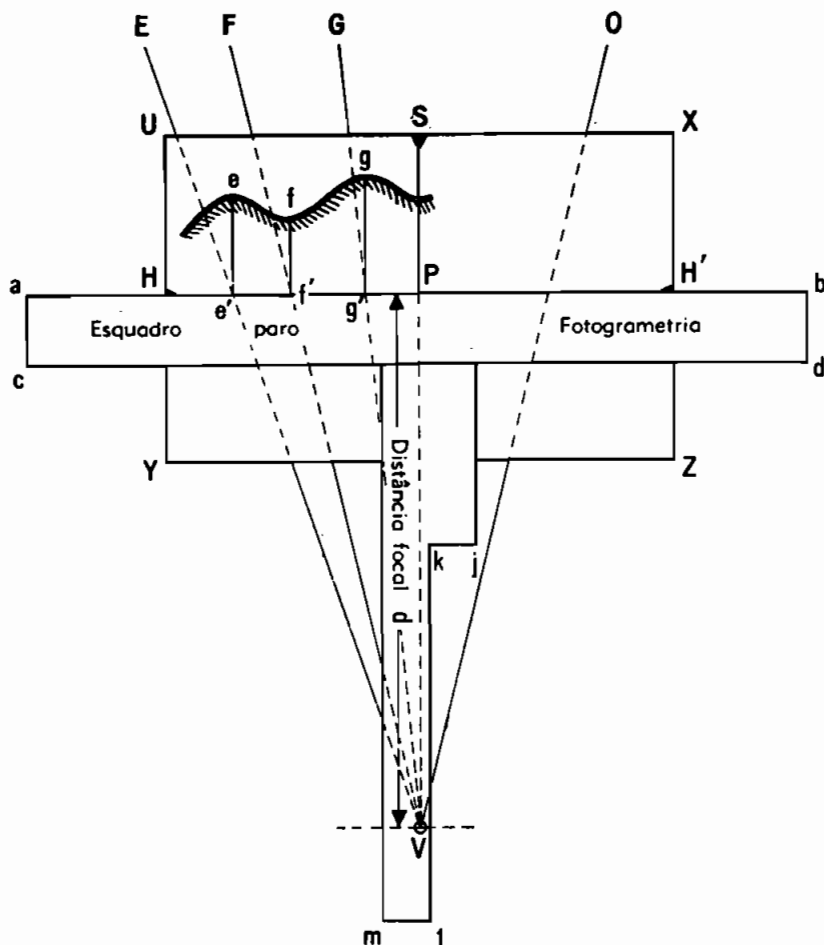


FIG. 362

Acontece freqüentemente que os terrenos, em que é conveniente o emprego da fotogrametria não apresentam muitos detalhes ou pontos isolados, tais como cupins, pedras salientes, árvores isoladas, etc., e vêem-se freqüentemente beiras de matos, cercas, sulcos, thalwegs, etc.

Para a determinação de pontos identificados neste caso, que permitam a implantação das curvas de nível, que definam bem o terreno, recorreremos aos pontos Kern (ou nucleais) preconizados por Hauck e que veremos adiante.

142 — Fototeodolitos antigos e modernos

a) *Fototeodolito original de Laussedat.* É um tipo antigo de instrumento fotogramétrico, bastante simples e de disposição adaptável a trabalhos em zonas acidentadas.

Dois são os modelos: o grande fototeodolito, para chapas 18×24 centímetros, com um campo de visão de 45° e o médio, para chapas 13×18 cm, com um campo de 60° .

O característico deste fototeodolito é associar no mesmo aparelho uma câmara fotográfica para a tomada das fotos e um teodolito para a medida dos ângulos horizontais e verticais.

Damos na (Fig. 363) o tipo aludido, imaginado por Laussedat, inventor do processo de que vimos nos ocupando.

Nêle vemos: a câmara escura, rígida, com distância focal fixa (nos aparelhos para chapas 18×24 é de 182 mm), a luneta estadimétrica *L* que é analítica e aumenta 15 vezes e o respectivo eclímetro *C*, para a medida dos ângulos verticais; o círculo azimutal *C'* para a medida dos ângulos horizontais; a objetiva *O*, retilínea e aplanática, adaptada aos porta-objetiva, que desliza verticalmente nos dois sentidos sobre uma chapa *S*, munida de corredeiras e botões de cremalheira para levantar ou abaixar o eixo óptico.

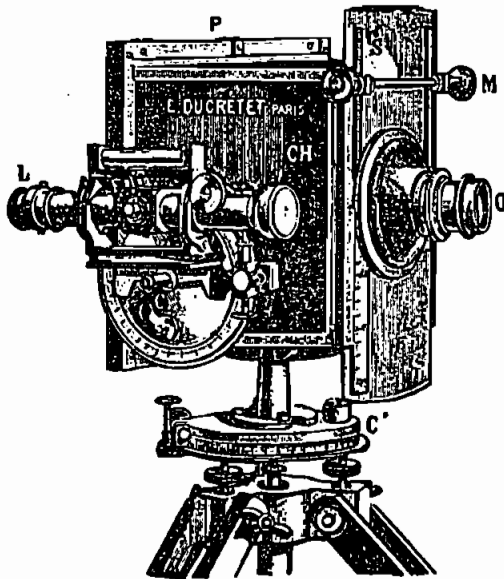


FIG. 363

Invisível na (Fig. 363) ainda se encontram: uma declinatória, para a medida dos azimutes magnéticos e outra luneta servindo de visor, ambas situadas lateralmente e opostas à luneta *L*.

O terreno é observado por transparência num vidro despolido existente na parte posterior da câmara escura, onde também se encontram as quatro pequenas marcas, duas horizontais e duas verticais, que assinalam na chapa a posição dos eixos horizontal e vertical.

No círculo azimutal *C'*, dividido em grados, há um nível de bolha para horizontalizar o sistema e um vernier para a leitura dos ângulos com aproximação de $1/2$ decigrado.

Na chapa *S* há, também, uma escala graduada para medir o deslocamento vertical do horizonte em milímetros, para cima e para baixo da linha média, coincidente com a posição em nível da luneta *L* e com as marcas *HH'*, horizontais, na parte posterior da câmara, onde se adaptam os chassis, que contêm as chapas a expor.

Devemos notar que o deslocamento dado ao eixo óptico, em milímetros, deverá ser marcado inversamente nas chapas ou cópias, em virtude dos raios luminosos se transmitirem através das lentes em linha reta.

Finalmente, é o aparelho totalmente desmontável, o que permite instalar diretamente sobre o tripé, a luneta estadimétrica, para a medida direta dos ângulos e distâncias.

b) Fototeodolito Zeiss (moderno). É um tipo moderno de fototeodolito, construído em metal leve e adaptado para trabalho de fotogrametria terrestre de precisão (Fig. 364).

Afasta-se dos outros tipos de teodolitos usuais, por ter a câmara munida de três objetivas superpostas, fazendo corpo com a câmara e dispostas, uma no centro de placa e as outras duas a 35 mm acima e abaixo da objetiva média.

Este dispositivo, além das vantagens de redução de peso, permite a supressão do deslizamento da objetiva, que, para ser preciso, deve necessariamente ser maciço e, por conseguinte, pesado; por outra parte permite, também, simplificar e aperfeiçoar a construção pelo uso de referências fixas, no plano das chapas, em número de três, que facilitam as operações de campo.

As *objetivas* da câmara são do tipo *ortoprotar* Zeiss de 19 cm de distância focal. A objetiva *ortoprotar* é especial para a tomada de vistas fotogramétricas, sem distorção da imagem e aplanática. As três objetivas são reguladas entre si para uma mesma distância focal e munidas de um diafragma fixo de abertura 1:25.

O ângulo do campo das objetivas é de 46° no plano horizontal e o da objetiva média de 33° no plano vertical; escolhendo uma ou outra objetiva, podem registrar-se na placa raios com inclinações de 25° de elevação ou depressão.

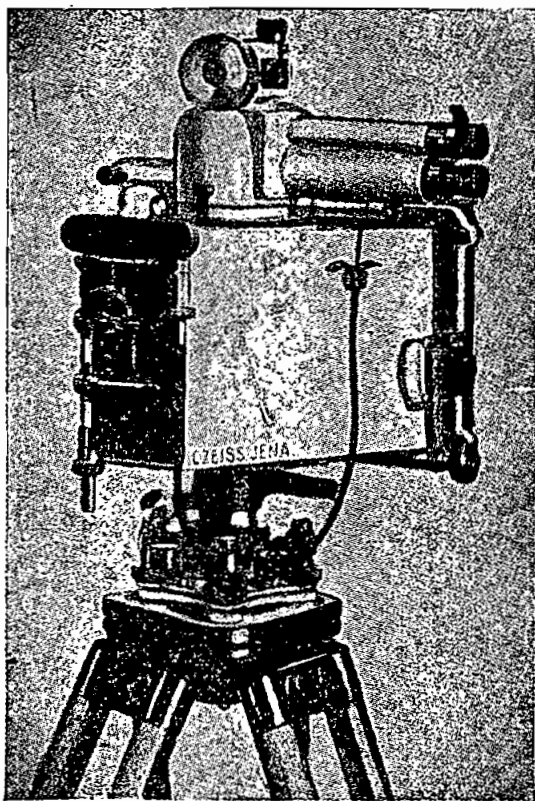


FIG. 364

O marco porta-chassis é para chapas 13×18 cm e o aparelho de orientação e os acessórios são idênticos aos de outros bons teodolitos, variando somente nos detalhes construtivos.

O teodolito e a câmara fotográfica podem colocar-se indistintamente na plataforma do tripé, e, portanto, usar-se independentemente.

O *dispositivo de orientação* e de *regulagem*, permite orientação mais rápida e precisa das fotos e da maior precisão nos resultados obtidos.

c) *Fototeodolito Schell* (antigo). É um aparelho sólido, que se presta a trabalhos topográficos de precisão. Para que o foco anterior da objetiva coincida com a estação fotográfica, o Prof. Schell introduziu em seu fototeodolito, além de outros melhoramentos, o artifício, empregado originalmente por Paganini, de aproveitar a lente da câmara fotográfica para objetiva da luneta do teodolito, adaptando convenientemente no plano do retículo o dispositivo para receber os chassis respectivos.

d) *Fototeodolito Paganini* (antigo). Este tipo de fototeodolito (Fig. 365), ideado por Pio Paganini difere de outros tipos pela modificação construtiva, consistente na supressão da luneta excêntrica e da adaptação da mesma na câmara escura, para tal fim, disposta especialmente.

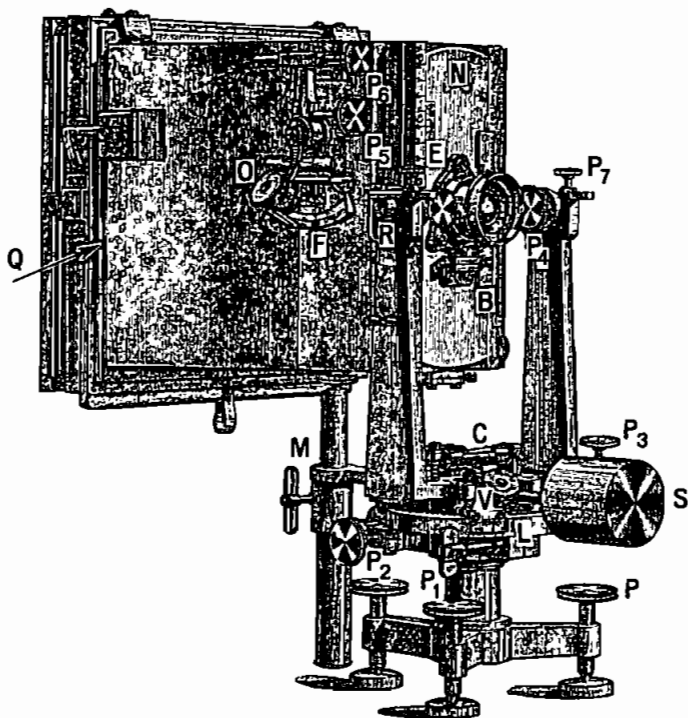


FIG. 365

Conseguiu tal dispositivo em virtude de, numa luneta para trabalhos topográficos ou geodésicos, dita astronômica, com retículo, ser indiferente a forma do espaço escuro compreendido entre a objetiva e a ocular, uma vez que sejam evitados os efeitos de reflexões acidentais das paredes, que compreendem este espaço escuro e que podem turvar a clareza das imagens.

Na parte posterior da câmara escura um dispositivo especial permite a substituição do chassis que contém o vidro despolido por outro, de parede opaca, que tem em seu centro uma ocular de Ramsden, para complemento da lente; o eixo óptico desta se acha no prolongamento do da câmara escura e o retículo dos fios coincide com o sistema assim formado, dando-nos uma luneta astronômica perfeita.

Quando as imagens forem pouco luminosas, dever-se-á substituir o diafragma de pequena abertura, usado em vistas de paisagens, pelo de máxima abertura, que dará melhores resultados.

Os primeiros aparelhos eram munidos somente de objetivas aplanáticas Steinheil de 237,7 mm de distância focal; atualmente possuem também uma objetiva anastigmática Zeiss de 25 cm de distância focal.

Existe grande número de tipos de fototeodolitos aperfeiçoados, tais como o de Koppe, na Alemanha, o de Bridge's Lee na Inglaterra, etc. que variam pouco dos tipos citados.

e) *Fototeodolito Wild e equipamento terrestre.* O fototeodolito moderno Wild é a combinação de um ótimo teodolito e de uma câmara fotográfica, que permite orientar o eixo óptico da câmara em *qualquer direção* com relação à base fotogramétrica, e permitindo assim a melhor disposição de levantamento para cada estação (Fig. 366).

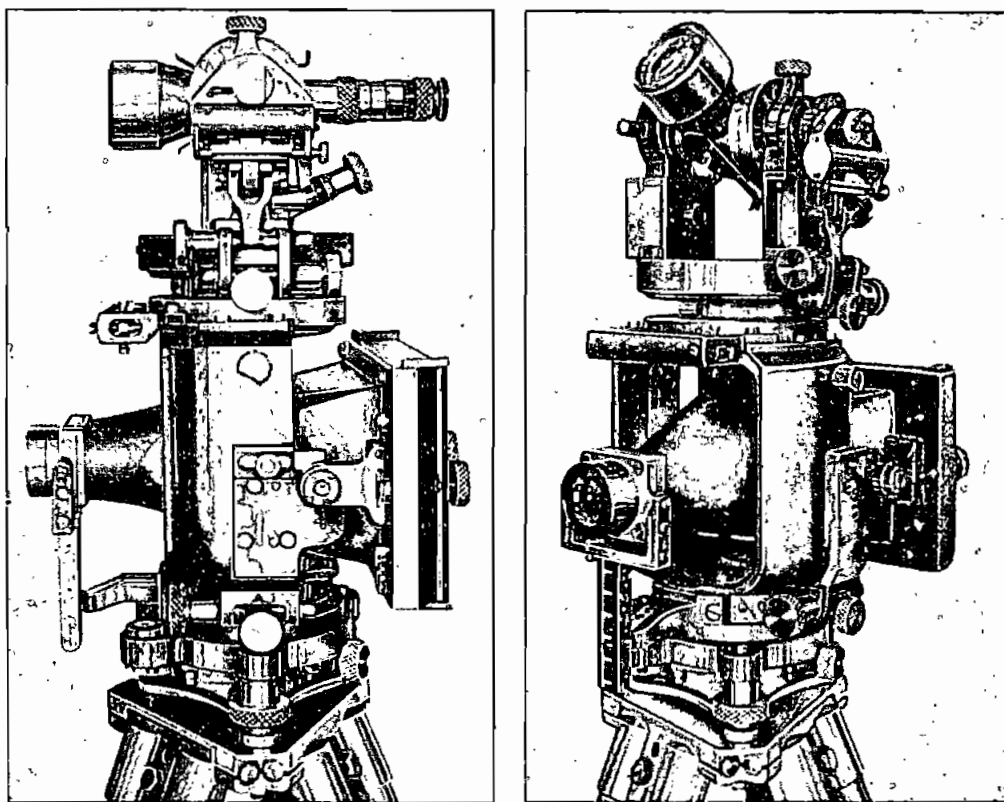


FIG. 366

Isto significa a máxima economia de material de levantamento e de trabalho de restituição. Por se tratar de um teodolito de precisão, com a aproximação de ($1''$), não faz falta outro instrumento e, também, é dispensável o dispositivo de orientação usado nos equipamentos de teodolito e câmara independentes.

A dimensão das placas é de 10×15 cm e a distância focal da objetiva Wild "C" é de 16,5 cm.

A câmara *amovível* pode girar ao redor de um eixo horizontal, de modo que ao eixo óptico podem dar-se as seguintes inclinações:

$$+ 12^{\circ}, + 6^{\circ}, 0^{\circ}, - 6^{\circ}, - 12^{\circ}, - 24^{\circ}.$$

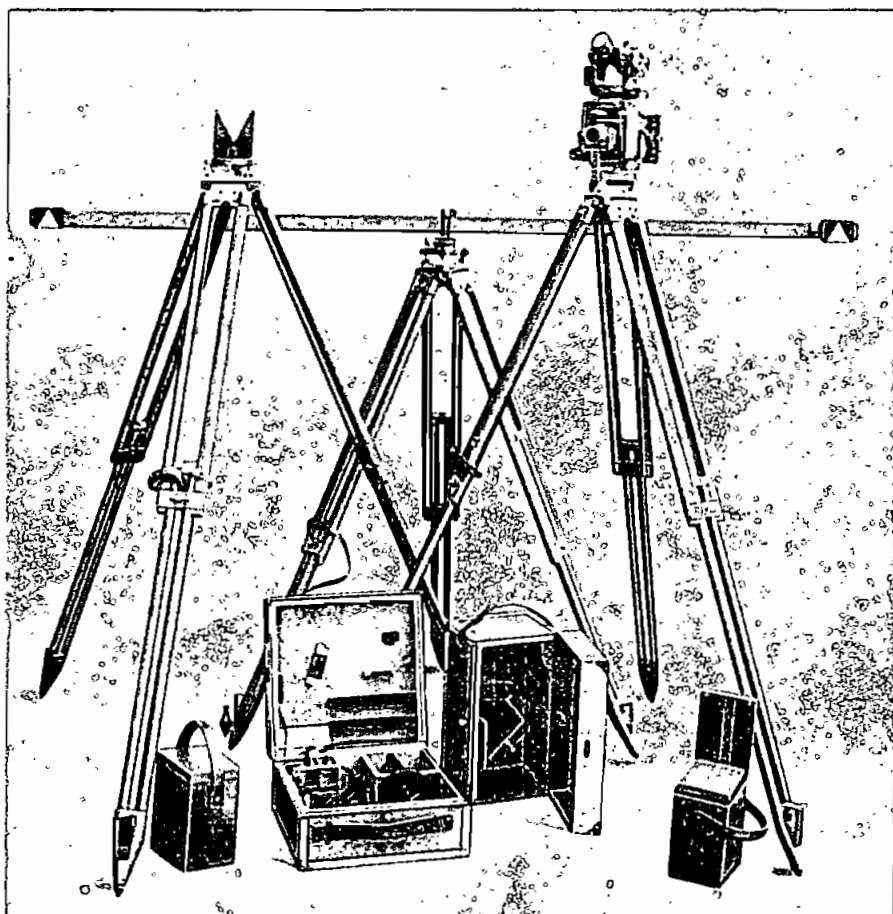


FIG. 367

Tais inclinações permitem o levantamento das pendentes mais fortes. O ângulo de declive máximo é de 41 grados.

O *equipamento normal* para um levantamento fotogramétrico terrestre, em terreno preferencialmente acidentado é o seguinte (Fig. 367):

- 1 *fototeodolito Wild*, em caixa de madeira;
- 1 *câmara de precisão*, distância focal 16,5 cm, também em caixa de madeira;
- 24 *chassis de alumínio* para chapas 10 x 15 cm, em 2 caixas de alumínio;
- 3 *tripés com pernas extensíveis*, cobertos de couro;
- 3 *plataformas* com 3 sinais para visadas e 3 fios a prumo, em caixa de madeira;
- 1 *estadia de precisão* de metal invar de desdobrar, para medir distâncias opticamente.
- 3 *caixas auxiliares* de transporte.

O peso do equipamento discriminado acima é de 60 kg. Para expedições, pode-se usar estojos para películas em lugar de placas de vidro que reduz de ~ 20 kg o peso total do equipamento, facilitando o transporte.

f) *Fotogrametros em geral*. Passemos agora a tratar dos *fotogrametros* ou aparelhos que nos fornecem somente as fotografias, sem detalhes de orientação, leituras de ângulos verticais, etc., que deverão ser tomados com qualquer teodolito auxiliar, instalado nas mesmas estações fotográficas.

Um tipo de fotogrametro, próprio para exploradores, é o pequeno de *Sedelbauer* (Fig. 368), fabricado em Munique e que Finsterwalder recomenda como satisfazendo perfeitamente a todas as exigências impostas a tais aparelhos.

Estas se resumem em ter o aparelho:

- 1) *câmara escura*, hermeticamente fechada;
- 2) *objetiva ortoscópica*, para se obter, mesmo com campo angular grande, imagens em perspectiva sem deformação alguma e bastante nítida, para o que deve ser de distância focal suficientemente grande;
- 3) *dispositivo* no plano da *placa* ou *película sensível* que permite traçar as linhas do horizonte e vertical que passam pelo centro óptico da objetiva, determinando, em seu cruzamento, a posição do ponto principal da paisagem;
- 4) *círculo graduado*, indispensável para se obter a orientação externa em relação à vertical, que passa pelo centro do instrumento; em cada estação fotográfica;
- 5) *bússola ou declinatória* para se obter a orientação da planta e azimutes magnéticos.

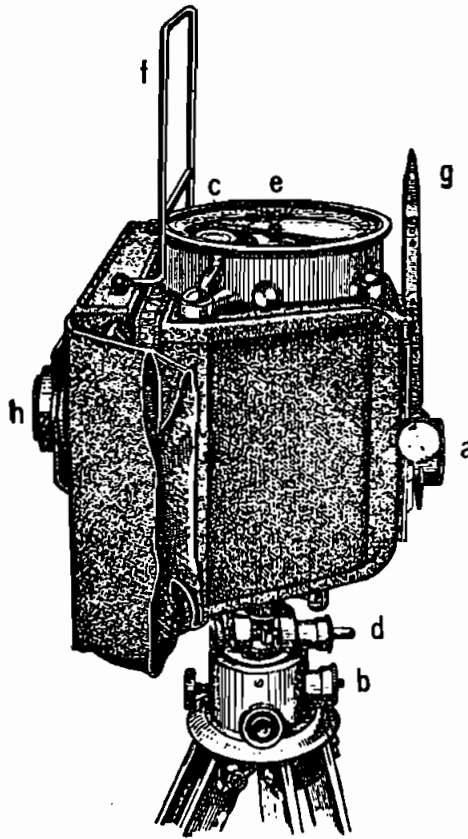


FIG. 368

No fotogrâmetro de Sedelbauer estas condições se encontram totalmente satisfeitas, pois consta de uma câmara rígida de 9×12 cm (de alumínio, coberta de couro) de forma trapezoidal, tendo na parte mais estreita, uma *objetiva* guiada por uma *corrediça* e na maior um *chassis duplo*, de madeira, tipo Kodak.

A objetiva empregada é um Protar da Casa Zeiss, com 112 mm de distância focal.

Pode ser deslocada, para baixo ou para cima, de 25 mm no máximo, deslocamento este lido em uma escala lateral, com aproximação de 0,1 mm.

A distância do quadro, onde se ajusta o chassis, à objetiva é de 108 mm; a dimensão deste quadro é de 105×70 mm. A chapa sensível,

no chassis, está a 4 mm do quadro e 112, portanto, do centro óptico da objetiva; o quadro sai representado sobre a chapa com $108,8 \times 77,8$ mm.

O campo de visão é, horizontalmente, dado por um ângulo de 52° , e, verticalmente, por 30° para cima e $6^\circ 30'$ para baixo, quando a corredeira estiver na posição de 19 mm aproximadamente para cima e vice-versa.

O aparelho é instalado sobre um tripé, provido de joelho universal, com parafuso de *pressão* e de *chamada*.

A calagem é verificada num *nível esférico*, aferido para 2 mm de desvio, com aproximação de 3'. Este nível está dentro de uma bússola com 80 mm de diâmetro e dividida em graus.

Um *visor* ainda permite distinguir qual a parte da paisagem contida dentro do quadro.

Se, nas *marcas*, horizontais e verticais do quadro, se distender um retículo, poder-se-á, ainda, adaptar no vidro despolido, uma *ocular de grande ângulo*, que, em combinação com a objetiva, formará uma luneta para leitura de ângulos verticais, ângulos estes lidos ou avaliados na escala de corredeira da objetiva.

Como podemos depreender da descrição dada, trata-se de um aparelho simples, leve, com 3 quilos e meio de peso (tripé, caixa e chapas) e apropriado para levantamentos de detalhes, que devam ser desenhados nas escalas de 1:5 000 a 1:25 000, tais como nos itinerários, explorações científicas, etc.

Ainda há tipos maiores, para chapas 18×24 cm, com 27 cm de distância focal, para levantamentos mais precisos, com exigência de grande número de detalhes.

No grupo dos fotogrametros grande é a variedade de aparelhos que diferem entre si pelos pormenores construtivos.

Podemos citar: Legros, Laussedat, Tousseau, na França; Meydenbauer, Vogel & Doergens, etc., na Alemanha; Werner, Pollack, etc., na Austria; Deville, no Canadá, etc.

g) *Retificações de um fototeodolito*. As retificações de um fototeodolito, relativas à verticalidade do eixo principal, fios do retículo da luneta, nível da luneta e zero do círculo vertical, são as mesmas de um teodolito comum.

Além dessas, porém, deve-se considerar as que se seguem, peculiares aos aparelhos em apreço.

1) *Verticalidade do quadro*, quando o nível estiver centrado.

Verifica-se tal verticalidade ou encostando um esquadro de nível no quadro ou fotografando com diafragma pequeno dois prumos, que deverão aparecer paralelos na prova.

2) *Horizontalidade dos bordos de quadro*, quando o nível estiver centrado.

Por meio de um nível auxiliar sobre o bordo horizontal superior ou inferior ou pelo paralelismo da imagem dos fios a prumo e das paredes verticais do quadro, constata-se tal horizontalidade.

3) *Verticalidade de cursor da objetiva.* Fotografa-se dois fios a prumo, numa mesma chapa, em duas posições extremas do cursor; suas imagens deverão estar numa mesma linha reta, se o fototeodolito não tiver se movido.

4) *Coincidência do zero do cursor e da posição horizontal da objetiva, em relação às marcas horizontais (H-H).* Retirando ou levantando o vidro despolido, colocam-se dois fios de cabelo, com cera, nas marcas ou ponteiros, horizontais ou verticais, formando retículo.

Com uma luneta retificada e calada na mesma altura do retículo, visam-se, pela objetiva, os fios do retículo e com o nível da câmara do fototeodolito centrado, desloca-se o cursor até que os fios apareçam no retículo da luneta do nível, ocasião em que se verifica se há coincidência do zero do cursor e referência respectiva.

Também se pode fazer esta verificação por um nivelamento fotográfico recíproco.

5) *Horizontalidade das marcas ou referências da linha do horizonte (H-H).* Horizontaliza-se o prato do instrumento, primeiro pelo nível esférico e depois pelo nível da luneta, para que possa haver coincidência ou paralelismo entre os planos descritos pelos eixos ópticos da objetiva fotográfica e da luneta.

Ao girar o aparelho, em torno do eixo principal, a objetiva deverá descrever um plano horizontal.

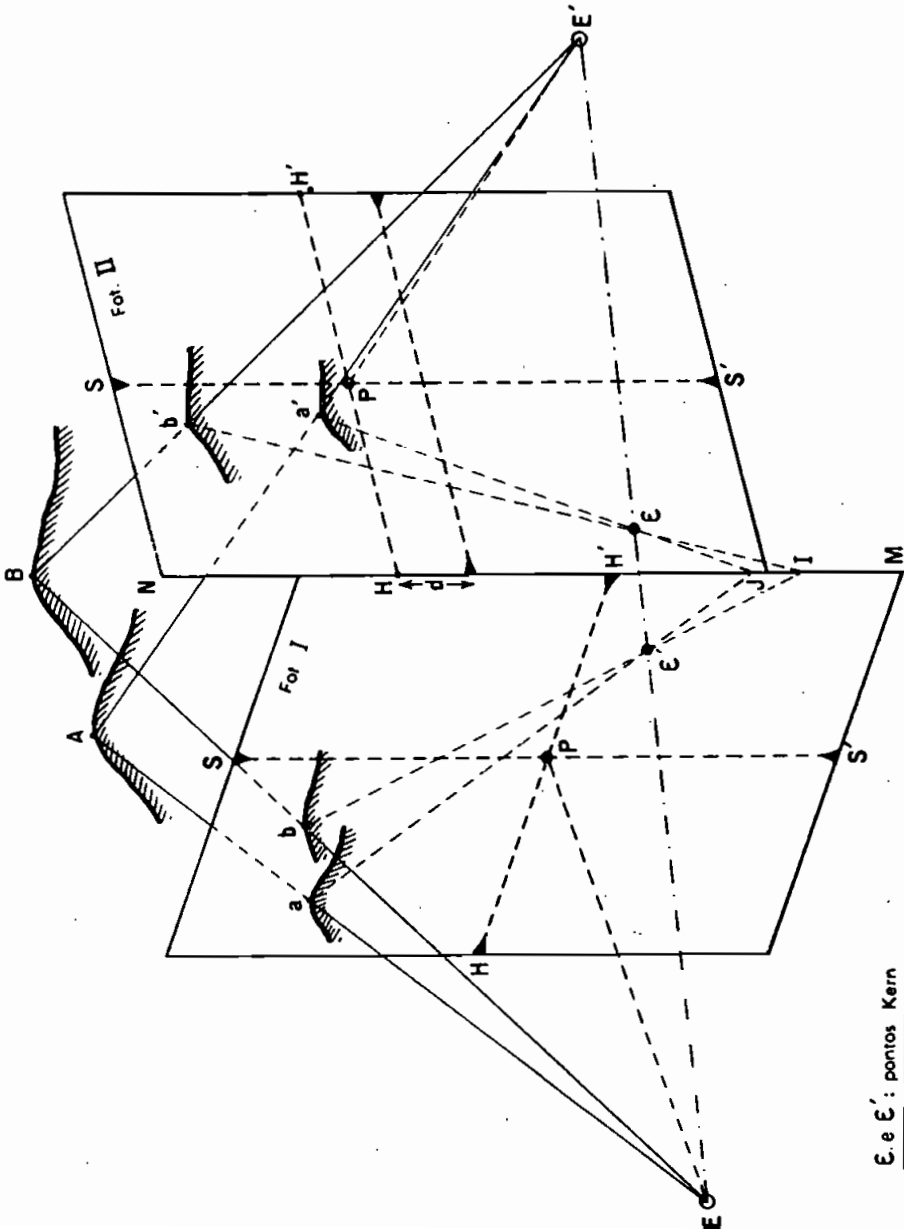
Apontando a luneta para um ponto ou objeto notável distante, este objeto terá sua imagem no centro do vidro despolido ou cruzamento das linhas horizontal e vertical da chapa.

Girando o aparelho de um certo ângulo para a direita ou para a esquerda, o deslocamento do objeto visado sobre o vidro despolido gerará uma linha que deverá ser coincidente com a horizontal determinada pelas marcas (H-H) se o instrumento estiver correto; caso contrário, levantando ou abaixando estas marcas, obtém-se a coincidência desejada.

143 — Identificação pelo Método de Laussedat com o auxílio dos pontos Kern de Hauck

a) *Teorema fundamental.* Baseia-se na proposição de que duas perspectivas do mesmo objeto, tomadas de estações diferentes, devem guardar entre si certa relação e foi dali que o Professor G. Hauck partiu para a dedução de seu teorema.

Consideremos (Fig. 369) os planos dos quadros de duas fotografias, I e II, tiradas das estações E e E' , se encontrando na aresta comum



E e E' : pontos Kern

FIG. 869

NM ; figuremos em ϵ o traço ou a intersecção da reta EE' , que une as duas estações, com a fotografia II, ou o que é o mesmo, a imagem da estação E sobre esta vista; ϵ' será o traço da outra estação E' sobre a vista I.

Se unirmos os traços a e a' de um ponto qualquer A da paisagem sobre as duas fotografias com os pontos ϵ e ϵ' achados, as retas $a\epsilon'$ e $a'\epsilon$, prolongadas até a intersecção dos planos das duas fotografias, se encontrarão sobre esta linha em um ponto J .

Se considerarmos que as retas $a\epsilon'$ e $a'\epsilon$ são as intersecções do plano AEE , das duas estações e do ponto considerado, com os planos dos dois quadros, podemos afirmar que a dita intersecção dever-se-ia dar.

Considerando um outro ponto B do terreno, é evidente que as retas $b\epsilon'$ e $b'\epsilon$ estarão no mesmo caso, quer dizer, prolongadas, encontrar-se-ão em I sobre a aresta NM .

Esta importante propriedade, devida a Hauck, permite identificar pontos em fotografias diversas, onde os pontos de detalhe, como orlas de matos, cercas, etc., não poderiam ser determinados com a identificação comum.

Hauck deu às imagens das estações sobre as fotos ou aos pontos ϵ e ϵ' , no nosso caso, o nome de pontos *Kern*, que poderemos chamar de *nucleais*.

Por analogia, chamaremos de linha Kern toda a linha tal qual $a\epsilon'$ que passa por um ponto Kern ϵ' , e plano Kern todo o plano que contiver os 2 pontos Kern.

b) *Pontos Kern e seu emprego na identificação de pontos.* Os pontos Kern podem ser empregados tanto para a identificação de pontos em duas ou mais fotografias, quando só numa assinalamos esses pontos e queremos determinar sua posição em outra, como, também, para a verificação de pontos que supomos identificados e sobre cuja identificação pairam dúvidas.

Vejamos então como se pode verificar, pelo teorema de Hauck, pontos identificados em duas fotografias.

Teoricamente, é fácil de compreender como se pode fazer esta verificação, pois basta girar os dois quadros ao redor de sua aresta comum NM , rebatendo-os num só plano, e a posição dos diversos pontos ficará como esclarece a (Fig. 370).

Praticamente, no entanto, existem circunstâncias várias que dificultam esta operação e faremos, a seguir, observações sobre os casos que se podem apresentar.

1.º) Falta de horizontalidade das estações fotográficas, só verificada raramente ou, melhor, acidentalmente.

As linhas de horizonte de duas perspectivas fotográficas nestas condições estão afastadas de uma distância vertical igual à diferença de nível das duas estações, na escala adotada para a planta. Nesta planta as

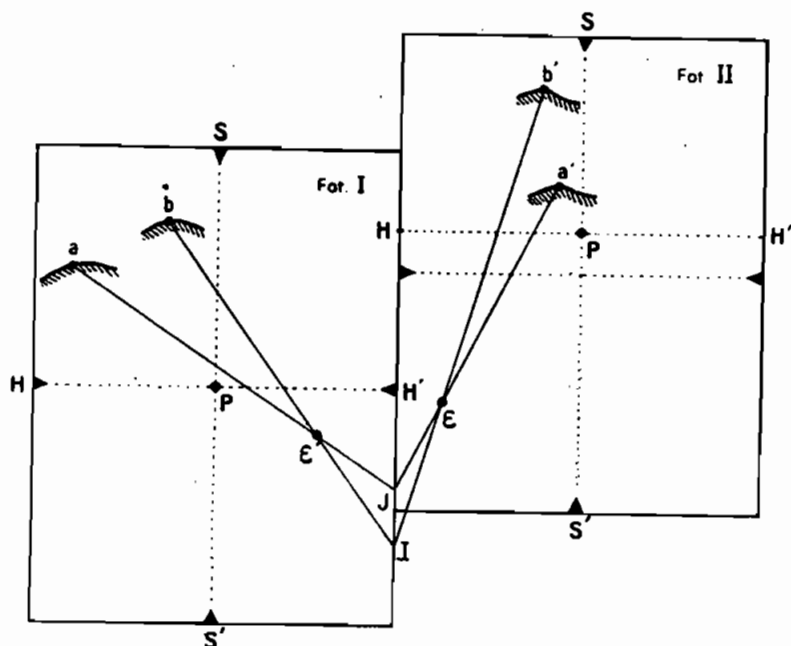


FIG. 370

fotografias serão representadas pelos traços de seus planos, em projeção horizontal, assim como pela distância EE' (Fig. 371) entre as duas estações fotográficas.

Além disto, tanto as fotografias, marcadas pelos traços de seus planos, como as estações fotográficas, serão representadas em projeção horizontal, reduzidas pela escala adotada para a planta, como se vê na (Fig. 371); EE' é a distância entre as estações, vv' e $v_1v'_1$ os traços das

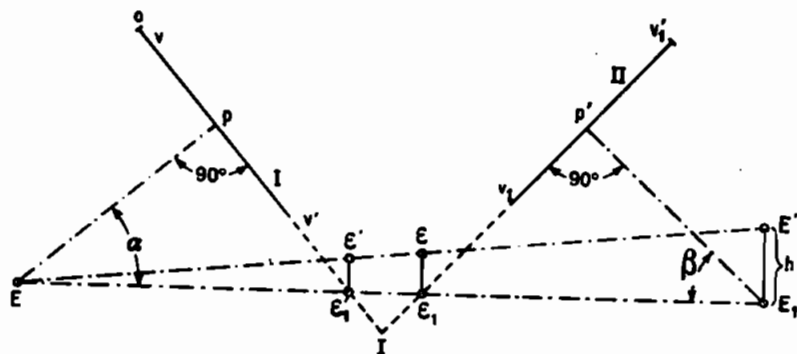


FIG. 371

fotografias, EP e E'_1P' (iguais) as distâncias focais e $E'E'_1$ a diferença de nível das estações fotográficas.

2.^o) *Posição dos pontos Kern fora das fotografias.* Esta propriedade é muito freqüente, acontecendo que o campo do aparelho colocado em uma das estações, E , por exemplo, não contém a imagem da outra estação E' (ponto Kern ϵ'), situada no prolongamento deste campo.

Tomando, como fizemos, para plano de projeção, o plano horizontal que passa pelo bordo inferior do quadro MM (linha de terra) e, rebatendo, ao redor de EE'_1 , o plano vertical que contém E e E'_1 ($E'E'_1$ é a diferença de nível das duas estações) teremos, levantando as perpendiculares $\epsilon_1\epsilon$ e $\epsilon'_1\epsilon'$ dos pontos Kern ϵ_1 e ϵ'_1 até a linha das estações, para alturas dos pontos Kern acima do plano horizontal de projeção, estas perpendiculares $\epsilon_1\epsilon$ e $\epsilon'_1\epsilon'$.

3.^o) *Verificação dos pontos Kern.* Esta verificação pode ser feita, como nos mostram as (Figs. 372 e 373), justapondo as 2 fotografias ao longo da aresta comum de seus planos MM e NN .

A intersecção destes dois planos com os pontos Kern ϵ e ϵ' pode, efetivamente, se dar fora dos bordos das provas.

Para conseguir que as retas, que unem as imagens de um mesmo ponto do terreno, se cortem na aresta, devemos substituir esta aresta dos dois planos por outras linhas em relação de posição com a aresta e que tenham propriedades métricas tais que permitam às retas, que unem as imagens de um mesmo ponto, de se encontrarem justamente na aresta comum.

Rebatamos sobre um plano a perspectiva da (Fig. 372) e teremos (Fig. 373) os dois quadros separados e justapostos segundo a aresta comum, NM ; tomemos para linha de terra (LT) o bordo inferior do quadro; para verificar se os pontos a e a' de uma parte e b e b' de outra são realmente as imagens dos pontos A e B do espaço, devemos medir separadamente a altura MI sobre as arestas de MM e NN (onde terminam as retas ae' e $a'\epsilon$ prolongadas), que deverá ser igual em ambas.

Se a identidade de dois pontos, tais como a e a' , pode ser considerada como incontestável, tomaremos o ponto I como origem e ponto inicial de medida para marcar os pontos duvidosos tais como postes de cercas, pontos sobre orlas de matos, etc., com o auxílio dos pontos Kern.

Se, pelo contrário, a e a' não forem bem identificáveis, tomaremos ainda outro ponto, b e b' , e mediremos IJ sobre as duas arestas de MM e NN , comprimento que deverá ser igual em ambas.

c) *Origens das escalas auxiliares e sua colocação.* Vejamos agora uma solução prática para marcar as retas de origem de contagem.

Paralelamente à aresta comum de duas fotografias (Fig. 373), traçamos duas retas CD e FG que cortem as linhas Kern ae' e be' , prou-

gadas até a intersecção, em c e em d e as linhas $a'e$ e $b'e$, também prolongadas, em f e g .

As distâncias destas retas à aresta comum NM deverão ser tais que interceptem comprimentos iguais de cada lado; isto se obterá pela seguinte relação

$$\frac{\epsilon' I}{\epsilon' d} = \frac{\epsilon I}{\epsilon g} \quad (304)$$

obtida dos triângulos semelhantes $\epsilon'IJ-\epsilon'cd$ e $\epsilon IJ-\epsilon fg$, à qual deverão obedecer as retas traçadas.

Estas duas retas ficarão substituindo a aresta comum de modo que, supondo nada existir entre elas, poderemos utilizá-las para a verificação ou identificação da seguinte maneira: um ponto qualquer e , por exemplo (Fig. 373), é ligado ao ponto Kern ϵ' e prolongado até a reta CD ; mediremos o comprimento l interceptado, a partir da origem d , sobre esta reta e transporta-lo-emos (com um duplo decímetro) para a outra reta FG , a partir da origem g ; unindo esta intersecção com o outro ponto Kern ϵ , e prolongando, verificaremos se esta reta passa pelo ponto que supúnhamos identificado ou então, marcaremos sobre o detalhe da paisagem na fotografia a posição do referido ponto, em e .

Solução modificada da acima é a de traçar, do outro lado do ponto Kern ϵ , a linha QR , em lugar da linha FG , tomando eg igual a ϵq , e, neste caso, a escala seria colocada sobre QR , a partir do ponto q .

Outra solução, mais freqüentemente empregada, é a de deixar os pontos Kern ϵ e ϵ' interiormente a duas retas VX e YZ , paralelas à aresta comum NM ou perpendiculares, respectivamente, às linhas de horizonte HH' das duas fotografias.

Representemos (Fig. 374), em projecção horizontal as estações E e E' de duas fotografias, os traços de seus quadros, os pontos principais P e P' e os pontos Kern ϵ e ϵ' .

Uma paralela xy à linha $\epsilon\epsilon'$, traçada além das extremidades dos quadros, determinará sobre o prolongamento destes traços, as projeções x e y dos pontos pelos quais deverão passar as duas paralelas à aresta comum projetada em I , pois tem-se:

$$\frac{\epsilon' I}{\epsilon' x} = \frac{\epsilon I}{\epsilon y} \quad (305)$$

d) Aplicação teórico-prática. Fazemos, a seguir, uma aplicação das construções acima a duas vistas fotográficas, nas quais se verifica pelo menos um ponto perfeitamente identificado.

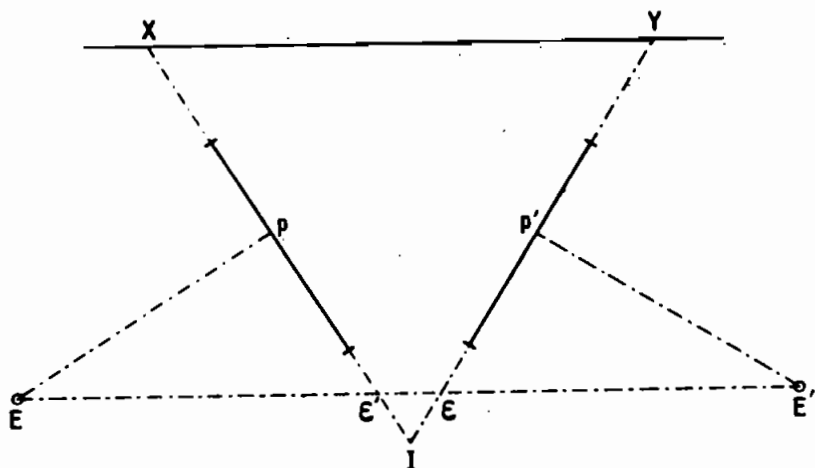


FIG. 374

Para tal, representemos (Fig. 375) por MM e NN os quadros de duas fotografias e por a e a' as imagens do ponto identificado rigorosamente.

A posição dos pontos Kern ϵ e ϵ' determinada, como vimos, pela posição em planta baixa das estações fotográficas e da diferença de nível destas estações.

Para marcar as retas auxiliares de contagem, VX e YZ uniremos os pontos identificados, a e a' , aos respectivos pontos Kern, ϵ' e ϵ , e, prolongando essas linhas até fora dos quadros, traçaremos as paralelas VX e YZ obedecendo a relação seguinte, já dada:

$$\frac{\epsilon' a}{\epsilon' V} = \frac{\epsilon a'}{\epsilon Y} \quad (306)$$

Nestas retas, assim determinadas, são adaptadas escalas para a verificação ou identificação de pontos com o auxílio dos pontos Kern.

Assim, se quisermos determinar na fotografia NN a posição de um ponto c da fotografia MM , mediremos, na escala adaptada à reta VX , o comprimento VW , da reta $\epsilon'c$ prolongada; na outra escala, em YZ , tomaremos $YK = VW$, e, unindo K a ϵ , determinaremos c' , no encontro da reta $K\epsilon$ com detalhe da paisagem (orla de caminho).

A verificação de pontos duvidosos torna-se fácil; assim, se na identificação dos pontos b e b' houver dúvidas, traçaremos as retas $\epsilon'bz$ e $\epsilon b'x$ e verificaremos se os comprimentos VY e YZ interceptados são

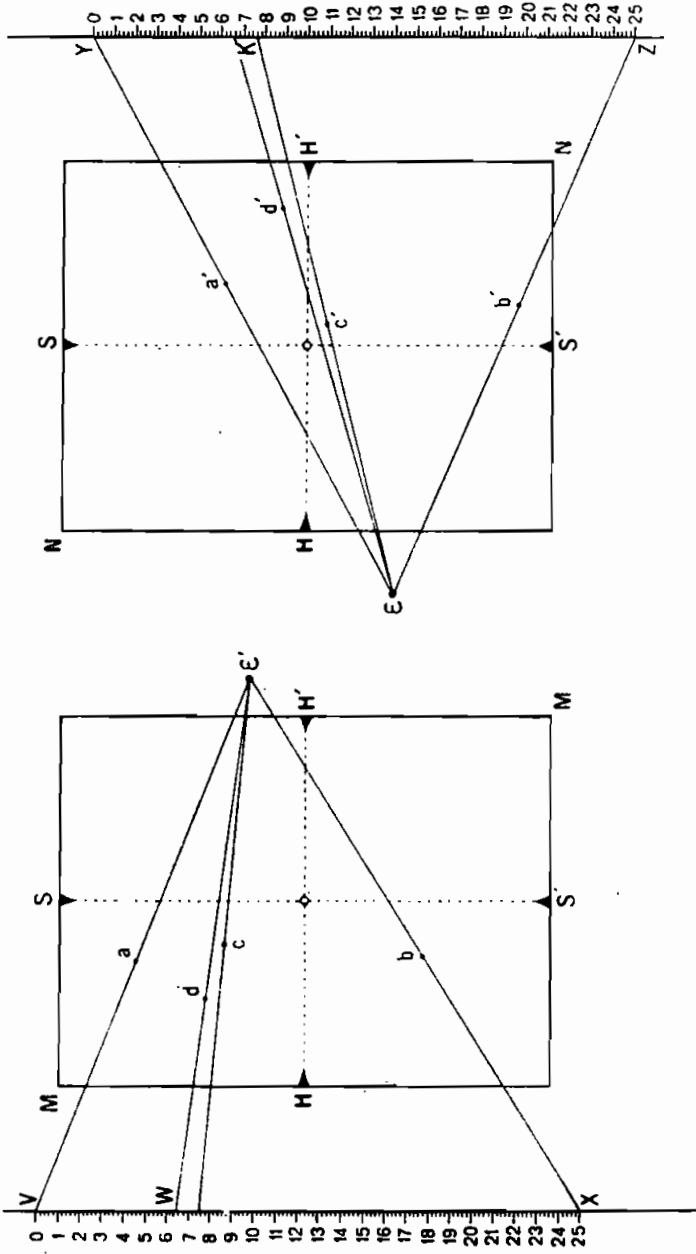


FIG. 375

iguais; caso afirmativo, b e b' são de fato um mesmo ponto B do terreno; caso contrário, devemos recusar a identificação, corrigindo um deles.

Depreendemos do exposto acima a vantagem dos pontos *Kern* na identificação ou verificação de pontos em duas ou mais fotografias, para a aplicação do método das intersecções de Laussedat.

§ 34 — Estereofotogrametria

144 — Generalidades. Definição. Teoria

a) *Generalidades.* No método fotogramétrico comum, inventado por Laussedat, em França, os pontos de detalhe são determinados pela intersecção de suas direções tomadas de, pelo menos, duas estações diferentes. Para se obter resultados satisfatórios, há necessidade de serem os pontos bem determinados, o que só se consegue com raios visuais fazendo entre si ângulos não muito agudos, de 30° aproximadamente ou maiores.

Tal exigência, necessária no entanto, obriga-nos, no processo em apreço, a tomar para distância mínima entre duas estações próximas L_1 e L_2 — um valor pelo menos igual à metade da distância do ponto mais afastado da base $L_1 - L_2$.

Acontece freqüentemente que o observador se encontra afastado planimetricamente às vezes de quilômetros, da área a detalhar, devendo assim ser grande o afastamento a manter entre as estações fotográficas.

Surgem então dificuldades quanto à identificação dos pontos nas diferentes fotos, — em virtude da grande distância entre as estações e do aspecto do terreno que muda bastante de uma estação para outra.

Esta dificuldade fica afastada com o emprego da estereofotogrametria, etimologicamente, *medida fotográfica dos sólidos*, método imaginado e aperfeiçoado em 1902 na Alemanha e inaugurado em França, para o levantamento de altas montanhas, pelo Coronel Vidal, subdiretor do Serviço Geográfico da Armada e Chefe da Secção de Topografia do mesmo serviço.

b) *Definição.* A *estereofotogrametria* é a recomposição plástica, em relevo ou estereoscópica da paisagem, examinada simultaneamente com um comparador de dois microscópios ou *estereocomparador*. Consiste o método em tirar as fotografias, duas a duas, paralelas entre si, perpendiculares portanto à mesma base, que deve ser para cada grupo relativamente curta (alguns decâmetros). Esta vem a ser a vantagem principal do processo, além da facilidade, rapidez e precisão de medidas, que pode ir até décimos de milímetro sobre o papel.

Na estereofotogrametria os pontos são determinados por uma única direção, tomada da estação esquerda e pelo afastamento do ponto, determinado pela sua paralaxe estereoscópica, isto é, por coordenadas.

c) *Coordenadas no caso de base normal.* Se de duas estações L_1 e L_2 (Fig. 376), pouco distantes uma da outra, se tomam, de uma mesma porção de terreno, duas fotografias, I e II, paralelas entre si, um mesmo ponto A sairá nelas representado em a_1 e a_2 distantes, é claro, diferentemente dos respectivos eixos $L_1 P_1$ e $L_2 P_2$.

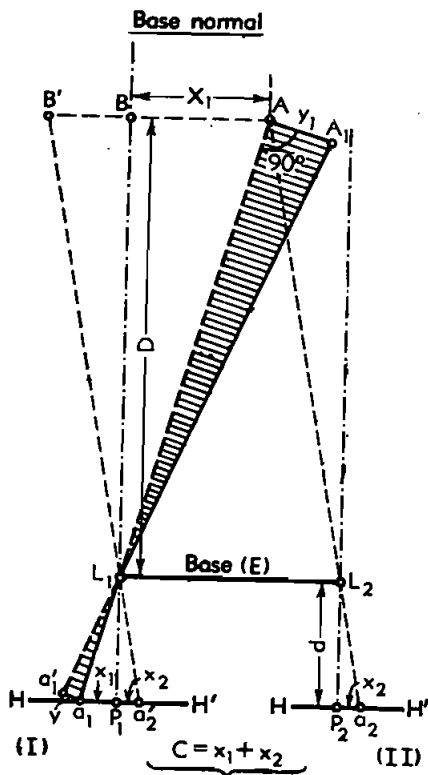


FIG. 376

Tomemos como plano de projeção o plano horizontal que passa pela estação da esquerda L_1 ; L_1 e L_2 são as projeções dos pontos de vista (estações) sobre este plano, HH' o traço do plano vertical, que contém as vistas ou perspectivas I e II do terreno, A a projeção de um ponto do terreno sobre este plano, a_1 e a_2 os traços do ponto A sobre I e II e x_1 e x_2 as abscissas desses traços em relação aos eixos paralelos.

Baixemos ainda AB perpendicular a $L_1 P_1$ prolongado; o comprimento $L_1 B = D$ representará o afastamento do ponto A .

Conhecido o afastamento D e a abscissa $X_1 = AB$ do ponto A , ficará o mesmo determinado em planta.

Os triângulos semelhantes $L_1 P_1 a_1$ e $L_1 BA$, dão:

$$\frac{D}{d} = \frac{X_1}{x_1}$$

donde

$$\boxed{X_1 = x_1 \frac{D}{d}} \quad (307)$$

Ora, d é a distância focal do aparelho, quantidade conhecida, x_1 pode ser medido diretamente sobre o negativo fotográfico ou sobre uma cópia. Basta pois conhecer o afastamento D para poder calcular X_1 .

Traçando a reta $L_1 B'$, paralela a $L_2 A$, cortará a mesma a linha do horizonte HH , em a'_2 , a uma distância x_2 de P_1 . O deslocamento da imagem do ponto A , da chapa I para a chapa II, será igual a $x_1 + x_2 = c$, chamado de *paralaxe linear ou estereoscópica do ponto A*. Quando o ponto observado estiver à direita do eixo da foto II, essa paralaxe será: $c = x_1 - x_2$.

Se medirmos as abscissas x_1 e x_2 das imagens de cada ponto identificado, por simples adição ou subtração se obterá o valor da paralaxe acima.

Dos triângulos semelhantes $L_1 A L_2$ e $a_1 L_1 a'_2$ deduzimos que

$$\frac{D}{E} = \frac{d}{c} \quad \text{ou} \quad \boxed{D = \frac{E \cdot d}{c}} \quad (308)$$

Nesta fórmula E e d são conhecidos, basta medir c nas fotografias para se obter o afastamento D do ponto; achado D , entra-se com seu valor na fórmula (307) para se obter X_1 .

Como vemos, são operações que não oferecem dificuldades e que permitem implantar com precisão pontos de detalhe identificáveis nas fotografias.

1 — *Cálculo das cotas* — Não difere do processo de fotogrametria comum o cálculo das cotas dos diversos pontos; assim a cota do ponto A do espaço se obtém facilmente pelo cálculo da diferença de nível y_1 entre o ponto do espaço e o plano horizontal que passa pelo ponto de vista L_1 .

Pela figura obtemos, medindo a ordenada y_1 da perspectiva do ponto sobre a fotografia as seguintes relações:

$$\frac{AA_1}{a_1a'_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{L_1A}{L_1} = \frac{D}{d}$$

donde

$$Y_1 = y_1 \frac{D}{d} \quad (309)$$

fórmula que permite calcular a ordenada Y_1 do ponto A ; para achar a cota, ainda é preciso levar em conta os dados de campo, referentes à posição plani e altimétrica da estação do fototeodolito cota da estação e altura do instrumento.

$$C_A = C_L + i' \pm Y_1 \quad (310)$$

d) *Coordenadas, no caso de base oblíqua.* No caso de *obliquidade* do par de fotografias (I e II) em relação à base L_1L_2 , a nova fórmula do *afastamento D*, fórmula também chamada de *equação fundamental* da estereofotogrametria, será deduzida da (Fig. 377).

Traçando por L_1 a reta a'_1L_1a' paralela a a_2L_2A , e por A uma paralela à base, teremos: $Aa' = E$.

Designando por φ o ângulo que o eixo das fotografias forma com a normal à base, $90^\circ - \varphi$ será o ângulo que esse eixo forma com a base.

Da figura se obterá as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} AQ &= E \cdot \cos \varphi \\ a'Q &= E \cdot \sin \varphi \\ \frac{QR}{a'Q} &= \frac{x_2}{d}, \text{ donde } QR = \frac{x_2}{d} E \sin \varphi \\ \frac{D}{d} &= \frac{AR}{x_1 + x_2} = \frac{E \cos \varphi - QR}{c} = \frac{E \cos \varphi - \frac{x_2}{d} E \sin \varphi}{c} \end{aligned} \quad (311)$$

e

$$D = E \frac{d \cdot \cos \varphi - x_2 \cdot \sin \varphi}{c} = E \frac{d'}{c} \quad (312)$$

fazendo

$$d \cos \varphi - x_2 \sin \varphi = d'$$

d' expressa a *distância de imagem variável* com a quantidade x_2 .

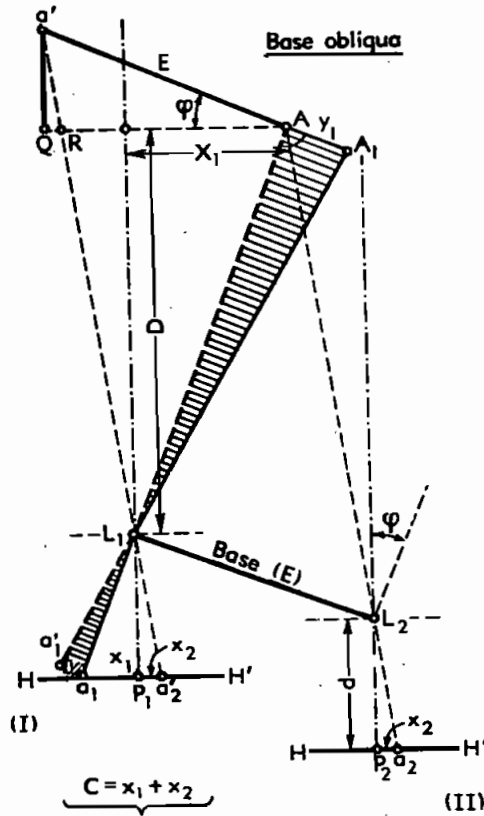


FIG. 377

Para as outras coordenadas X_1 e Y_1 , como no *caso normal*, se obterá:

$$\frac{X_1}{D} = \frac{x_1}{d}, \text{ donde } X_1 = x_1 \frac{D}{d} \quad (313)$$

e

$$\frac{Y_1}{D} = \frac{L_1 A}{L_1 a_1} = \frac{D}{d}, \text{ donde } Y_1 = y_1 \frac{D}{d} \quad (314)$$

Devido à pouca importância prática, deixamos de considerar ainda o caso de *eixos de levantamento convergentes*.

e) *Caso de obliquidade na prática.* Na figura abaixo (Fig. 378), exemplo de aplicação da estereofotogrametria terrestre, com medida de 2 bases e pares de fotografias de eixos paralelos, *normais* e *obliquos*, em relação às bases, vê-se o caso do ângulo φ com *sinal positivo* e *negativo*, com desvio angular do eixo óptico para a esquerda e direita da normal à base *E*.

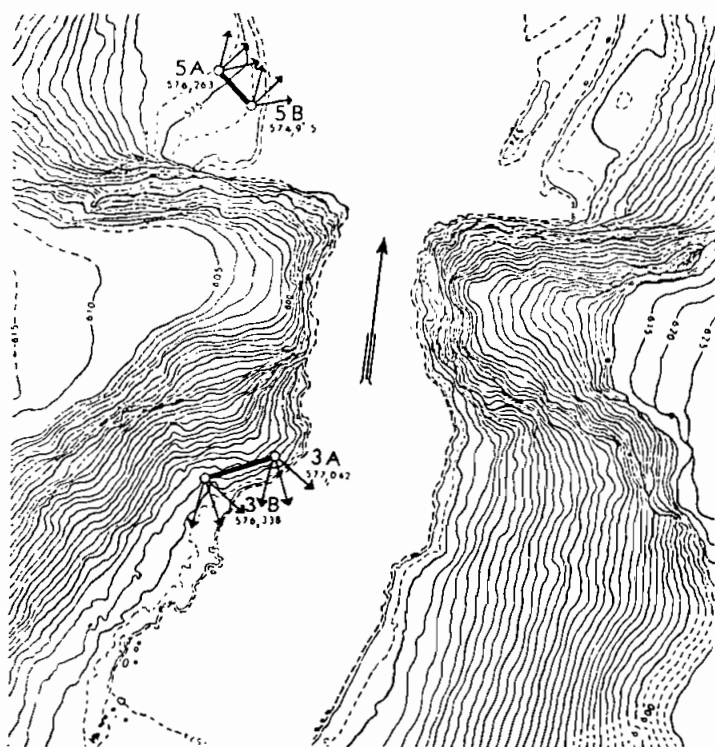


FIG. 378

145 — Visão estereoscópica. Estereocomparador de Pulfrich e estereoautógrafo de Von Orel

a) *Microscópio estereoscópico.* O princípio da estereoscopia consiste em ver com os dois olhos as imagens de um mesmo objeto em idênticas condições de afastamento e de posição. Os pontos aparecem como que em relevo, permitindo fazer sua justaposição e medir as diversas distâncias.

Para ampliar o limite de percepção do relevo usa-se um dispositivo, que aumenta o afastamento dos olhos que é o microscópio estereoscópico, instrumento que compreende (Fig. 379) 4 espelhos. S_1 , s_1 , S_2 e s_2 ,

para orientar a marcha dos raios. As duas objetivas Q_1 e Q_2 são móveis segundo o eixo do microscópio estereoscópico. O aumento das oculares é de aproximadamente 6 vezes ($d = 30$ mm) e desta maneira o aumento dos microscópios pode variar à vontade de 4 a 8 diâmetros.

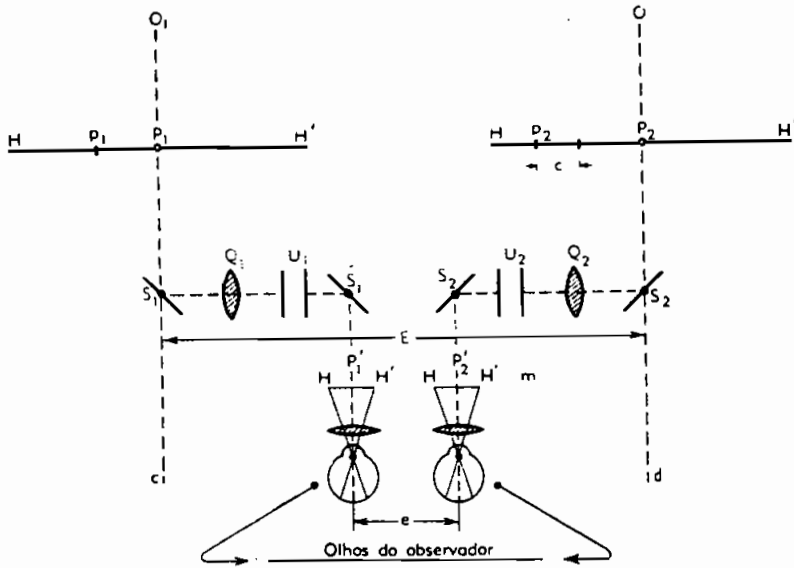


FIG. 379

Assim um observador que contempla no aparelho, acima uma paisagem OO_1 , a vê refletida pelos espelhos S_1, s_1, S_2, s_2 como se os olhos estivessem em c e d , com um afastamento E ; o limite de percepção do relevo da paisagem corresponde à relação existente entre E (base) e e (afastamento dos olhos).

Para $e = 65^m/m$ e $E = 65^m$, esta relação é igual a 10 e a percepção do relevo se estende a $4\ 1/2$ km aproximadamente.

Mas, sendo de 6 vezes o aumento G das oculares ainda teremos o

produto $\frac{G \times E}{e}$ chamado *plástica total*, que nos indica quantas vezes o limite da percepção do relevo será aumentado; no caso em apreço será: $\frac{6 \times 650}{65} = 60$ vezes maior que a olho nu, e o relevo se estende a cerca de 27 km.

Também os ângulos de convergência aumentam, o que permite reconhecer, pelas diferenças de profundidade, as diferenças de direção

paralática extremamente pequena, calculando a posição relativa dos pontos diferentemente afastados.

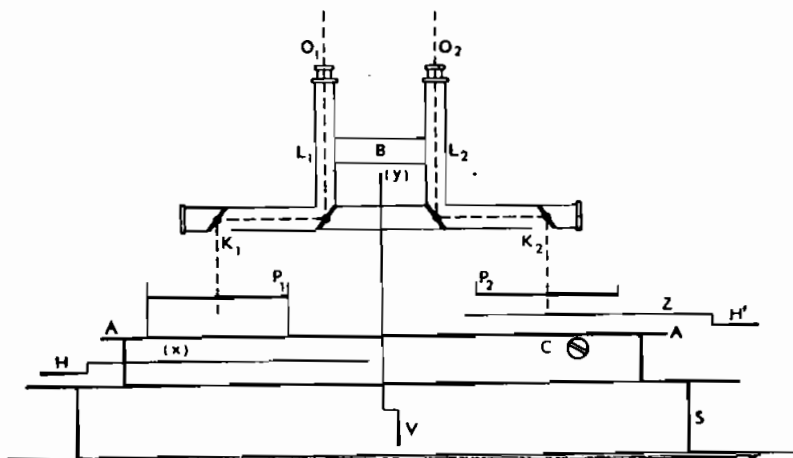
A exatidão das medidas angulares é muito aumentada pois se, a olho nu, podemos observar diferenças de paralaxes de $30''$, com aparelho de plástica total $60''$, diminui para $\frac{30}{60}$ ou $1/2''$, de maneira que

não só o limite de sensação do relevo é muito aumentado, assim como ainda a faculdade de apreciar o afastamento relativo dos diferentes objetos, situados dentro deste limite.

Os aparelhos baseados nestes princípios, são os estereo-comparadores, construídos em diversos países. Daremos detalhe de um tipo, fabricado pela Casa Zeiss, da Alemanha.

b) *Estereocomparador Pulfrich.* Esquemáticamente representamos na (Fig. 380) um *estereocomparador* ideado por *Pulfrich*.

Compõe-se o mesmo de uma base ou mesa fixa *S*, que contém o carro principal *A* com movimento horizontal longitudinal da esquerda para a direita ou da direita para esquerda, por meio da manivela *H*; de um segundo carro *B*, situado acima do primeiro, o qual contém as chapas ou *diapositivos* P_1 e P_2 , que se move também no sentido horizontal porém transversalmente numa direção perpendicular ao movimento do carro *A*, acionado por uma manivela de um microscópio estereoscópico fixo no carro *B*, com as oculares em O_1 e O_2 e as objetivas em k_1 e k_2 .



Esquema do estereocomparador
(Visto de Frente)

Fig. 380

Os deslocamentos do carro *A*, que contém as chapas, são medidos numa régua graduada *X* com vernier (Figs. 380 e 381) e os do carro *B* com os microscópios, numa régua, *Y*, também com vernier.

As chapas P_1 e P_2 , cujos centros devem estar em perfeita coincidência com pequenas marcas contidas nos retículos das objetivas k_1 e k_2 , devem estar situadas rigorosamente no mesmo plano, havendo parafusos de chamada D_1 e D_2 para orientação das linhas de horizonte; nos aparelhos mais modernos existem também parafusos de correção para a desigualdade da espessura dos vidros das chapas.

A chapa da esquerda, P_1 , dita *chapa principal*, é fixa; a da direita, P_2 , é, pelo contrário, móvel com relação ao carro *A*; pode-se deslocar, horizontal e longitudinalmente, com relação a *A*, pelo parafuso H' sendo a amplitude deste deslocamento medida sobre uma outra graduação *Z*, situada sobre o tambor móvel de um parafuso micrométrico. Enfim a chapa P_2 pode igualmente se deslocar transversalmente ao mesmo carro *A*, para diante ou para trás, pela manobra do parafuso *C*.

As oculares do sistema óptico do aparelho distam uma da outra do afastamento entre os olhos do observador.

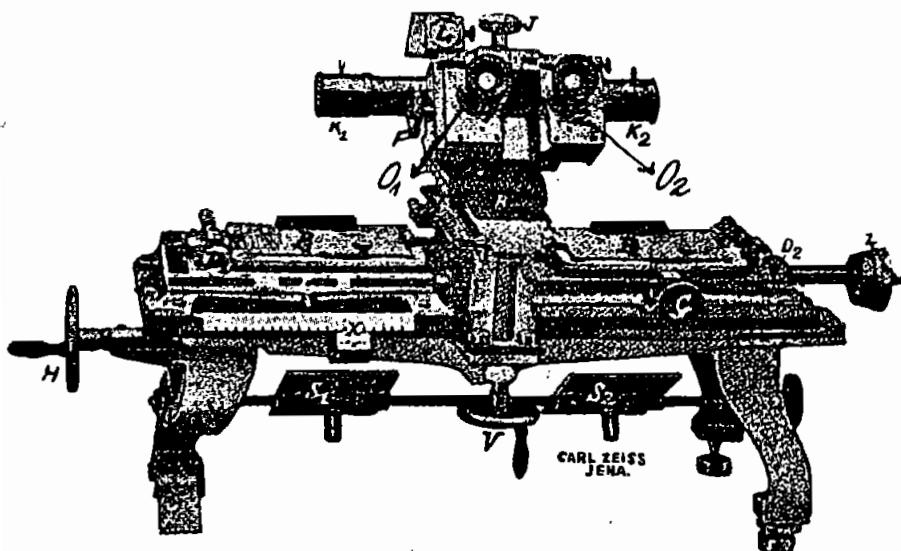


FIG. 381

Nomenclatura:

- A* — Primeiro carro principal, que contém as chapas P_1 e P_2 e que se desloca na direção dos horizontes das mesmas chapas pela manivela *H*.
- B* — Segundo carro principal, móvel na direção das verticais das chapas e que desloca o estereoscópio, cujo movimento é dado pela manivela *V*.

C — Parafuso de chamada para igualar a diferença de altura das duas chapas, diferença devida ao deslocamento das linhas de horizonte, por ocasião da tomada das fotografias.

D_1 e D_2 — Parafusos de chamada para retificar as orientações de P_1 e P_2 .

E — Alavanca de pressão do carro que contém a chapa P_1 , a qual deve ser fixa.

S_1 e S_2 — Espelhos girantes ao redor do mesmo eixo, para iluminar as chapas.

X — Escala com vernier móvel para a leitura das abscissas.

Y — Escala com vernier móvel para a leitura das ordenadas.

Z — Parafuso micrométrico em tambor, para a medida das paralaxes.

O sistema óptico é inclinado para a frente para maior comodidade do observador.

Ainda completam o aparelho: 1 parafuso J , para graduar o afastamento entre as oculares O_1 e O_2 ; 2 espelhos refletores S_1 e S_2 , girantes ao redor do mesmo eixo, com o fim de iluminar bem os positivos sobre vidro P_1 e P_2 (*diapositivos*).

c) *Uso do estereocomparador.* Deve-se, antes da colocação das chapas sobre o carro A , ajustar as oculares em correspondência com as pequenas marcas traçadas sobre o retículo, para o que se poderá colocar, em lugar das fotografias, vidros despolidos ou folhas de papel branco. Feito isto e convenientemente retificado o aparelho, procede-se à colocação das duas chapas P_1 e P_2 , com a camada sensível para cima, sobre o carro horizontal do *comparador*, de modo que o eixo óptico da luneta do microscópio passe pelo ponto principal de cada chapa e que os seus eixos horizontais e verticais sejam exatamente orientados de acordo com os movimentos horizontais, longitudinal e transversal, dos carros do comparador.

Deve-se também ter o cuidado de não trocar de posição as chapas P_1 e P_2 , assim a vista tomada da estação esquerda (P_1) ficará também à esquerda do carro A e a outra (P_2) à direita.

Obedecendo às condições acima, estarão reguladas as chapas e deveremos, então, tomar nota das leituras iniciais X_0 , Y_0 e C_0 , *abscissas*, *ordenadas* e *paralaxe* nas três escalas do comparador.

Estas leituras poderão ser zero, caso as origens das 3 graduações estiverem em face dos zeros dos verniers das escalas.

Seja agora determinar as coordenadas de um ponto A . Façamos a coincidência da imagem a_1 (sobre P_1) com a marca do retículo da luneta L_1 e a imagem a_2 com a da luneta L_2 .

Pode-se fazer com grande exatidão a visada porque a observação das duas imagens com os dois olhos produz o efeito estereoscópico.

Assim, também, desde que se tenha a imagem estereoscópica das marcas em contato com a do ponto a_1 do terreno na chapa P_1 , e da outra, P_2 , se fará automaticamente, pois as duas marcas do estereoscópio se encontram ao mesmo tempo sobre dois pontos idênticos das vistas, sem que haja necessidade de procurar o ponto na chapa à direita.

Façamos então as novas leituras X_1 , Y_1 e C_1 sobre as referidas escalas, donde as diferenças de leitura nos dão nossas incógnitas x_1 , y_1 e c_1 .

Assim

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - X_0 \\ y_1 &= Y_1 - Y_0 \\ c &= C_1 - C_0 \end{aligned} \quad (315)$$

Estas medidas são avaliadas com precisão devido à potência do relêvo com que se vê a paisagem no comparador, pois a plástica total ($G \cdot E$)
 $\frac{\quad}{e}$ pode atingir 1 000 vezes ou mesmo mais, nos estereocompara-

dores modernos.

Depende ainda esta precisão do contato íntimo da marca com o ponto A do terreno, que deve ser avaliado com grande exatidão, dependendo também esta da boa visão do observador, tanto natural como estereoscópica.

Nas condições normais, avalia-se a abscissa X e a ordenada Y com 0^{mm}, 02mm de aproximação e a paralaxe com 0,01mm; pode descer ainda este valor para 0,01mm e 0,005mm respectivamente, desde que o operador seja bastante hábil.

As leituras tomadas do comparador não determinam diretamente a posição plani e altimétrica de um ponto, devendo recorrermos às fórmulas já determinadas:

$$D = \frac{E \cdot d}{c} \quad (1) \quad X_1 = \frac{x_1 \cdot D}{d} \quad (2) \quad e \quad Y_1 = \frac{y_1 \cdot D}{d} \quad (3)$$

E e d são dados conhecidos; x_1 , y_1 e c fornecidos pelo estereocomparador.

As três quantidades D , X_1 e Y_1 podem, assim, ser obtidas por cálculo simples para cada ponto, ou construídas graficamente.

d) *Consideração final.* Pelo exposto pode-se depreender quanto a estereofotogrametria terrestre é mais vantajosa do que a fotogrametria comum, pois torna desnecessária toda identificação de pontos em diversas chapas, fornece uma aproximação pelo menos dez vezes maior na procura das abscissas e ordenadas dos pontos, permite obter afastamentos com uma grande precisão, pela medida das paralaxes estereoscópicas, enfim não exige sobre o terreno senão bases relativamente curtas (10 vezes menores do que com a fotogrametria).

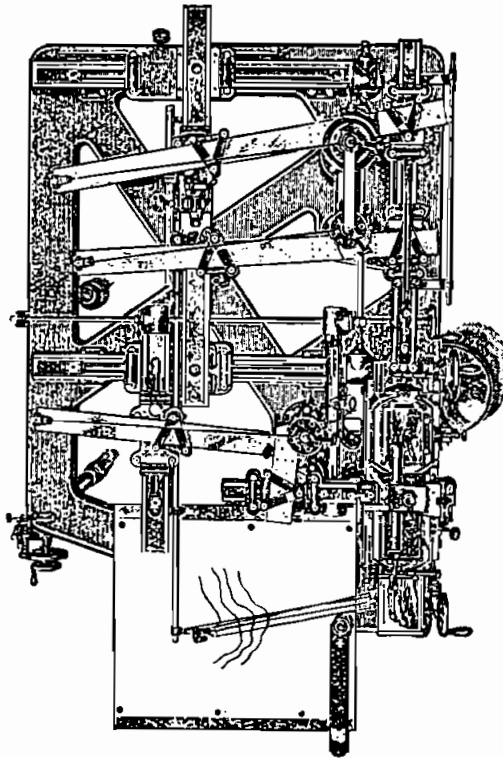
Em terrenos próprios e com boa organização de serviços, a excelência e perfeição do método estereofotogramétrico impõe-se sobre os outros, não só pela rapidez como pela economia de tempo e de operações.

É por isto que o uso de tal método desenvolve-se cada vez mais, na fotogrametria terrestre para o levantamento dos detalhes.

Pode-se também operar com placas paralelas entre si, porém oblíquas em relação à base e não situadas no mesmo plano como vimos na dedução das fórmulas respectivas, no caso de *obliquidade* da base.

Vistas conjugadas de eixos convergentes ou divergentes, de orientação qualquer, ainda pode ser empregada de modo que se resolve facilmente, hoje, com o estereocomparador as dificuldades inerentes ao processo fotogramétrico, tanto terrestre, como aéreo.

O que veio, porém, aumentar consideravelmente as facilidades para o desenho das plantas, neste processo, foi a invenção na Áustria, devida ao Capitão *Von Orel*, do *estereoautógrafo*, combinação do *estereocomparador* com um *panógrafa* para o traçado dos pontos e das curvas de nível do terreno.



Estereoautógrafo von
Orelzeiss, modelo C,
visto de cima.

Aplicação dos pontos "Kern" à identificação de pontos

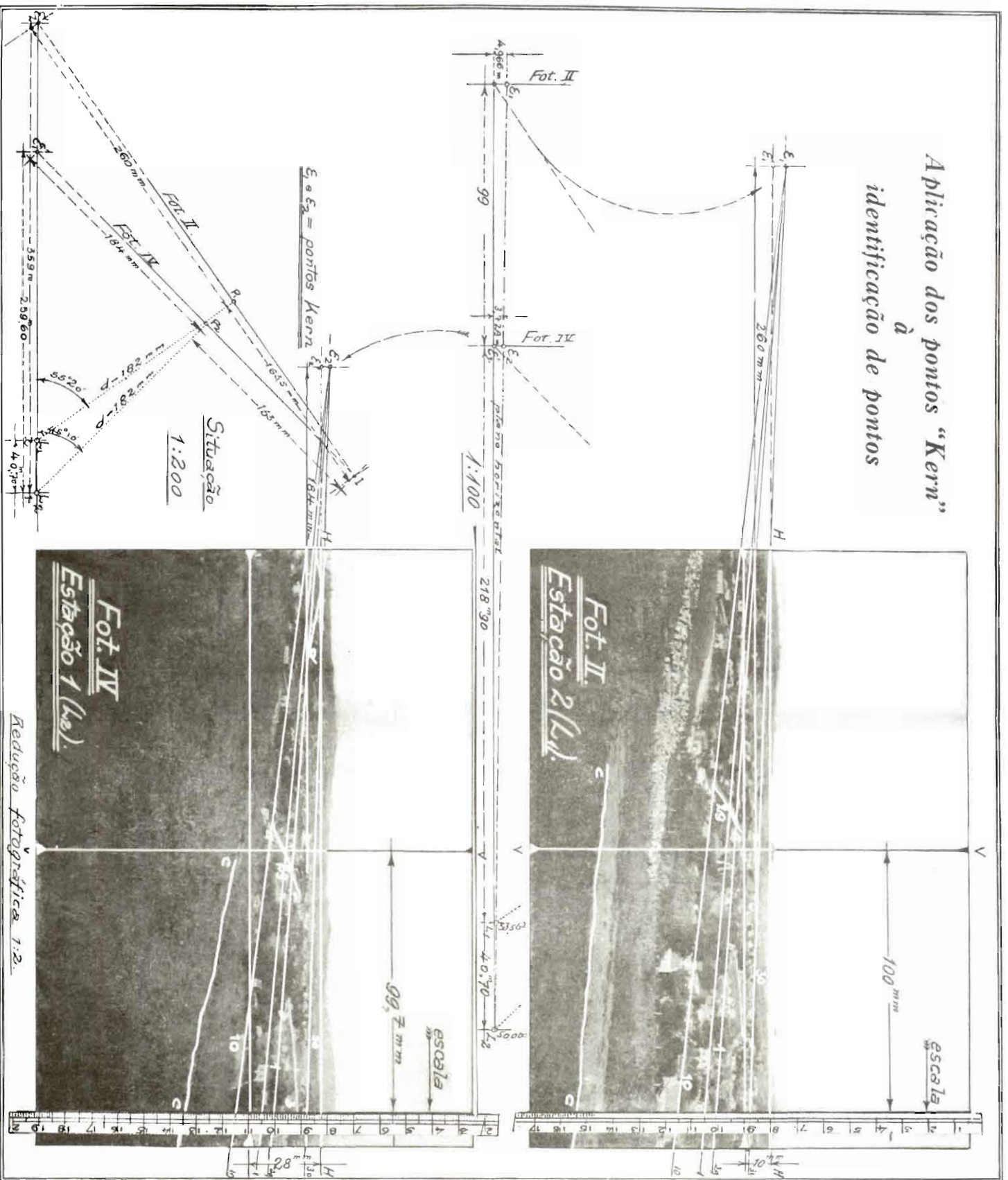


Fig. 385

e) *Estereoautógrafo Von Orel-Zeiss*. A transmissão automática do movimento dos carros do estereocomparador, necessário para a medida das coordenadas das placas, é feita por um sistema de alavancas (réguas de um pantógrafo) ligado a um traçador (lápiz) e foi ideado em 1908 pelo capitão austríaco Eduardo *Von Orel*, sendo o primeiro modelo construído pelas oficinas mecânicas de *Rost*, em Viena (Fig. 382).

O primeiro modelo comercial foi construído pela Casa Zeiss, com a colaboração do Dr. Pulfrich e teve sua aplicação desenvolvida juntamente com a evolução da fotogrametria.

O aparelho de *Von Orel-Zeiss*, chamado de *estereoautógrafo*, é a combinação de um estereocomparador e de um sistema de desenho mecânico, que trabalha automaticamente, um verdadeiro *autocartógrafo mecânico*.

A (Fig. 382) nos permite ver com clareza as 3 alavancas (réguas) giratórias, cada uma ao redor de um ponto fixo. Da direita para a esquerda, estas réguas se denominam:

régua (alavanca) de *paralaxes*,
régua (alavanca) de *direções* e
régua (alavanca) de *alturas*.

Por intermédio do respectivo ponto de rotação, cada alavanca se divide em duas partes, o *braço curto* e o *longo*.

O braço curto da régua de paralaxes forma com o longo um ângulo fixo de 90° , e o braço curto da régua de alturas determinados ângulos com o braço longo respectivo. Os braços curtos são presos com as guias do comparador, ao qual estão ligados, para o traçado do desenho.

Cada movimento do comparador, fora de sua posição fundamental, ocasiona uma rotação do respectivo eixo da alavanca de uma grandeza angular, cuja *tangente é proporcional do deslocamento do carro*, ou seja, *proporcional à variação de coordenadas da placa*.

A seguir vem como elucidação sobre o método estereofotogramétrico, uma aplicação feita por nós, com a cooperação de alunos nos morros de Teresópolis, nos arredores de Porto Alegre.

Foram tomadas de uma base 3 pares de fotografias, por 3 turmas de alunos, que permitiriam obter $\sim 30Ha$ de detalhes, dos quais nos limitamos a representar uma parte na Planta anexa, como exercício prático.

§ 35 – Aplicações práticas

146 – De estereofotogrametria

a) *Operações de campo*. A aplicação prática da estereofotogrametria que descrevemos, foi feita nos morros de Teresópolis, subúrbio de Porto Alegre, com a turma de alunos do 2.º ano, do então Instituto de Engenharia, em 1936.

Não dispondo, para a tomada das fotografias no campo de um fototeodolito Zeiss ou Wild, necessário e indispensável para levantamentos de precisão, fizemos uso do fototeodolito Laussedat, formato grande, para chapas 18 x 24 cm, de que já nos servíramos o ano anterior para, em local próximo, fazer o levantamento de detalhes com o processo fotogramétrico comum e os resultados foram bons, como se verá do exposto.

Num morro fronteiro, como vemos na Planta anexa (Fig. 383), escolhemos uma base $L_2 L_1 \dots$, medida plani e altimetricamente, com um taqueômetro auto-redutor e nível de luneta, respectivamente, verificando-se ainda, as distâncias por uma trena de aço aferida.

Assim, é que foram escolhidas as estações 1 (L_2), 2 (L_1) 3 e 4 para a tomada das fotografias estereofotogramétricas I, III, V e VI, perpendiculares à mesma base comum 1-4 e distantes uma da outra de alguns decâmetros.

Devido a um erro de orientação no campo, não foi possível aproveitar a fotografia V, tomada com $95^{\circ}6'$ sobre a base, servindo-nos no entanto das outras três para a aplicação pretendida.

1 — Distâncias (a trena)

Da estaca 1 a 2	40,70
Da estaca 2 a 3	51,70
Da estaca 3 a 4	70,00
<hr/>	
Comprimento total da base	162,40 m
<hr/>	
Da estaca I ao ponto A (intermediário)	55,80
Do ponto A ao ponto P (poste)	158,00
<hr/>	
Distância da estação I ao ponto P (poste)	213,80 m
<hr/>	

2 — Distâncias e cotas taqueométricas (taqueômetro auto-redutor)

PONTOS VISADOS	Ângulos horizontais	Leituras na mira	Tangentes	Distâncias	Cotas
ESTAÇÃO 1 (Altura do instrumento = 1,375)					50 000m
P (poste).....	101g11'				
A.....	(91°)				
	91°	0,200	-- 17,75	55,80	41,271m
		0,758	-- 16,75		
ESTAÇÃO A (Altura do instrumento = 1,407)					
P (poste).....	0g	0,100	-- 16,10	157,80	17,093m
		1,678	-- 15,15		

3 – Nivelamento geométrico (Nivel Zeiss); Mira de 5 m

ESTACAS	VISADAS		Altura do instrumento	Cotas	Observações
	Ré	Vante			
1.....	3,040	53,040	50,000	R.N.
2.....	2,477	50,563	
3.....	3,462	49,578	
a.....	4,910	48,130	
a.....	0,010	48,140	
b.....	4,735	43,405	
b.....	0,158	43,563	
c.....	4,770	38,793	
c.....	0,226	39,019	
d.....	4,250	34,789	
d.....	0,202	34,971	
e.....	4,562	30,409	
e.....	0,065	30,474	
f.....	4,395	26,079	
f.....	0,316	26,395	
g.....	4,700	21,695	
g.....	0,339	22,034	
P (poste).....	5,000	17,034	
3.....	0,999	50,577	40,578	
4.....	3,828	46,749	

4 – Fototeodolito Laussedat

FOTOGRAFIAS	Ângulos horizontais	Deslocamentos do cursor
ESTAÇÃO 1 (Altura do instrumento = 1,365)		
I.....	90°	+ 28m/m + 27m/m
IV.....	45°10'	
ESTAÇÃO 2 (Altura do instrumento = 1,330)		
III.....	90°	+ 8m/m,2 + 10m/m
II.....	55°20'	
ESTAÇÃO 3 (Altura do instrumento = 1,285)		
V.....	95°6' (?)	+ 17m/m
ESTAÇÃO 4 (Altura do instrumento = 1,380)		
VI.....	90°	- 13m/m
Distância focal		= 182m/m

Escolhemos ainda, para servir na verificação do aparelho com que trabalhamos um ponto bem distinto, assinalado na planta com a palavra *Poste*, convenientemente medido, em distância e cota, e triangulado das estações 1 e 4.

Vemos nas fotografias I e III (Fig. 384), que nos serviram principalmente para o desenho da planta, marcados pelos mesmos números os pontos identificados nas duas fotos.

EXEMPLO DE ESTEREOFOTOGRAMETRIA

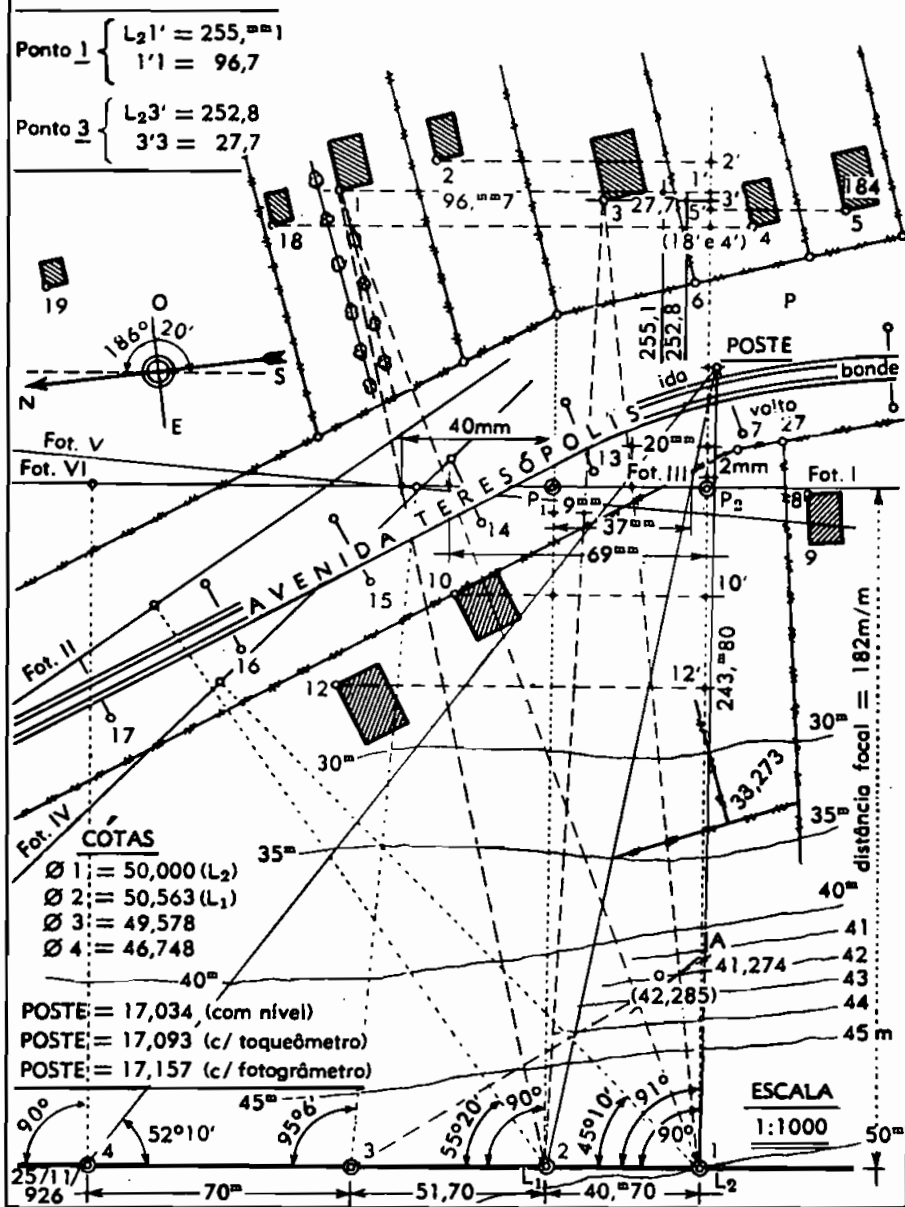


FIG. 383

Nas mesmas fotografias ainda se notam as marcas $H-H$ e $V-V$, que determinam em seu cruzamento os pontos principais P_1 e P_2 das perspectivas da paisagem.

A 28 mm e 0,2 mm acima das linhas de horizonte das chapas correspondentes às marcas triangulares do aparelho, acham-se as novas linhas $H'-H'$, deslocadas de acordo com as indicações de campo.

Antes de descrever a marcha para a implantação estereofotogramétrica dos pontos de detalhe foi verificado o ponto assinalado poste (ponto P).

Pelos dados de campo, vemos que sua distância da estação 1, medida a trena foi de 213,80 m e sua cota, achada por nivelamento geométrico 17,034 m dados tomados como básicos, pois foram sensivelmente verificados pela triangulação e taqueometria.

b) *Operações de escritório.*

1) *Cálculo de distâncias e cotas.* Assim, do triângulo formado pela base 1-4 com o ponto P (poste), deduzimos:

$$b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{162,40 \times 0,7898}{0,5995} = 213,95 \text{ m}$$

sendo:

b — a distância a verificar;

a — o comprimento da base 1 — 4;

β — o ângulo formado pela base com (P) = $52^{\circ}10'$;

α — o ângulo suplementar, medido no próprio ponto P = $36^{\circ}50'$.

Como vemos a diferença foi pequena, apenas 0,15 m.

Na avaliação da distância e cota taqueométrica do ponto P (poste), fomos obrigados a, no mesmo alinhamento $L_2 - P$, tomar um ponto intermediário A ; pelos dados do campo, obtemos:

para o ponto A :

$$\text{(distância)} \quad d = (0,758 - 0,200) 100 = 55,800 \text{ m}$$

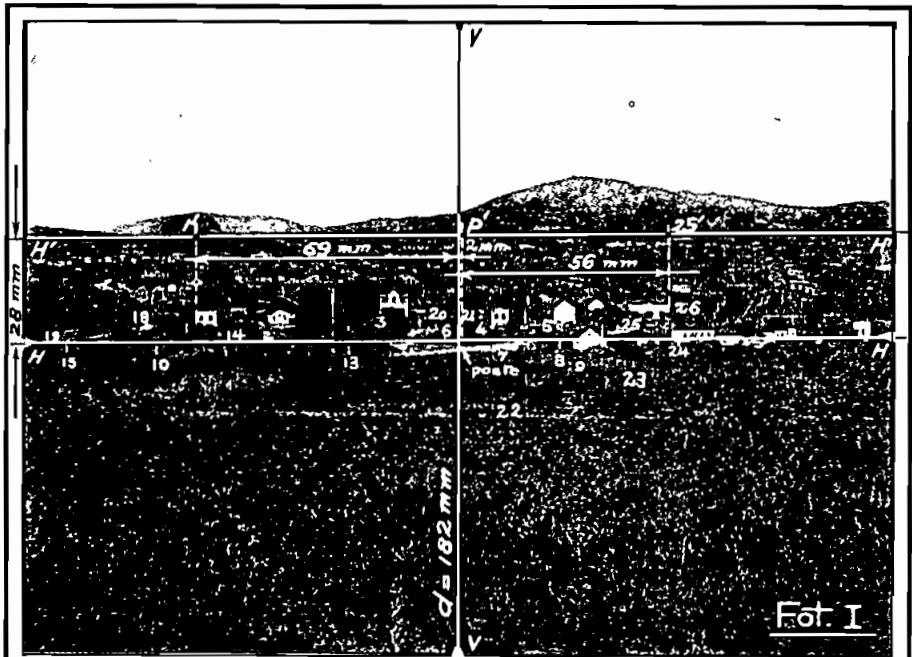
$$\text{(diferença de nível)} \quad h = \frac{d \cdot \operatorname{tg} a}{100} = - \frac{55,80 \times 16,75}{100} = -9,346 \text{ m}$$

$$\text{Cota do centro do instrumento} = 50,000 + 1,375 = 51,375 \text{ m}$$

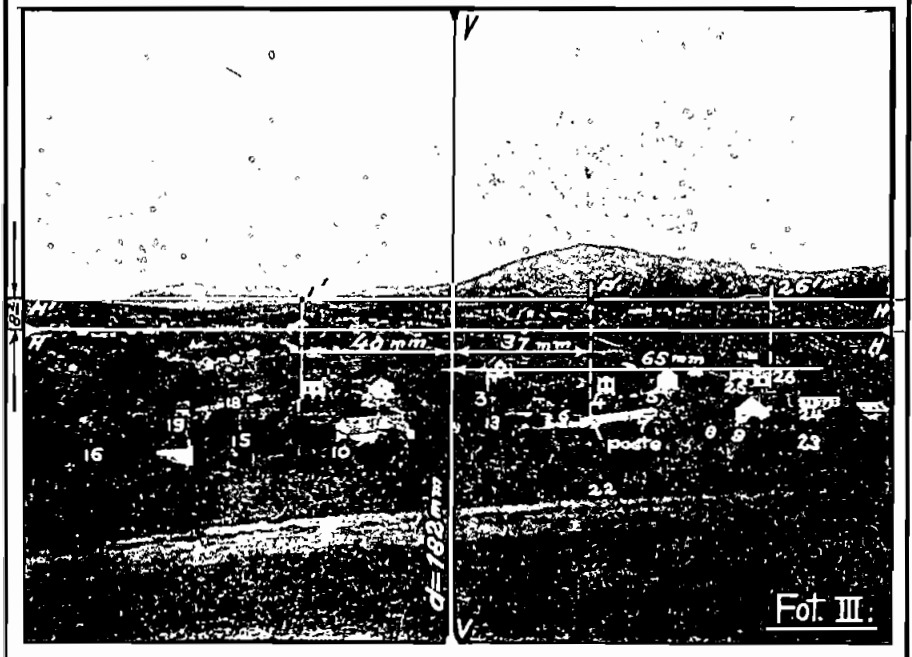
$$\text{Cota do ponto de mira} \quad 42,029 \text{ m}$$

$$\text{Leitura da mira} \quad 0,758 \text{ m}$$

$$\text{Cota do ponto } A = 41,271 \text{ m}$$



*Fotografias estereofotogramétricas
tomadas das estações 1 e 2 (L, e L₂)*



Redução linear 1:2

para o ponto P (poste)

$$d = (1,678 - 0,100) 100 = 157,800 \text{ m}$$

$$h = - \frac{157,80 \times 15,15}{100} = - 23,907 \text{ m}$$

$$41,271 + 1,407 = 42,678 \text{ m}$$

$$\underline{18,771 \text{ m}}$$

$$1,678 \text{ m}$$

$$\text{Cota do ponto } P = \underline{17,093 \text{ m}}$$

Também a distância e cota taqueométrica diferem pouco das medidas já dadas.

2) *Coordenadas fotogramétricas dos pontos.* Finalmente avaliemos pela estereofotogrametria, pelas fórmulas já deduzidas, as coordenadas planimétricas em relação ao eixo $L_1 P_1$ e a cota do ponto P (poste).

Utilizemos para tal fim as fotografias I e III (Fig. 384), que nos dão.

$$\text{(paralaxe) } c = x_1 - x_2 = 36,7\text{mm} - 2\text{mm} = 34,7\text{mm}$$

$$\text{(base) } E = 40,70\text{m}$$

$$\text{(distância focal) } d = 182\text{mm.}$$

Com estes dados calcularemos D , X_1 e Y_1 .

$$D = \frac{E \cdot d}{c} = \frac{40,70 \times 182}{34,7} = 213,40\text{m}$$

$$X_1 = x_1 \frac{D}{d} = \frac{36,7 \times 213,40}{182} = 43,03\text{m}$$

$$\text{(com relação à foto III) } Y_1 = y_1 \frac{D}{d} = - \frac{29,7 \times 213,40}{182} = - 34,823\text{m}$$

$$\text{cota do centro do instrumento} = 50,563 + 1,330 = 51,893$$

$$\text{cota do ponto } P \text{ (poste) } 17,070 \text{ m}$$

Estes resultados mostram que, mesmo sem o uso de aparelhos de precisão para a tomada das vistas e estereocomparador para a determinação das coordenadas e paralaxe, os resultados são aceitáveis, e de fácil aplicação, com o uso de gráficos e tabelas.

Com o processo fotogramétrico comum (Laussedat) a cota do ponto P (poste) será:

$$\text{(distância)} \quad d = 213,80 \text{ m}$$

$$\text{(da foto I)} \quad \text{tg } \alpha = \frac{29,2 \text{ mm}}{182} = 0,160, \text{ donde } \alpha = \sim 9^{\circ}06'$$

$$\text{(dif. de nível)} \quad n = d \cdot \text{tg } \alpha = 213,80 \times 0,160 = 34,208$$

$$\text{cota do centro do instrumento} = 50,000 + 1,365 = 51,365$$

$$\text{cota do ponto } P = 17,157 \text{ m}$$

Com o ponto P assim determinado e verificado o aproveitamento das fotografias I e III, pode-se proceder à localização de todos os pontos identificáveis.

Assim, para o ponto 1 (canto de uma casa), temos:

$$c = x_1 - x_2 = 69 - 40 = 29 \text{ mm}$$

$$(L_2 1') \quad D = \frac{E \cdot d}{c} = \frac{40,70 \times 182}{29} = 255,10 \text{ m}$$

$$(1'1) \quad X1 = \frac{x_1 \cdot D}{d} = \frac{69 \times 255,1}{182} = 96,70 \text{ m}$$

$$\text{(dif. nível)} \quad Y1 = \frac{\gamma_1 \cdot D}{d} = - \frac{28 \times 255,1}{182} = - 39,24 \text{ m}$$

$$\text{e a cota do ponto 1} = 50,563 + 1,330 - 39,24 = 12,653 \text{ m}$$

Para o ponto 3, que se encontra entre os eixos prolongados das 2 fotografias III e I, $L_1 P_1$ e $L_2 P_2$ temos:

$$c = x_1 + x_2 = 20 + 9,3 = 29,3 \text{ mm}$$

$$(L_2 3') \quad D = \frac{E \cdot d}{c} = \frac{40,70 \times 182}{29,3} = 252,80 \text{ m}$$

$$(3'3) \quad X1 = \frac{x_1 \cdot D}{d} = \frac{20 \times 252,8}{182} = 27,72 \text{ m}$$

$$\text{(Dif. nível)} \quad Y1 = \frac{x_1 \cdot D}{d} = - \frac{25 \times 252,8}{182} = - 34,72 \text{ m}$$

$$\text{e a cota do ponto 3} = 50,553 + 1,330 - 34,72 = 17,173 \text{ m}$$

Deste modo foram calculados todos os pontos de detalhe da planta, com relativa facilidade, pois o produto $E \cdot d$ para cada par de fotografias, é constante; dispondo do *estereocomparador* os dados são fornecidos pelo próprio aparelho, com precisão muito maior, porque a análise é feita diretamente sobre os negativos ou diapositivos das chapas, em relevo plástico.

Afirmamos que o emprego da fotogrametria só pode trazer vantagens em economia de tempo e dinheiro, na marcação de detalhes, além de serem os diapositivos preciosos dados que se tem sempre à mão.

Como complemento à fotogrametria comum, ainda damos, em prancha anexa a aplicação dos pontos *Kern* à identificação ou verificação de pontos homólogos.

147 — Emprego dos pontos Kern (no exercício anterior)

Para tal aplicação vamos nos servir das fotografias IV e II (Fig. 385), tomadas, respectivamente, das estações $L_2(1)$ e $L_1(2)$, e orientadas pelos ângulos α ($45^\circ 10'$) e β ($55^\circ 20'$) com a *base*.

Marcadas segundo estes ângulos as direções das fotografias, sobre elas tomamos 182 mm (distância focal) e fixamos assim os pontos P_2 e P_1 .

Prolongando a base $L_1 L_2$ das estações fotográficas L_1 e L_2 , esta irá cortar os traços das fotografias II e IV, também prolongados, nos pontos ϵ_1 e ϵ_2 , que são os pontos Kern, em projeção e cujas propriedades já foram estudadas.

Os traços das fotografias, prolongados ainda para o lado oposto, determinam a intersecção I. Da planta, desenhada à parte, em escala maior, tiramos:

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1' L_2 = 359 \text{ mm} & \epsilon_1' P_2 = 184 \text{ mm} \\ \epsilon_2' L_2 = 259 \text{ mm} & \epsilon_2' P_1 = 260 \text{ mm} \end{array}$$

Ainda

$$P_1 I = 163,5 \text{ mm} \quad \text{e} \quad P_2 I = 163 \text{ mm}$$

a) *Determinação dos pontos Kern.* Para determinarmos os pontos Kern, em altura acima ou abaixo da linha do horizonte, servimo-nos da diferença de nível entre as estações consideradas e das distâncias $1' L_2$ e $2' L_2$.

Assim

$$\text{(Diferença de nível } L_1 \text{ e } L_2) \quad h = 50,563 - 50,000 = 0,563 \text{ m}$$

$$\text{(Diferença de nível } L_2 \text{ e } 2') \quad h' = \frac{259,60 \times 0,563}{40,70 \text{ m}} = 3,729 \text{ m}$$

$$\text{(Diferença de nível } L_2 \text{ e } 1') \quad h'' = \frac{359,00 \times 0,563}{40,70 \text{ m}} = 4,966 \text{ m}$$

Para a localização dos pontos Kern, assim determinados nas fotografias II e IV, começamos por prolongar as linhas de horizonte (já deslocadas, de acordo com as indicações de campo (para a esquerda, no nosso caso) e marcar os pontos 1' e 2' distantes dos pontos principais P_1 e P_2 de 260 e 184 mm, respectivamente.

Em verticais por 1' e 2', marcamos finalmente ε_1 e ε_2 (pontos Kern) com as alturas calculadas h'' e h' .

b) *Utilização dos pontos Kern.* As escalas, para a marcação dos pontos, podem ser colocadas na intersecção, à direita, ou nos pontos desenhados, de acordo com a seguinte relação:

Para a fotografia II: 100 mm (arbitrário)

$$\text{Para a fotografia IV: } \frac{100 \times 163,5}{163} = 99,7 \text{ mm}$$

Para origem de contagem das escalas, tomamos pontos perfeitamente identificados nas fotografias. Assim o ponto 1 que intercepta 105 mm na escala da fotografia II, deverá também interceptar esta mesma graduação na outra escala.

Como verificação poderemos tomar o ponto 10 que, nas duas escalas, intercepta o mesmo número, 115,2 mm, o ponto 30 idem, 88 mm, etc.

Para identificação de um ponto 29 sobre uma estrada, *a-a*, por exemplo, na fotografia II, unimos o ponto Kern ε_1 com este ponto e prolongamos até à escala; transferimos então 101 mm (graduação) para a escala da fotografia IV e unindo 101 com ε_2 determinamos sobre o outro traço *a-a* da estrada na fotografia II o ponto 29 correspondente.

Assim procederíamos para quaisquer pontos sobre outros detalhes, *b-b*, *c-c*, etc.

Em aplicações correntes de fotogrametria comum ou estereofotogrametria o uso destes pontos é favorável e sua aplicação não oferece dificuldades.

148 — Emprego da Fotogrametria comum (Método de Laussedat)

Com o intuito de mostrar que, praticamente, dispondo-se de um aparelho fotogramétrico e de um teodolito comum ou de um fototeodolito, se pode obter resultados satisfatórios, nos levantamentos topográficos comuns, foi que resolvemos, com a turma de alunos do 2.º ano do *Instituto de Engenharia*, aplicar o processo indicado, num dos morros do bairro de Teresópolis, em Porto Alegre.

Fizemo-lo com um fototeodolito Laussedat, para chapas 18×24 , previamente retificado.

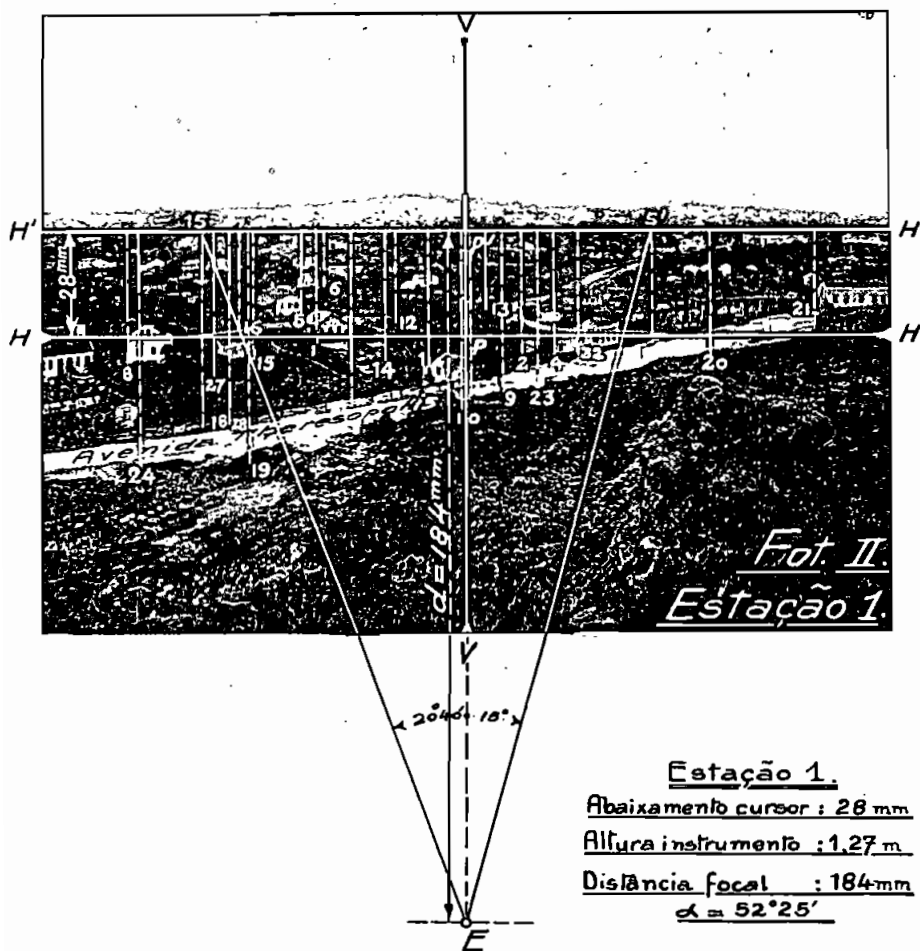


FIG. 387

Fotografia II, tomada da estação 1 (E), que foi utilizada para o desenho da planta baixa anexa (Fig. 387).

Exemplo — Distância (d) e cota (h) do ponto 18.

(planta $d = 147$ m/m, $5 \times 500 = 73,75$ m

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{18 - 18'}{E - 18'} = \frac{26,5}{98,5} = 0,2690 \text{ ou } \alpha = 15^{\circ}3'$$

$$\begin{aligned} (\text{dif. nível}) \ n &= d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 73,75 \times 0,2690 = 19,84 \text{ m} \\ \text{donde } n &= 100,55 - 19,84 = 80,71 \text{ m} \end{aligned}$$

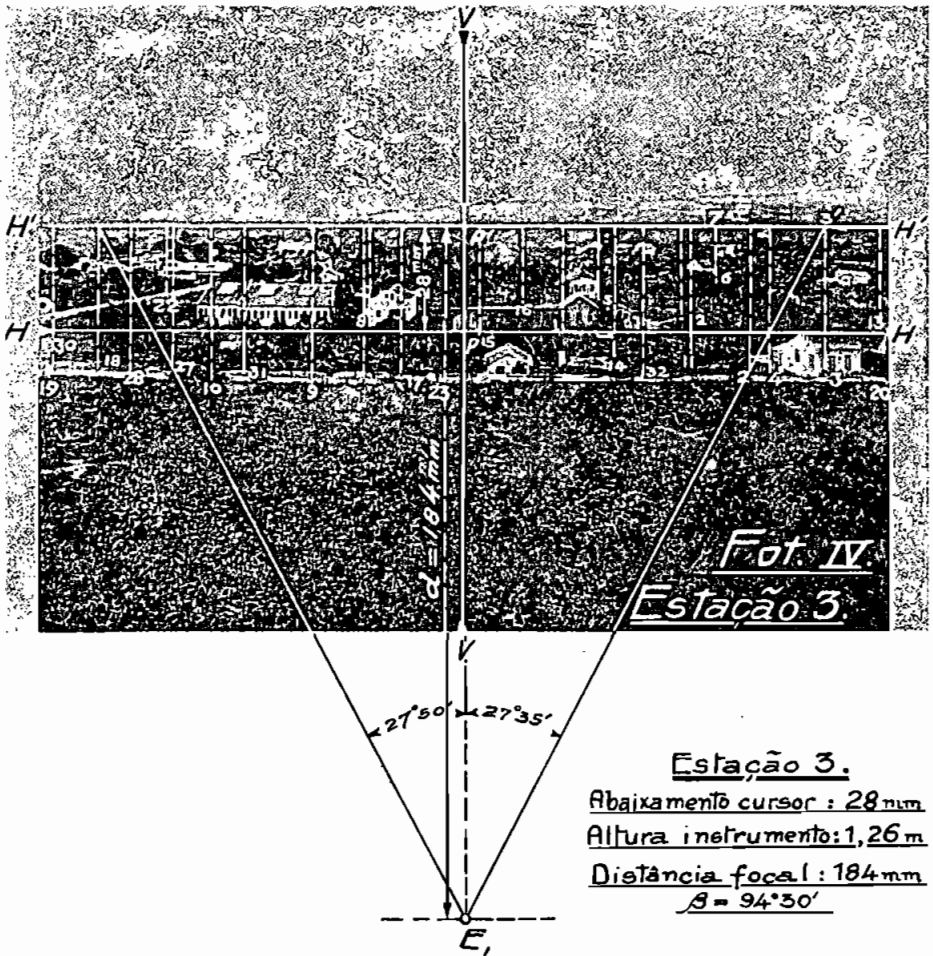


FIG. 388

Fotografia IV, tomada da estação 3 (E_1), que foi também utilizada para o desenho da planta baixa anexa (Fig. 388).

Exemplo — Distância (d) e cota (h) do ponto 18.

$$\text{(planta)} \quad d = 167,5 \times 500 = 83,75 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{18 - 18'}{E_1 - 18'} = \frac{19}{104} = 0,1827 \text{ ou } \alpha = 10^{\circ}21'$$

$$\begin{aligned} \text{(dif. nível)} \quad n &= d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 83,75 \times 0,1827 = 15,30 \text{ m} \\ \text{donde } h &= 96,02 - 15,30 = 80,72 \text{ m} \end{aligned}$$

Num morro fronteiro, como vemos na planta (Fig. 386) foi escolhida uma base EE_1 , medida taqueometricamente nos 2 sentidos e nivelada precisamente.

Escolhidas as estações 1, 2 e 3, delas foram tiradas 4 fotografias, que permitiram o desenho da planta anexa, mediante pontos, convenientemente identificados e cotados.

Vemos nas fotografias II e IV (Figs. 387 e 388), tiradas das estações 1 e 3, marcados pelo mesmo número os pontos identificados.

Nas mesmas fotografias ainda se notam as marcas $H-H$ e $V-V$ que determinam as linhas do horizonte e vertical e que mostram pelo seu cruzamento a posição do ponto principal P da perspectiva da paisagem.

A 28 m/m acima da linha do horizonte $H-H$, acha-se a linha $H'-H'$, deslocada e real, marcada de acordo com as indicações de campo, quer dizer, com o deslocamento da objetiva, medido na régua graduada do cursor, de 28 m/m abaixo do eixo central.

As medidas que, para cada fotografia devem ser tomadas no campo, acham-se em tabela desenhada na própria planta (Fig. 386).

Vejam, a título de verificação, algumas distâncias e cotas, tomadas também a taqueômetro e a nível.

a) *Marcação dos pontos em planta.* Para o desenho da planta junto, foram utilizadas, principalmente, as fotografias II e IV, tiradas respectivamente das estações E e E_1 ou 1 e 2.

Estas fotografias, convenientemente orientadas, acham-se representadas pelas linhas de horizonte $H-H$, distante das estações, E e E_1 , de EP e E_1P ou 184 m/m, que é a distância focal fixa do fototeodolito Laussedat empregado.

Sobre as linhas do horizonte $H-H$ foram transportadas com esquadro apropriado, todos os pontos identificados, em uma e noutra fotografia, de forma a dar, pelo encontro das retas que unem esses pontos às respectivas estações, as suas posições em planta baixa.

Assim foram determinados os pontos 20, 23, 19 e 24, que definiram a borda do corte feito para a estrada de rodagem; 17, 31, 18, etc., que limitaram a mesma estrada; 39 e 40, que assinalaram a posição de um chalé de madeira existente; etc.

b) *Cotas dos pontos.* As cotas de todos os pontos foram obtidas, diretamente, medindo nas fotografias (Figs. 387 e 388) as diversas alturas dos pontos à linha do horizonte $H'-H'$, obtendo as tangentes, como já vimos, e multiplicando-as pelas distâncias, medidas na planta baixa.

Como ponto de verificação foi tomado o poste de iluminação pública, 19, devido à facilidade de identificação e visibilidade das diversas estações.

Sua distância à estação *E*, obtida taqueometricamente é de 63,90 m; medida na planta e multiplicada pelo inverso da escala* é: $256 \times 250 = 6400 \text{ m/m}$ ou 64 metros; a diferença havida de 0,10 m é tolerável e justifica a precisão das medidas e retificações feitas.

A diferença de nível, obtida também do taqueômetro (auto-redutor) e verificada por nivelamento (Zeiss), é de 19,74 m.

Da *fotografia II*, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{193} = 0,3108, \text{ donde } \alpha = 17^{\circ}16'$$

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 64,00 \times 0,3108 = 19,89 \text{ m}$$

Da *fotografia IV*, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{43}{215} = 0,200, \text{ donde } \alpha = 11^{\circ}20'$$

$$h_1 = d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 76,20 \times 0,200 = 15,24 \text{ m}$$

Diferença de nível entre

$$\begin{array}{r} E \text{ e } E_1 = 4,53 \\ \hline h = 19,77 \text{ m} \end{array}$$

A média dos dois resultados acima será:

$$\frac{19,89 + 19,77}{2} = 19,83 \text{ m}$$

difere, como vemos, pouco do nivelamento geométrico dado acima.

Obtida a cota de todos os pontos identificados, fácil é o *traçado das curvas de nível*, como já explanado na *Altimetria*.

Com as 4 fotografias tiradas, poderia ser maior a área de detalhes desenhada; mas a finalidade do exercício teve unicamente por escopo mostrar aos que ainda não aplicaram o processo descrito, suas vantagens, em rapidez, economia e comodidade, em muitos casos da prática, para o levantamento dos detalhes.

* Note-se que houve redução fotográfica (1:2) na execução do clichê, resultando portanto, nova escala (1:500).

Quinta Parte - EXERCÍCIOS PRÁTICOS

A seqüência dos exercícios práticos contidos neste Curso de Topografia, obedece, em suas linhas gerais, ao desdobramento do programa teórico dado nas Escolas e Faculdades de Engenharia, Arquitetura e Agronomia do País, durante um ano letivo.

A parte complementar sobre "Levantamentos de Precisão, Aerofotogramétricos, Viários, Hidrográficos, Subterrâneos e Cadastrais" constituirão assunto de futuro livro de extensão e aperfeiçoamento.

§ 36 - Cálculos topográficos

149 - Relação das fórmulas de trigonometria

1) *Funções circulares.* Sendo X e Y as coordenadas planas ortogonais de um ponto, r o raio vetor e α o ângulo compreendido entre o eixo dos y e o raio r , tem-se

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{X}{r}; \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{Y}{r}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{Y}$$

2) *Medida dos ângulos.*

$$\alpha^{\circ} : \alpha^{\prime} : \alpha^{\prime\prime} = 360^{\circ} : 400^{\prime} : 2 \pi$$

donde

$$\alpha^{\circ} = \frac{9}{10} \alpha^{\prime}; \quad \alpha^{\prime} = \frac{10}{9} \alpha^{\circ}; \quad \alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \alpha^{\prime\prime}; \quad \alpha^{\prime\prime} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \alpha^{\circ}$$

3) *Radiano.*

$$\varrho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ}17'44'',806\dots$$

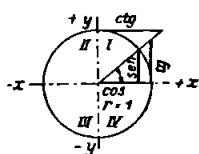
$$\varrho^{\prime} = \frac{180 \times 60}{\pi} = 3437'44'',806\dots$$

$$\varrho^{\prime\prime} = \frac{180 \times 60 \times 60''}{\pi} = 206264'806\dots$$

$$\varrho^{\prime\prime\prime} = \frac{200}{\pi} = 63^{\prime\prime},66197\dots$$

$$\frac{\pi}{180} = 0,0174533$$

4) Sinais nos quatro quadrantes.



	sen	cos	tg	ctg
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

5) Funções dos ângulos simples.

	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sen	$-\text{sen } \alpha$	$\text{sen } \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$\text{sen}(\pm\alpha)$
cos	$\text{cos } \alpha$	$\mp \text{sen } \alpha$	$-\text{cos } \alpha$	$\pm \text{sen } \alpha$	$\text{cos}(\pm\alpha)$
tg	$-\text{tg } \alpha$	$\mp \text{ctg } \alpha$	$\pm \text{tg } \alpha$	$\pm \text{ctg } \alpha$	$\text{tg}(\pm\alpha)$
ctg	$-\text{ctg } \alpha$	$\mp \text{tg } \alpha$	$\pm \text{ctg } \alpha$	$\pm \text{tg } \alpha$	$\text{ctg}(\pm\alpha)$

6) Valores limites e especiais.

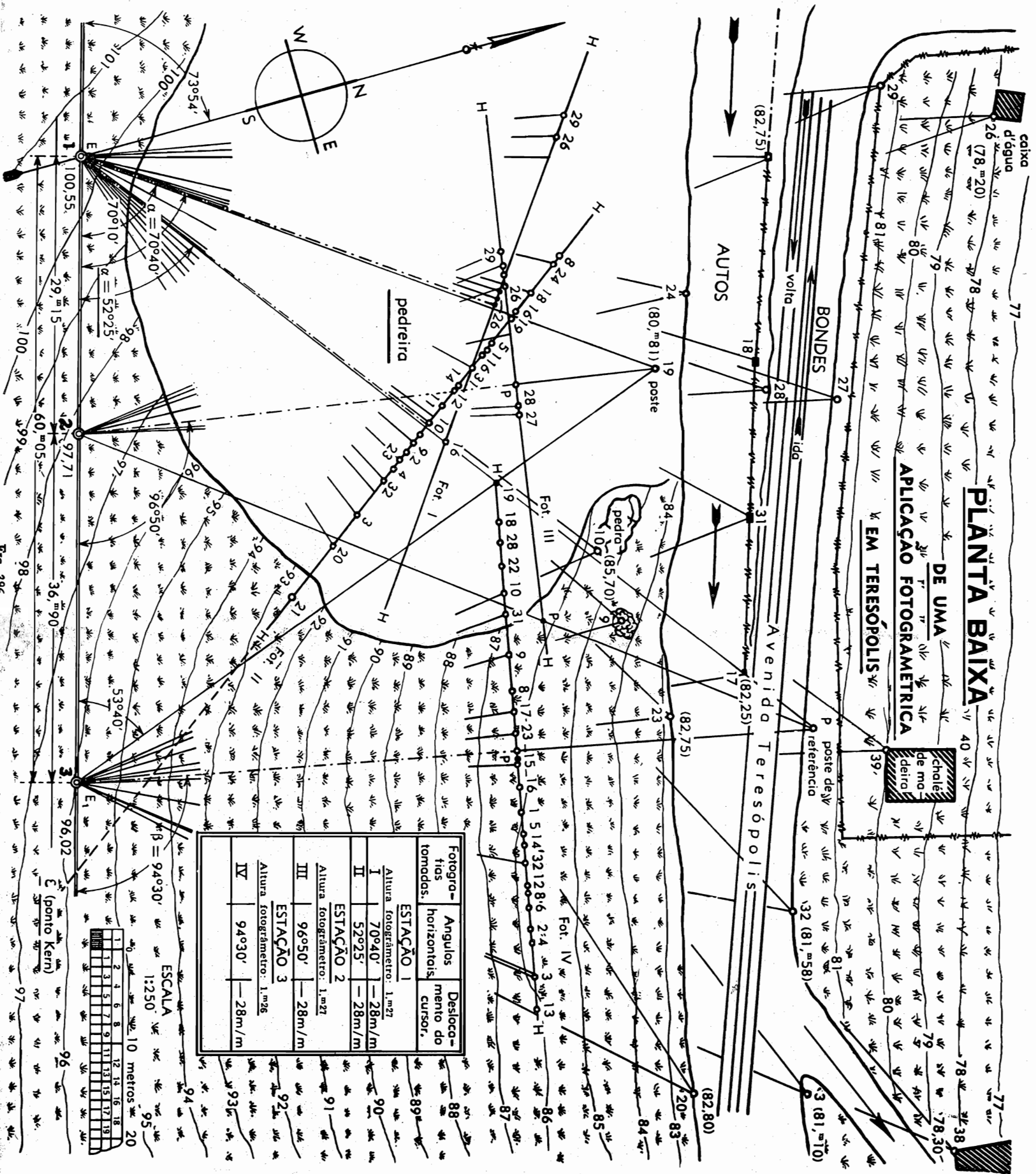
	0° 360°	90°	180°	270°	45°	30°	60°
sen	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ctg	$+\infty$	0	$\pm \infty$	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

7) Correlação das funções.

	sen α	cos α	tg α	ctg α
sen $\alpha =$		$\sqrt{1-\text{cos}^2\alpha}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$
cos $\alpha =$	$\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\text{ctg } \alpha}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$
tg $\alpha =$	$\frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{cos}^2\alpha}}{\text{cos } \alpha}$		$\frac{1}{\text{ctg } \alpha}$
ctg $\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen } \alpha}$	$\frac{\text{cos } \alpha}{\sqrt{1-\text{cos}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{tg } \alpha}$	

PLANTA BAIXA

DE UMA
APLICAÇÃO FOTOGRAMETRICA
EM TERESOPOLIS



Fotografias tomadas.	Angulos horizontais.	Deslocamento do cursor.
ESTACÇÃO I		
Altura fotografmetro: 1.m27		
I	70°40'	-28m/m
II	52°25'	-28m/m
ESTACÇÃO 2		
Altura fotografmetro: 1.m27		
III	96°50'	-28m/m
ESTACÇÃO 3		
Altura fotografmetro: 1.m26		
IV	94°30'	-28m/m

$\beta = 94^{\circ}30'$
ESCALA 1:250

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

10 metros

Fig. 386

$$1. \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad 2. \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad 3. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

8) *Ângulos duplo e metade.*

$$1. \operatorname{sen} 2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2. \cos 2 \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3. \operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$4. \operatorname{ctg} 2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = 1/2 (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$$

$$5. \operatorname{sen} \alpha/2 = \sqrt{1/2(1 - \cos \alpha)} = 1/2 (\sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha})$$

$$6. \cos \alpha/2 = \sqrt{1/2(1 + \cos \alpha)} = 1/2 (\sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha} + \sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha})$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha/2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \sqrt{(1 - \cos \alpha) : (1 + \cos \alpha)}$$

$$8. \operatorname{ctg} \alpha/2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \sqrt{(1 + \cos \alpha) : (1 - \cos \alpha)}$$

$$9. 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen} \alpha$$

9) *Potências do seno e co-seno.*

$$1. 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$2. 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$3. 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$4. 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$5. 4 \operatorname{sen}^3 \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$$

$$6. 4 \cos^3 \alpha = 3 \cos \alpha + \cos 3\alpha$$

10) *Funções de dois ângulos.*

$$1. \operatorname{sen} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$2. \cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$3. \operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) : (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

$$4. \operatorname{ctg} (\alpha \pm \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1) : (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha)$$

$$5. \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$6. \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$7. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$8. \cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$9. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad 10. \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

$$11. \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen} (\alpha - \beta)$$

$$12. \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta = \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta)$$

$$13. \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = 1/2 [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$14. \cos \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

$$15. \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 [\operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]$$

$$16. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\spadesuit 17. \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

11) *Relações entre os ângulos do triângulo.*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$1. \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$2. \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + 1$$

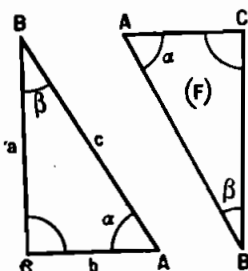
$$3. \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \gamma = 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$4. \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} - 1$$

5. $\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta + \text{sen}^2 \gamma = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + 2$
6. $\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \gamma = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta \cdot \cos \gamma$
7. $\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta + \text{tg} \gamma = \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta \cdot \text{tg} \gamma$
8. $\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg} \frac{\beta}{2} + \text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2}$
9. $\text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \beta + \text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \gamma + \text{ctg} \beta \cdot \text{ctg} \gamma = 1$
10. $\text{sen} 2 \alpha + \text{sen} 2 \beta + \text{sen} 2 \gamma = 4 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma$
11. $\text{sen} 2 \alpha + \text{sen} 2 \beta - \text{sen} 2 \gamma = 4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen} \gamma$

12) Cálculo dos triângulos retângulos.

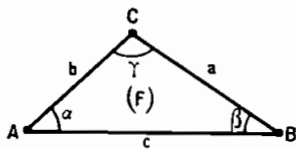
Dados	Procurados	Fórmulas
a, b	α	$\text{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \alpha = 90^\circ - \beta$
	β	$\text{tg} \beta = \frac{b}{a}; \beta = 90^\circ - \alpha$
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2}; c = \frac{a}{\text{sen} \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha}$
	F	$F = \frac{a \cdot b}{2}$
a, c	α	$\text{sen} \alpha = \frac{a}{c}; \alpha = 90^\circ - \beta$
	β	$\cos \beta = \frac{a}{c}; \beta = 90^\circ - \alpha$
	b	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a) \cdot (c-a)} = c \cdot \cos \alpha = c \cdot \text{sen} \beta$
	F	$F = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a) \cdot (c-a)} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen} \beta$
a, α	b	$b = a \cdot \text{ctg} \alpha$
	c	$c = \frac{a}{\text{sen} \alpha}$
	F	$F = \frac{a^2}{2} \cdot \text{ctg} \alpha$
b, α	a	$a = b \cdot \text{tg} \alpha$
	c	$c = \frac{b}{\cos \alpha}$
	F	$F = \frac{b^2}{2} \cdot \text{tg} \alpha$
c, α	a	$a = c \cdot \text{sen} \alpha$
	F	$F = \frac{c^2}{2} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \text{sen} 2 \alpha$



F(Área)

13) Cálculo dos triângulos obliquângulos.

Dados	Procurados	Fórmulas
a, b, γ	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a \cdot b \cdot \cos \gamma}$
	α	$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} \operatorname{sen} \gamma$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b - a \cos \gamma}$
	β	$\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{b} \operatorname{sen} \gamma$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{b - a \cos \gamma}{a - b \cos \gamma}$
	F	$F = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{2}$
a, β , γ ou a, α , β	α	$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$; $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$
	β	$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} \alpha}$
	c	$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} (\gamma + \gamma)}{\operatorname{sen} \alpha}$
	F	$F = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)}$ $\alpha > b$, assim β sempre agudo; $\beta < \alpha$
a, b, a	β	$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$
	γ	$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
	c	$c = a \cos \beta + b \cos \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = b \cos \alpha + \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$
	F	$F = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma}{2} - \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$



150 – Exercícios práticos

1) Erros planimétrico e altimétrico.

a) Erro planimétrico (ϵp)

Elipsóide terrestre:

Dados de Hayford (1909)

- 1) Raio equatorial (a) = 6378388 m
- 2) Raio polar (b) = 6356912 m
- 3) Raio da esfera de mesma superfície = 6371003 m
- 4) Raio da esfera de mesmo meridiano do que a Terra = 6367654 m
- 5) Meridiano terrestre = \sim 40009 km
- 6) Arco de um grau AB (círculo máximo) = \sim 111136 m
- 7) Tangente CED:

$$CED = 2 R \operatorname{tg} 30' = 2 \times 6367654 \times 0,00872685 = 2 \times 55569,56 = 111139,12 \text{ m}$$

Erro planimétrico (ϵp)

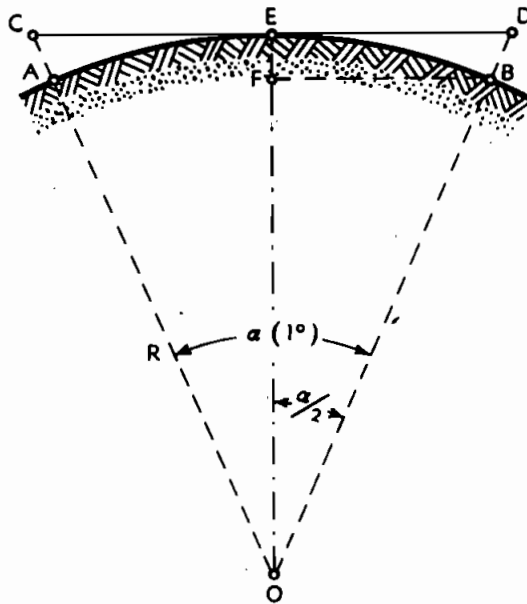


FIG. 389

$$\varepsilon p = \text{tangente } CED - \text{calota esférica } AEB = 111139,12 - 111136 = 3,12 \text{ m}$$

Os levantamentos que abrangem um grau terrestre são do domínio da Geodésia, que leva em conta a forma da Terra; os levantamentos topográficos isolados não excedem, em geral, 8000 Ha de superfície, o que corresponde aproximadamente a um círculo de 10 km de diâmetro.

Corresponde a um ângulo central de 6', com erro desprezível de 0,01 m (1 : 1 000 000).

b) Erro altimétrico (ε_a). A fórmula deduzida é a seguinte:

MP – tangente instrumental

MQ – curvatura devida à refração

MA – curvatura da Terra

$AP(h)$ – erro devido à curvatura da Terra

PQ – abaixamento devido à refração

AQ – erro altimétrico do triângulo OMP :

$$(R + h)^2 = R^2 + D^2 \quad \text{donde} \quad h = \frac{D^2}{2R + h} \approx \frac{D^2}{2R}$$

Substituindo R (raio terrestre) pelo seu valor:

$$h = \sim 0,000000785 \cdot D^2$$

Expressando h em m e D em Km , ter-se-á:

$$h_{(m)} = \sim 0,08 D^2_{(Km)}$$

Para visadas de longo alcance, este erro atinge proporções consideráveis; para D igual a 5 km, $h = \sim 2$ m, o que excederia de muito a tolerância admitida. Para uma visada de 110 m, o erro seria somente:

$$h = 0,08 \times 0,11^2 = \sim 0,001 \text{ m}$$

Há, porém, outra causa que faz diminuir esse erro, e que provém da refração.

O abaixamento do raio luminoso (PQ) é da ordem de $0,15$ ($\sim \frac{1}{7}$) de h , e assim o erro altimétrico (ϵa) é de somente:

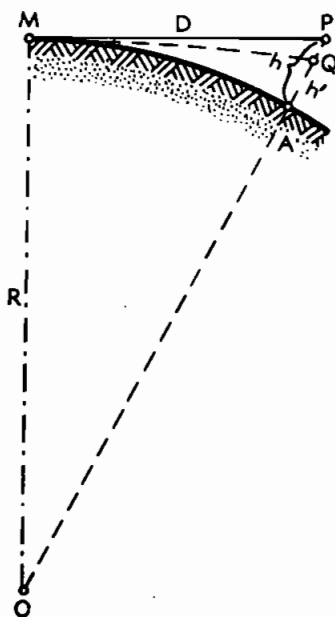


FIG. 390

$$\epsilon a = h - 0,15 h = 0,425 \frac{D^2}{R}$$

ou

$$\epsilon a_{(m)} = 0,067 \cdot D^2_{(Km)}$$

Esta correção só se torna sensível para distâncias de visadas superiores a 180 m, para a qual é de 0,002 m e não influi sobre o resultado do nivelamento quando as distâncias das visadas de ré são proxima-mente iguais às das visadas de vante.

c) *Tabela de curvatura e refração terrestre (C - R).*

$$C - R_{(m)} \cong 7 \times D^2_{(Km)}$$

D	C - R	D	C - R
1 km	0,07 m	21 km	30,1 m
2 km	0,27 m	22 km	33,0 m
3 km	0,61 m	23 km	36,1 m
4 km	1,09 m	24 km	39,3 m
5 km	1,70 m	25 km	42,6 m
6 km	2,45 m	26 km	46,1 m
7 km	3,34 m	27 km	49,7 m
8 km	4,36 m	28 km	53,5 m
9 km	5,52 m	29 km	57,3 m
10 km	6,82 m	30 km	61,4 m
11 km	8,25 m	31 km	65,5 m
12 km	9,82 m	32 km	69,8 m
13 km	11,52 m	33 km	74,2 m
14 km	13,36 m	34 km	78,8 m
15 km	15,34 m	35 km	83,5 m
16 km	17,45 m	36 km	88,4 m
17 km	19,70 m	37 km	93,3 m
18 km	22,09 m	38 km	98,4 m
19 km	24,61 m	39 km	103,7 m
20 km	27,27 m	40 km	109,1 m

d) *Para valores menores do que 1 km.*

D	C - R	D	C - R
50 m	0,0002 m	550 m	0,021 m
100 m	0,0007 m	600 m	0,025 m
150 m	0,0015 m	650 m	0,029 m
200 m	0,003 m	700 m	0,033 m
250 m	0,004 m	750 m	0,038 m
300 m	0,006 m	800 m	0,044 m
350 m	0,008 m	850 m	0,049 m
400 m	0,011 m	900 m	0,055 m
450 m	0,014 m	950 m	0,061 m
500 m	0,017 m		

II) *Conversão de medidas angulares.*

a) *Conversão de grados em graus e vice-versa.*

Fórmulas: $360^\circ : 400^\circ = a^\circ : a^\circ$

$$\text{donde } a^\circ = \frac{10}{9} a^\circ \text{ e } a^\circ = \frac{9}{10} a^\circ$$

1.º) Achar o valor em *grados*, correspondente a $34^\circ 25' 18''$ (a°)

1.ª *operação.* Reduzir *minutos e segundos* à fração decimal do grau.

$$25 \times 60 + 18 = 1518'' \text{ e } \frac{1518}{3600} = 0,4217$$

2.ª *operação.* Aplicando a fórmula acima, obtemos

$$a^\circ = \frac{10}{9} 34,4217 = 38^\circ,2463$$

Utilizando a *tabela (I)* de conversão:

34°	37°,77777
25'	0°,46296
18''	0°,00556
34°25'18''	38°,24629

$$\cong 38^\circ,2463$$

2.º) Achar o valor em *graus*, correspondente a $18^\circ,8361$ (a°).

1.ª *operação.* Tomar os $9/10$ do valor dado em *grados*:

$$a^\circ = \frac{9}{10} 18^\circ,8361 = 16^\circ,9525$$

2.ª *operação.* Achar os *minutos e segundos sexagesimais*:

$$(\text{minutos}) 0^\circ,9525 \times 60' = 57'150$$

$$(\text{segundos}) 0',150 \times 60 = 9''$$

$$\text{e } a^\circ = 16^\circ 57' 9''$$

Utilizando a Tabela de conversão:

18°	16°12'
83'	44'49'',2
61''	19'',76
18°,83 61	16°57'08'',96

$$\sim 16^\circ 57' 9''$$

b) *Exercício sobre radiano. Definição:* Radiano – ângulo central que subtende um arco de comprimento igual ao raio do círculo (R).
Supondo $R = 1$, e chamando de ρ ao radiano, se terá



$$\pi : 180^\circ = 1 (R) : \rho^\circ$$

$$\rho^\circ = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3,1416} = 57^\circ 17' 45''$$

ou, reduzindo a minutos:

$$\rho' \cong 3438'$$

ou, a segundos:

$$\rho'' \cong 206265''$$

Exercício prático. Calcular o valor do ângulo visual (a) que subtende uma baliza (1,80 m) a uma distância de 800 m do observador.

$$1,80 : 800 = a'' : 206265''$$

donde

$$a'' = \frac{1,80 \times 206265}{800} = 464'',1$$

ou

$$a = 7'44''$$

III) *Sistema métrico decimal. Sistema antigo.*

a) *Transformação de sistema antigo agrário em sistema decimal.* Uma fazendola, com 23 quadras de sesmaria de campo e 8 idem idem de mato, segundo sistema antigo, deve ser dividido entre 2 herdeiros; quantos hectares e frações (sistema métrico) tocará a cada herdeiro, em partes iguais, de campo e de mato?

Uma quadra de sesmaria tem 132 m de frente por uma légua ou 50 quadras de fundo ($50 \times 132 \text{ m} = 6600 \text{ m}$); em hectares:

$$132 \times 6600 = 871200 \text{ m}^2 = 87,12 \text{ ha}$$

$$1 \text{ Hectare} = 100 \times 100 = 10\,000 \text{ m}^2$$

Área de campo (em ha)

$$23 \times 87,12 = 2003,76 \text{ ha}$$

Área de mato (em ha)

$$8 \times 87,12 = 696,96 \text{ ha}$$

A cada herdeiro caberá 1001,88 ha de campo e 348,48 ha de mato.

b) *Transformação de sistema decimal em sistema antigo.* Embora o sistema oficial de medidas seja o decimal, costuma-se, ao lado deste, entre parêntesis, figurar o equivalente no sistema antigo, atendendo a pedido de interessados.

Assim, no levantamento de uma fazenda obteve-se 5487,2634 ha, calcular o valor equivalente em quadras de sesmaria (60 braças de frente por 1 légua de fundo).

1 quadra de sesmaria = 87,12 ha.

O número (n) de quadras será:

$$n = \frac{5487,2634}{87,12} = 62,9851 = \sim 63 \text{ quadras de sesmaria.}$$

1 quadra quadrada = 1,7424 ha

1 quadra de sesmaria = $50 \times 1,7424 = 87,12$ ha

1 légua de sesmaria = $87,12 \times 50 = 4356$ ha

IV) Medida de alinhamentos. a) Processos diretos de medida em terreno inclinado e reduções ao horizonte.

1.º) Com medida do declive (clisimetro). (Até 15%)

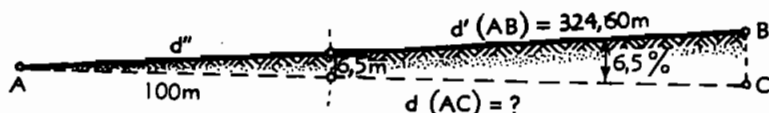


FIG. 391

Fórmula $d = \frac{d'}{\sqrt{1 + \delta^2}}$ (aproximadamente)

$$d = \frac{324,60}{\sqrt{1 + (0,065)^2}} = \frac{324,60}{\sqrt{1,004225}} = \frac{324,60}{1,0022} = 323,89 \text{ m}$$

2.º) Medida do declive. Cálculo da projeção:

$$d = d' \cdot \cos \overbrace{(\text{tg } \delta = 0,065)}^{(3^\circ 43')} = 324,60 \times 0,997897$$

$$d = 323,92 \text{ m (certo)}$$

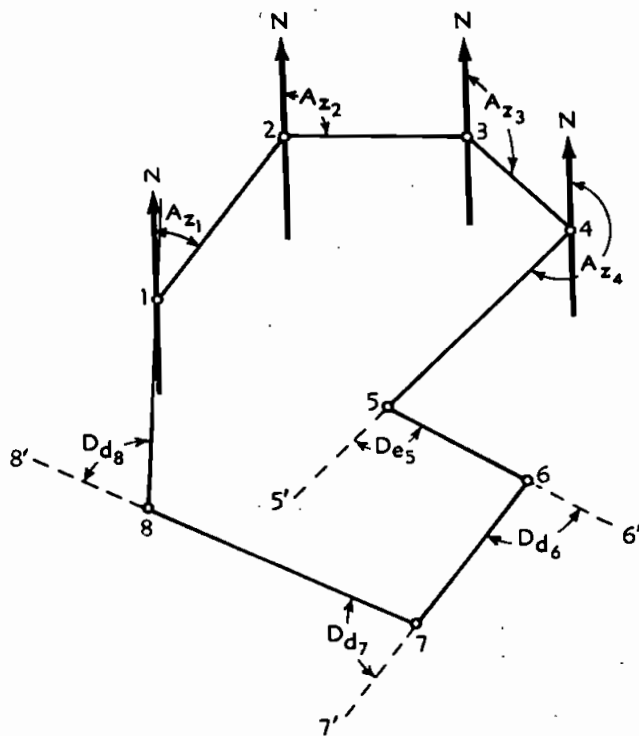
3.º) *Idem*, com cálculo da hipotenusa:

$$d'' = \sqrt{100^2 + 6,5^2} = \sqrt{10042,25} = 100,21 \text{ m}$$

e

$$d = \frac{324,60}{100,21} \times 100 = 323,92 \text{ (certo)}$$

V) Levantamento a bússola. Cálculo de azimutes, ângulos internos e rumos. Calcular os ângulos internos e os rumos dos alinhamentos de uma poligonal fechada de 8 vértices, com a medida de 4 azimutes e 4 reflexões, com caminhamento perimétrico a esquerda.



Dados:

$$Az_1 = 39^\circ$$

$$Az_2 = 92^\circ$$

$$Az_3 = 136^\circ$$

$$Az_4 = 228^\circ$$

$$De_5 = 109^\circ$$

$$Dd_8 = 98^\circ$$

$$Dd_7 = 77^\circ$$

$$Dd_8 = 61^\circ$$

FIG. 392

Fórmula geral dos azimutes:

$$Az_n = Az_{n-1} \pm Ai_n \pm 180^\circ$$

1.º) Fórmula dos azimutes, para caminhar perimétrico, a esquerda:

$$Az_n = Az_{n-1} - Ai_n \pm 180^\circ$$

2.º) Fórmula dos ângulos internos em função dos azimutes (c. p. esquerda):

$$Ai_n = Az_{n-1} - Az_n \pm 180^\circ$$

Aplicando, teremos:

$$Ai_2 = Az_1 - Az_2 \pm 180^\circ = 39^\circ - 92^\circ + 180^\circ = 127^\circ$$

$$Ai_3 = Az_2 - Az_3 \pm 180^\circ = 92^\circ - 136^\circ + 180^\circ = 136^\circ$$

$$Ai_4 = Az_3 - Az_4 \pm 180^\circ = 136^\circ - 228^\circ + 180^\circ = 88^\circ$$

3.º) Cálculo de ângulos internos, em função de deflexões (c. p. esquerda):

$$a) \quad Ai = 180^\circ + De \text{ (Defl. esquerda)}$$

$$b) \quad Ai = 180^\circ - Dd \text{ (Defl. direita)}$$

Aplicando-as:

$$Ai_5 = 180^\circ + De_5 = 180^\circ + 109^\circ = 289^\circ$$

$$Ai_6 = 180^\circ - Dd_6 = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$$

$$Ai_7 = 180^\circ - Dd_7 = 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$$

$$Ai_8 = 180^\circ - Dd_8 = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$$

4.º) Para o cálculo do 1.º ângulo interno (Ai_1), devemos, antes, achar os valores dos azimutes de Az_5 e Az_8 (fórmula 1). Teremos:

$$Az_5 = Az_4 - Ai_5 \pm 180^\circ = 228^\circ - 289^\circ + 180^\circ = 119^\circ$$

$$Az_6 = Az_5 - Ai_6 \pm 180^\circ = 119^\circ - 82^\circ + 180^\circ = 217^\circ$$

$$Az_7 = Az_6 - Ai_7 \pm 180^\circ = 217^\circ - 103^\circ + 180^\circ = 294^\circ$$

$$Az_8 = Az_7 - Ai_8 \pm 180^\circ = 294^\circ - 119^\circ + 180^\circ = 355^\circ$$

agora

$$Ai_1 = Az_8 - Az_1 \pm 180^\circ = 355^\circ - 39^\circ - 180^\circ = 136^\circ$$

5.º) Verificação dos cálculos, não das medidas:

$$\Sigma Ai = Ai_1 + Ai_2 + \dots + Ai_8 = 180^\circ (n - 2) = 1080^\circ$$

e

$$136^\circ + 127^\circ + \dots + 119^\circ = 1080$$

Cálculo dos rumos correspondentes (R).

$$1.^\circ \text{ Quadrante: } R = Az \text{ (NE)}$$

$$2.^\circ \text{ Quadrante: } R = 180^\circ - Az \text{ (SE)}$$

$$3.^\circ \text{ Quadrante: } R = Az - 180^\circ \text{ (SW)}$$

$$4.^\circ \text{ Quadrante: } R = 360^\circ - Az \text{ (NW)}$$

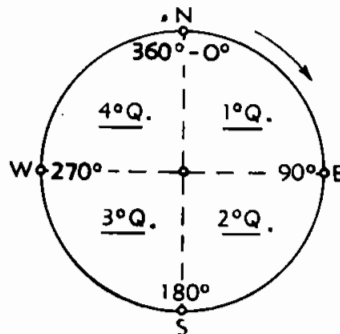


FIG. 393

Aplicação:

$Az_1 = 39^\circ$	$R_1 = 39^\circ$ NE
$Az_2 = 92^\circ$	$R_2 = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$ SE
$Az_3 = 136^\circ$	$R_3 = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$ SE
$Az_4 = 228^\circ$	$R_4 = 228^\circ - 180^\circ = 48^\circ$ SW
$Az_5 = 119^\circ$	$R_5 = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$ SE
$Az_6 = 217^\circ$	$R_6 = 217^\circ - 180^\circ = 37^\circ$ SW
$Az_7 = 294^\circ$	$R_7 = 360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$ NW
$Az_8 = 355^\circ$	$R_8 = 360^\circ - 355^\circ = 5^\circ$ NW

Para caminhamento perimétrico à direita:

- 1) $Az_n = Az_{n-1} + Ai_n \pm 180^\circ$
- 2) $Ai_n = Az_n - Az_{n-1} \pm 180^\circ$
- 3) $Ai = 180^\circ - De$
 $Ai = 180^\circ + Dd$

Nas duas primeiras fórmulas, soma-se 180° , se a soma ou diferença dos dois primeiros termos for negativa ou inferior a 180° e subtrai-se no caso contrário.

VI) *Problema de poligonação.* a) Ao traçar um alinhamento se encontrou um obstáculo. Querendo prosseguir com o alinhamento se constrói uma poligonal auxiliar $ABCDE\dots$ até livrar o obstáculo.

Com os elementos medidos da poligonal, achar o ponto G sobre o alinhamento e o ângulo que neste ponto se deve marcar para obter o prolongamento exato GH .

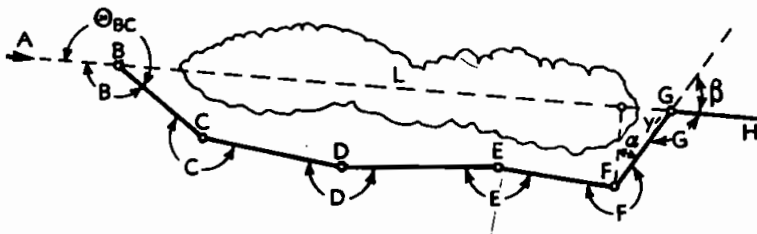


FIG. 394

Dados:

$\hat{B} = 142^\circ 26'$;	$\hat{C} = 211^\circ 04'$;	$\hat{D} = 194^\circ 32'$
$BC = 187,40\text{m}$;	$CD = 220,00\text{m}$;	$DE = 268,10\text{m}$
$\hat{E} = 167^\circ 29'$;	$\hat{F} = 237^\circ 58'$;	$\hat{G} = ?$
$EF = 186,60\text{m}$;	$FG = ?$;	$BG = ?$

Resolução trigonométrica. Eixo dos Y = AB.

α) *Orientação dos alinhamentos BC, CD, ..., α e β.*

$\theta_{AB} = \begin{cases} 0^{\circ}00'00'' \\ 360^{\circ}00'00'' \end{cases}$	$\theta_{CB} = 37^{\circ}34'$	$\theta_{DC} = 6^{\circ}30'$
$-\hat{B} = 142^{\circ}26'$	$360^{\circ} - \hat{C} = 148^{\circ}56'$	$360^{\circ} - \hat{D} = 165^{\circ}28'$
$\theta_{BC} = 217^{\circ}34'$	$\theta_{CD} = 186^{\circ}30'$	$\theta_{DE} = 171^{\circ}58'$
$\theta_{ED} = 351^{\circ}58'$	$\theta_{FE} = 4^{\circ}29'$	$\theta_{FG} = 126^{\circ}31'$
$360^{\circ} - \hat{E} = 192^{\circ}31'$	$360^{\circ} - \hat{F} = 122^{\circ}02'$	$- = 90^{\circ}00'$
$\theta_{EF} = 184^{\circ}29'$	$\theta_{FG} = 126^{\circ}31'$	$\alpha = 36^{\circ}31'$ $\beta = 53^{\circ}29'$

β) *Projeções dos alinhamentos, segundo eixos X e Y.*

BC	$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = BC \cdot \sin \theta_{BC} = 187,40 \cdot \sin 37^{\circ}34' = 187,40 \times 0,6097 = 114,26 \text{ (-)} \\ y_1 = BC \cdot \cos \theta_{BC} = 187,40 \cdot \cos 37^{\circ}34' = 187,40 \times 0,7926 = 148,53 \text{ (-)} \end{array} \right.$
CD	$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = CD \cdot \sin \theta_{CD} = 220,00 \cdot \sin 6^{\circ}30' = 220,00 \times 0,1132 = 24,90 \text{ (-)} \\ y_2 = CD \cdot \cos \theta_{CD} = 220,00 \cdot \cos 6^{\circ}30' = 220,00 \times 0,9936 = 218,59 \text{ (-)} \end{array} \right.$
DE	$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = DE \cdot \sin \theta_{DE} = 268,10 \cdot \sin 8^{\circ}02' = 268,10 \times 0,1397 = 37,45 \text{ (-)} \\ y_3 = DE \cdot \cos \theta_{DE} = 268,10 \cdot \cos 8^{\circ}02' = 268,10 \times 0,9902 = 265,47 \text{ (-)} \end{array} \right.$
EF	$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = EF \cdot \sin \theta_{EF} = 186,60 \cdot \sin 4^{\circ}29' = 186,60 \times 0,0782 = 14,59 \text{ (-)} \\ y_4 = EF \cdot \cos \theta_{EF} = 186,60 \cdot \cos 4^{\circ}29' = 186,60 \times 0,9969 = 186,02 \text{ (-)} \end{array} \right.$

γ) *Coordenadas dos vértices.*

VÉRTICES	PROJEÇÕES		COORDENADAS	
	x	y	X	Y
B.....	—	—	0,00	0,00
C.....	— 114,25	— 148,53	— 114,26	— 148,53
D.....	— 24,90	— 218,59	— 139,16	— 367,12
E.....	— 37,45	— 265,47	— 101,71	— 632,59
F.....	— 14,59	— 186,02	— 116,30	— 818,61

δ) Comprimento do último alinhamento (FG) e de y' .

$$X_F = FG \cdot \cos \alpha;$$

$$116,30 = FG \cdot \cos 36^{\circ}31'$$

$$FG = \frac{116,30}{0,8037} = 144,70 \text{ m}$$

$$y' = FG \cdot \operatorname{sen} \alpha = 144,70 \times 0,5951 = 86,11 \text{ m}$$

ε) Comprimento do alinhamento não percorrido (BG).

$$BG = Y_F + y' = 818,61 + 86,11 = 904,72 \text{ m}$$

O ponto G está a 904,72 m de B e o ângulo a ser marcado no limbo do teodolito, para prolongar o alinhamento BG, é: $\hat{G} = 126^{\circ}31'$ ou $53^{\circ}29'$.

VII) Problemas dos dois e três pontos.

a) Dois pontos inacessíveis P e Q, são vistos das extremidades de uma base AB de 374 metros de comprimento, de onde são medidos os seguintes ângulos:

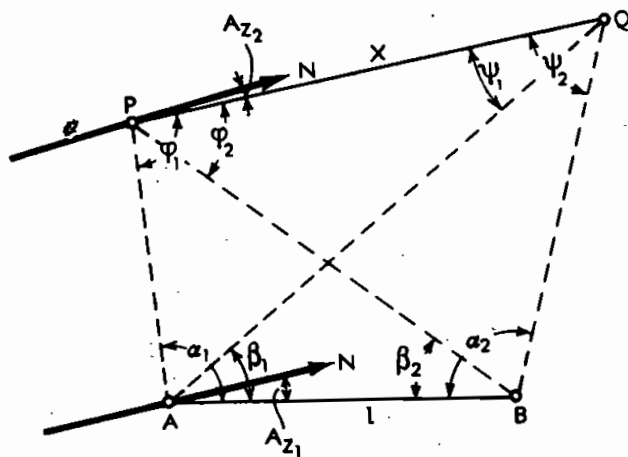


FIG. 395

No vértice A

$$\begin{cases} \alpha_1 = 97^{\circ}15' \\ \beta_1 = 41^{\circ}30' \end{cases}$$

No vértice B

$$\begin{cases} \alpha_2 = 102^{\circ}59' \\ \beta_2 = 37^{\circ}44' \end{cases}$$

$$l = 374 \text{ m}$$

$$Az_1 = 27^{\circ}$$

Calcular a distância e orientação do alinhamento PQ (solução logarítmica).

α) Cálculo dos comprimentos das divisórias PA, PB, QA e QB.

$$PA = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \beta_2)} = 323,60 \text{ m} \quad PB = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} (\alpha_1 + \beta_2)} = 524,53 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \log AB (l) &= 2,57287 \\ \log \operatorname{sen} \beta_2 &= 1,78674 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha_1 + \beta_2) &= 0,15039 \end{aligned}$$

$$\log PA = 2,51000$$

$$\begin{aligned} \log AB (l) &= 2,57287 \\ \log \operatorname{sen} \alpha_1 &= 1,99651 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha_1 + \beta_2) &= 0,15039 \end{aligned}$$

$$\log PB = 2,71977$$

$$QA = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} (\alpha_2 + \beta_2)} = 627,32 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \log AB (l) &= 2,57287 \\ \log \operatorname{sen} \alpha_2 &= 1,98875 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha_2 + \beta_1) &= 0,23587 \end{aligned}$$

$$\log QA = 2,79749$$

$$QB = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \beta_1}{\operatorname{sen} (\alpha_2 + \beta_1)} = 426,58 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \log AB (l) &= 2,57287 \\ \log \operatorname{sen} \beta_1 &= 1,82126 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha_2 + \beta_1) &= 0,23587 \end{aligned}$$

$$\log QB = 2,63000$$

β) Cálculo dos ângulos φ_1 e Ψ_1 , no triângulo PAQ.

$$\varphi_1 + \Psi_1 = 180^\circ - (\alpha_1 - \beta_1) = 124^\circ 15'; \quad \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Psi_1) = 62^\circ 07' 30''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 - \Psi_1) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Psi_1) \frac{AQ - AP}{AQ + AP}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 + \Psi_1) = 0,276615$$

$$\log (AQ - AP) = 2,48247^\circ$$

$$\operatorname{colog} (AQ + AP) = 3,02186^\circ$$

$$\varphi_1 + \Psi_1 = 124^\circ 15'$$

$$\varphi_1 - \Psi_1 = 62^\circ 15' 12''$$

$$\log \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} (\varphi_1 - \Psi_1) \right) = 1,780945$$

$$\frac{1}{2} (\varphi_1 - \Psi_1) = 31^\circ 07' 36''$$

$$\varphi_1 = 93^\circ 15' 06''$$

$$\Psi_1 = 30^\circ 59' 54''$$

γ) Cálculo dos ângulos φ_2 e Ψ_2 , no triângulo PBQ .

$$\varphi_2 + \Psi_2 = 180^\circ - (\alpha_2 - \beta_2) = 114^\circ 45'; \quad \frac{1}{2}(\varphi_2 + \Psi_2) = 57^\circ 22' 30''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_2 - \Psi_2) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_2 + \Psi_2) \frac{BP - BQ}{BP + BQ}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_2 + \Psi_2) = 0,19372^\circ$$

$$\log (BP - BQ) = 1,99100^\circ$$

$$\operatorname{colog} (BP + BQ) = 3,02176^\circ$$

$$\varphi_2 + \Psi_2 = 114^\circ 45'$$

$$\varphi_2 - \Psi_2 = 18^\circ 16' 40''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_2 - \Psi_2) = 1,20648^\circ$$

$$\frac{1}{2}(\varphi_2 - \Psi_2) = 9^\circ 08' 20''$$

$$\varphi_2 = 66^\circ 30' 50''$$

$$\Psi_2 = 48^\circ 14' 10''$$

δ) Cálculo da distância X entre os pontos inacessíveis P e Q .

$$PQ = \frac{AP \cdot \operatorname{sen} (\alpha_1 - \beta_1)}{\operatorname{sen} \varphi_1}$$

$$\begin{aligned} \log AP &= 2,51000 \\ \log \operatorname{sen} (\alpha_1 - \beta_1) &= 1,91729 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} \varphi_1 &= 0,28818 \end{aligned}$$

$$\log PQ = 2,71547$$

$$PQ = \frac{AQ \cdot \operatorname{sen} (\alpha_1 - \beta_1)}{\operatorname{sen} \varphi_1}$$

$$\begin{aligned} \log AQ &= 2,79749 \\ \log \operatorname{sen} (\alpha_1 - \beta_1) &= 1,91729 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} \varphi_1 &= 0,00070 \end{aligned}$$

$$\log PQ = 2,71548$$

$$PQ = \frac{BP \cdot \operatorname{sen} (\alpha_2 - \beta_2)}{\operatorname{sen} \varphi_2}$$

$$\begin{aligned} \log BP &= 2,71977 \\ \log \operatorname{sen} (\alpha_2 - \beta_2) &= 1,95815 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} \varphi_2 &= 0,03756 \end{aligned}$$

$$\log PQ = 2,71548$$

$$PQ = \frac{BQ \cdot \operatorname{sen} (\alpha_2 - \beta_2)}{\operatorname{sen} \Psi_2}$$

$$\begin{aligned} \log BQ &= 2,63000 \\ \log \operatorname{sen} (\alpha_2 - \beta_2) &= 1,95815 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} \Psi_2 &= 0,12732 \end{aligned}$$

$$\log PQ = 2,71547$$

$\log PQ$ (valor médio) = 2,715475 e PQ (X) = 519,37 m

ε) Cálculo da orientação de PQ pelos azimutes.

$$\begin{aligned} Az_{AB} &= Az_1 = 27^\circ \text{ (lido na bússola)} \\ Az_{AP} &= Az_1 + (360 - \alpha_1) = 27^\circ + 360^\circ - 97^\circ 15' = 289^\circ 45' \\ Az_{PA} &= 289^\circ 45' - 180^\circ = 109^\circ 45' \\ Az_{PQ} &= Az_2 = Az_{PA} - \varphi_1 = 109^\circ 45' - 93^\circ 15' = 16^\circ 30' \end{aligned}$$

b) Problema sobre coordenadas de um ponto, obtido por intersecção. Dos pontos A e B de um alinhamento visou-se um ponto C ao norte tendo-se obtido:

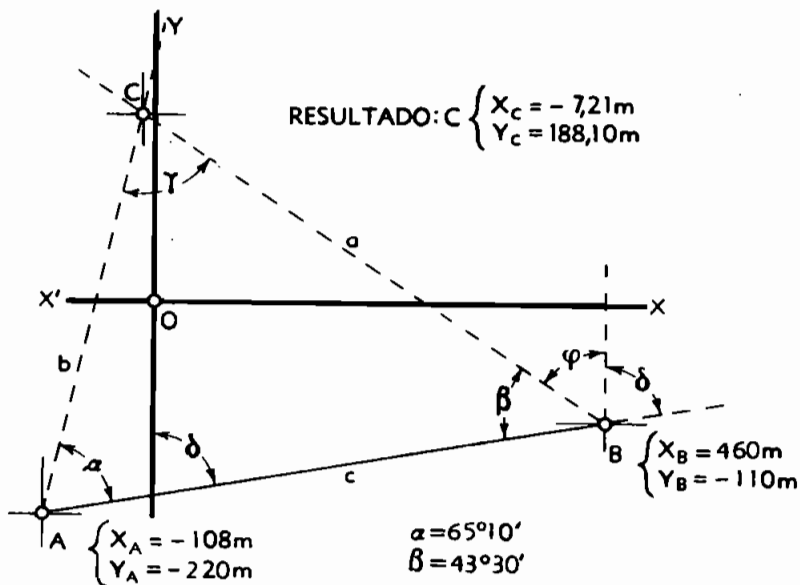


FIG. 396

$$\alpha = 65^\circ 10' \text{ e } \beta = 43^\circ 30'$$

são dadas as coordenadas de

A $\begin{cases} X_A = -108 \text{ m} \\ Y_A = -220 \text{ m} \end{cases}$

e

B $\begin{cases} X_B = 460 \text{ m} \\ Y_B = -110 \text{ m} \end{cases}$

Calcular as coordenadas retangulares de ponto C.

1) Cálculo do ângulo γ .

$$\gamma + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (65^\circ 10' + 43^\circ 30') = 71^\circ 20'$$

2) Cálculo da distância AB.

$$\begin{aligned} (c) \quad AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = \sqrt{[(460 - (-108))]^2 + [-110(-220)]^2} = \\ &= \sqrt{(460 + 108)^2 + 110^2} = \sqrt{568^2 + 110^2} = \sqrt{334,724} \\ AB &= 578,55 \text{ m} \end{aligned}$$

3) Cálculo do lado BC (a) e AC (b).

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}; \quad a = \frac{c \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} \quad \text{e} \quad b = \frac{c \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

Substituindo

$$a = \frac{578,55 \times \text{sen } 65^\circ 10'}{\text{sen } 71^\circ 20'} \quad \text{e} \quad b = \frac{578,55 \times \text{sen } 43^\circ 30'}{\text{sen } 71^\circ 20'}$$

Aplicando os logaritmos, obtemos:

$$\log a = \log 578,55 + \log \text{sen } 65^\circ 10' - \log \text{sen } 71^\circ 20'$$

$$\log b = \log 578,55 + \log \text{sen } 43^\circ 30' - \log \text{sen } 71^\circ 20'$$

$$\log 578,55 = 2,76234$$

$$\log \text{sen } 65^\circ 10' = 1,95786$$

$$\text{colog sen } 71^\circ 20' = 0,02347$$

$$\log a = 2,74367$$

$$a = 554,20 \text{ m}$$

$$\log 578,55 = 2,76234$$

$$\log \text{sen } 43^\circ 30' = 1,83781$$

$$\text{colog sen } 71^\circ 20' = 0,02347$$

$$\log b = 2,62362$$

$$b = 420,36 \text{ m}$$

4) Cálculo do rumo δ da direção AB.

Da (Fig. 396) tiramos que

$$\text{tg } \delta = \frac{x_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{460 + 108}{-110 + 220} = \frac{568}{110} = 5,16364$$

$$S = 79^\circ 02' 22",8 \cong 79^\circ 02' 23"$$

5) Cálculo dos ângulos de orientação, ε e φ , das retas AC e BC.

$$\varepsilon = \delta - \alpha = 79^\circ 02' 23" - 65^\circ 10' = 13^\circ 52' 23"$$

$$\varphi = 180^\circ - (\beta + \delta) = 180^\circ - (43^\circ 30' + 79^\circ 02' 23") = 57^\circ 27' 37"$$

6) Cálculo das projeções dos alinhamentos AC e BC.

$$\begin{array}{l} \text{sobre} \\ \text{eixo X} \end{array} \left| \begin{array}{l} x'_c = b \cdot \operatorname{sen} \varepsilon = 420,36 \cdot \operatorname{sen} 13^\circ 52' 23'' = 420,36 \times 0,23977 = \\ x''_c = a \cdot \operatorname{sen} \varphi = 554,20 \cdot \operatorname{sen} 57^\circ 27' 37'' = 554,20 \times 0,84302 = \end{array} \right.$$

$$x'_c = 100,79 \text{ m}$$

$$x''_c = -467,20 \text{ m}$$

$$\begin{array}{l} \text{sobre} \\ \text{eixo Y} \end{array} \left| \begin{array}{l} y'_c = b \cdot \cos \varepsilon = 420,36 \times \cos 13^\circ 52' 23'' = 420,36 \times 0,97083 = \\ y''_c = a \cdot \cos \varphi = 554,20 \times \cos 57^\circ 27' 37'' = 554,20 \times 0,53789 = \end{array} \right.$$

$$y'_c = 408,10 \text{ m}$$

$$y''_c = 298,10 \text{ m}$$

7) Cálculo das coordenadas do ponto C, em função de A.

$$X_c = X_A + x'_c = 108,00 + 100,79 = -7,21 \text{ m}$$

$$Y_c = Y_A + y'_c = -220,00 + 408,10 = 188,10 \text{ m}$$

8) Cálculo das coordenadas do ponto C, em função das do ponto B e projeções (verificação).

$$X_c = X_B + x''_c = 460,00 - 467,20 \text{ m} = -7,20 \text{ m}$$

$$Y_c = Y_B + y''_c = 110,00 + 298,10 = 188,10 \text{ m}$$

VII) Problemas dos dois e três pontos (cont.). Problema de Pothenot, dos 3 pontos ou da carta (navegação).

- 1) Resolução gráfica;
- 2) Resolução por segmentos capazes dos ângulos lidos;
- 3) Resolução mecânica-compasso de 3 pontas;
- 4) Resolução analítica.

Resolver o problema de intersecção inversa (Pothenot) – Ver teoria.

Dados: coordenadas dos 3 pontos.

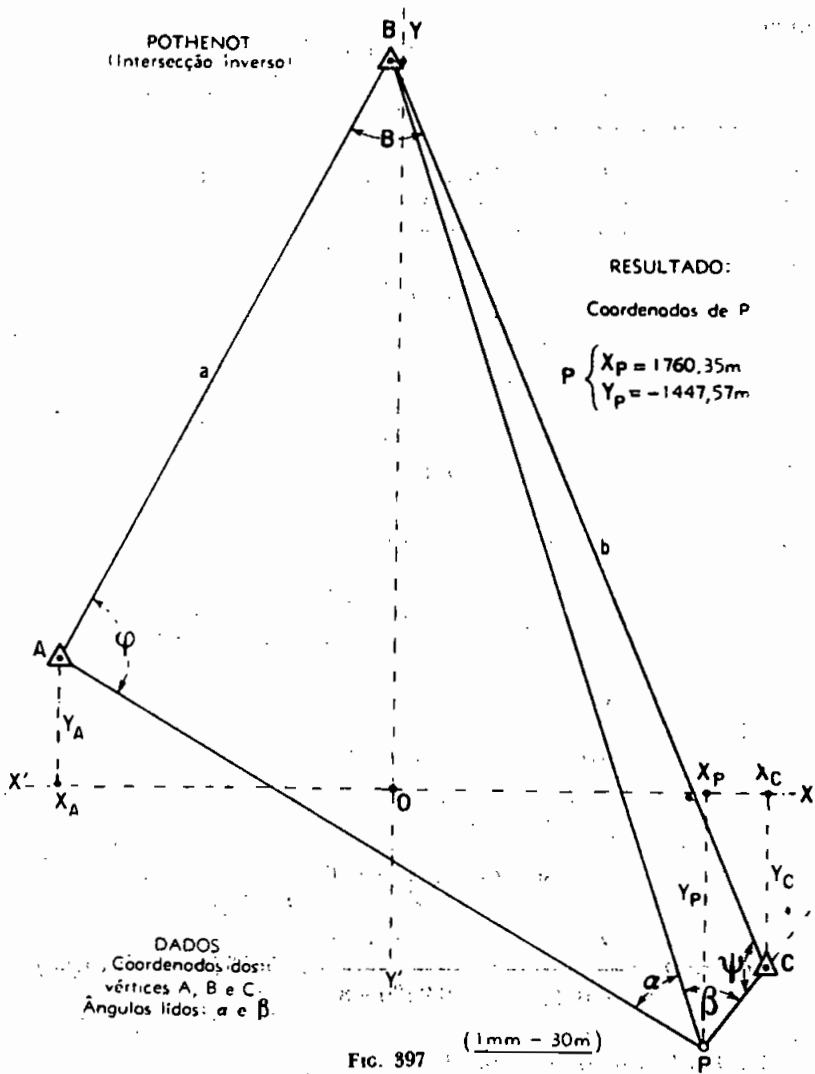
$$A \left| \begin{array}{l} X_A = -1875,80 \\ Y_A = +712,25 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} X_C = -2098,17 \\ Y_C = -970,92 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} X_B = -61,94 \\ Y_B = +4210,78 \end{array} \right.$$

Ângulos lidos:

$$\begin{array}{l} \alpha = 41^\circ 26' 20'' \\ \beta = 53^\circ 10' 50'' \end{array}$$



Calcular as coordenadas do ponto P de estação.

Resolução. Cálculo dos lados a e b e do ângulo \hat{B} .

a) Cálculo do ângulo \hat{B}

- Inclinação de BA (θ_{BA}):

$$\operatorname{tg} \theta_{BA} = \frac{X_A - X_B}{Y_A - Y_B} = \frac{-1875,80 - (-61,94)}{+712,25 - (4210,78)} = \frac{-1813,86}{-3498,53} = -0,5184634$$

donde

$$\theta_{BA} = 207^{\circ}24'18''$$

– Inclinação de BC (θ_{BC}):

$$\operatorname{tg} \theta_{BC} = \frac{XC - XB}{YC - YB} = \frac{+2098,17 - (-61,94)}{-970,92 - (4210,78)} = \frac{+2160,11}{-5181,70} = 0,4168728$$

donde

$$\theta_{BC} = 157^{\circ}22'12''$$

e assim

$$\theta_{BA} = 207^{\circ}24'18''$$

$$- \theta_{BC} = 157^{\circ}22'12''$$

$$\hat{\text{ângulo}} \hat{B} = 50^{\circ}02'06''$$

β) Cálculo dos lados AB (a) e BC (b).

$$AB = a = \frac{X_A - X_B}{\operatorname{sen} \theta_{BA}} = \frac{-1813,86}{-0,4602773} = 3940,78 \text{ m}$$

ou

$$AB = a = \frac{Y_A - Y_B}{\operatorname{cos} \theta_{BA}} = \frac{-3498,53}{-0,8877753} = 3940,78 \text{ (verificação)}$$

também

$$BC = b = \frac{X_C - X_B}{\operatorname{sen} \theta_{BC}} = \frac{+2160,11}{0,3847787} = 5613,92 \text{ m}$$

ou

$$BC = b = \frac{Y_C - Y_B}{\operatorname{cos} \theta_{BC}} = \frac{-5181,70}{0,9230088} = 5613,92 \text{ (verificação)}$$

γ) Cálculo do ângulo auxiliar λ .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 41^{\circ}26'20'' = 0,6618208$$

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} 53^{\circ}10'50'' = 0,8005280$$

$$\alpha = 41^{\circ}26'20''$$

$$\beta = 53^{\circ}10'50''$$

$$\hat{B} = 50^{\circ}02'06''$$

$$\Sigma = 144^{\circ}39'16''$$

Aplicando

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{3940,78}{5613,92} \times \frac{0,800528}{0,6618208} = 0,7019658 \times 1,209584 = 0,8490866$$

donde

$$\lambda = 40^{\circ}20'03''$$

δ) Cálculo dos ângulos complementares φ e Ψ .

$$\begin{aligned} \varphi + \Psi &= 360^{\circ} - (\alpha + \beta + \hat{B}) = 360^{\circ} - 144^{\circ}39'16'' = 215^{\circ}20'44'' \\ \frac{1}{2}(+) &= 107^{\circ}40'22'' \end{aligned} \quad (1)$$

Aplicando a fórmula

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \Psi) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \Psi) \operatorname{cotg}(45^{\circ} + \lambda) \\ \operatorname{tg} 107^{\circ}40'22'' &= 3,1386669 \\ (-) \operatorname{cotg} 85^{\circ}20'8'' &= 0,0816147 \\ (-) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \Psi) &= 0,2561614 \\ (-) \frac{1}{2}(\varphi - \Psi) &= 14^{\circ}22'05'' \end{aligned} \quad (2)$$

Da soma e da diferença de (1) e (2) obtemos:

$$\begin{array}{r} \Psi = 122^{\circ}02'27'' \\ \varphi = 93^{\circ}18'17'' \\ \alpha + \beta + \hat{B} = 144^{\circ}39'16'' \\ \hline \Sigma = 360^{\circ}00'00'' \end{array} \quad \begin{array}{r} \alpha + \varphi = 134^{\circ}44'37'' \\ \beta + \Psi = 175^{\circ}13'17'' \end{array}$$

ε) Cálculo dos comprimentos AP, BP e CP.

$$\begin{aligned} AP &= \frac{a \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{sen} \alpha} & CP &= \frac{b \cdot \operatorname{sen}(\beta + \Psi)}{\operatorname{sen} \beta} \\ BP &= \frac{a \cdot \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \Psi}{\operatorname{sen} \beta} \end{aligned}$$

Aplicando, teremos:

$$AP = \frac{a \cdot \text{sen } 45^{\circ}15'23''}{\text{sen } 41^{\circ}26'20''} = \frac{3940,78 \times 0,7102638}{0,6618208} = 4229,23 \text{ m}$$

$$BP = \frac{a \cdot \text{sen } 86^{\circ}41'43''}{\text{sen } 41^{\circ}26'20''} = \frac{3940,78 \times 0,9983370}{0,6618208} = 5944,54 \text{ m}$$

também

$$BP = \frac{b \cdot \text{sen } 57^{\circ}57'33''}{\text{sen } 53^{\circ}10'50''} = \frac{5613,92 \times 0,8476702}{0,8005280} = 5944,52 \text{ m}$$

$$CP = \frac{b \cdot \text{sen } 4^{\circ}46'43''}{\text{sen } 53^{\circ}10'50''} = \frac{5613,92 \times 0,0833058}{0,8005280} = 584,20 \text{ m}$$

φ) *Orientação dos alinhamentos AP, BP e CP.*

$$1) \theta_{AP} = (\theta_{BA} - 180^{\circ}) + \varphi = 207^{\circ}24'18'' - 180^{\circ} + 93^{\circ}18'17'' \\ \theta_{AP} = 120^{\circ}42'35''$$

$$2) \theta_{BP} = \theta_{BA} - [180^{\circ} - (\alpha + \varphi)] = 207^{\circ}24'18'' - (180^{\circ} - 134^{\circ}44'37'') \\ \theta_{BP} = 162^{\circ}08'55''$$

$$3) \theta_{CP} = \theta_{BC} + 180^{\circ} - \Psi = 157^{\circ}22'12'' + 180^{\circ} - 122^{\circ}02'27'' \\ \theta_{CP} = 215^{\circ}19'45''$$

Ψ) *Projeções dos alinhamentos AP (x, y) e BP (x', y').*

$$AP \quad \begin{cases} x = AP \cdot \text{sen } \theta_{AP} \\ y = AP \cdot \text{cos } \theta_{AP} \end{cases} \quad BP \quad \begin{cases} x' = BP \cdot \text{sen } \theta_{BP} \\ y' = BP \cdot \text{cos } \theta_{BP} \end{cases}$$

Aplicando, teremos:

$$AP \quad \begin{cases} x = 4229,23 \cdot \text{sen } 59^{\circ}17'25'' = 4229,23 \times 0,8597656 = \\ \quad \quad \quad x = 3636,15 \\ y = 4229,23 \cdot \text{cos } 59^{\circ}17'25'' = 4229,23 \times 0,5106884 = \\ \quad \quad \quad y = 2159,82 \text{ (-)} \end{cases}$$

$$BP \quad \begin{cases} x' = 5944,53 \cdot \text{sen } 17^{\circ}51'05'' = 5944,53 \times 0,3065491 = \\ \quad \quad \quad x' = 1822,29 \\ y' = 5944,53 \cdot \text{cos } 17^{\circ}51'05'' = 5944,53 \times 0,9518548 \\ \quad \quad \quad y' = 5658,33 \text{ (-)} \end{cases}$$

λ) Final: Coordenadas do ponto P.

1) Em função das coordenadas de A:

$$X_P = X_A + x = -1875,80 + 3636,15 = \boxed{1760,35}$$

$$Y_P = Y_A + y = +712,25 - 2159,82 = \boxed{-1447,57}$$

2) Em função das coordenadas de B:

$$X_P = X_B + x' = -61,94 + 1822,29 = \boxed{1760,35} \quad (\text{verificação})$$

$$Y_P = Y_B + y' = +4210,78 - 5658,33 = \boxed{-1447,55} \quad (\text{Idem})$$

VIII) *Problemas sobre triangulação.* Os extremos A e B de uma base trigonométrica são invisíveis entre si. Para ligar à mesma um ponto inacessível P, é feita instalação de um teodolito em A e B e num terceiro ponto Q, à direita da base, donde também P não é visível.

Calcular as coordenadas do ponto P, com os seguintes dados:

Coordenadas dos pontos.

$$A \quad \begin{cases} X_A = -2418,16 \\ Y_A = -1871,12 \end{cases}$$

$$B \quad \begin{cases} X_B = 1415,70 \\ Y_B = 328,78 \end{cases}$$

Ângulos lidos.

$$\alpha = 120^{\circ}56'38''$$

$$\beta = 87^{\circ}31'06''$$

$$\gamma = 77^{\circ}55'41''$$

Alinhamento auxiliar AQ.

$$l = 1652,10 \text{ m}$$

1) *Cálculo da orientação da base AB.*

$$\operatorname{tg} \theta_{AB} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

$$\theta_{AB} = 60^{\circ}09'09''$$

$$\begin{aligned} \log (X_B - X_A) &= 3,58363^5 \\ - \log (Y_B - Y_A) &= 3,34240^1 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \theta_{AB} = 0,24123^4$$

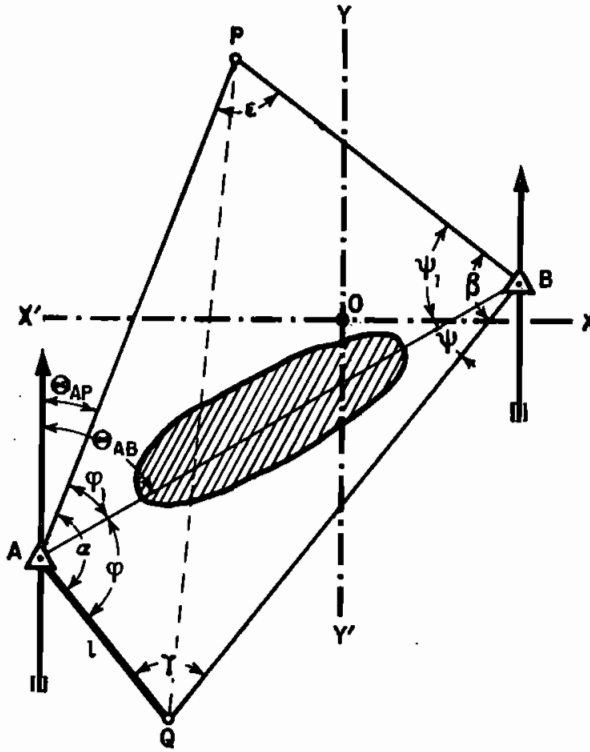


FIG. 398

2) Cálculo do comprimento AB.

$$AB = \frac{X_B - X_A}{\text{sen } \theta_{AB}} = \frac{Y_B - Y_A}{\text{cos } \theta_{AB}}$$

$\log (X_B - X_A) = 3,58363^5$ $-\log \text{sen } \theta_{AB} = 1,93820$ <hr style="width: 100%;"/> $\log AB = 3,64543^5$	$\log (Y_B - Y_A) = 3,34240^1$ $-\log \text{cos } \theta_{AB} = 1,69695^7$ <hr style="width: 100%;"/> $\log AB = 3,64544^4$
$AB = 4420,20 \text{ m}$	

3) Cálculo dos ângulos φ_1 e Ψ_1

$$\text{sen } \Psi = \text{sen } \gamma \frac{AQ}{AB}$$

$\Psi = 21^{\circ}26'17''$	$\log \text{sen } \gamma = \overline{1,99029}$ $\log AQ = \overline{3,21803^8}$ $\text{colog } AB = \overline{4,35456^9}$ <hr style="width: 100%;"/> $\log \text{sen } \Psi = \overline{1,56288^8}$
----------------------------	---

$$\begin{aligned}\varphi &= 180^\circ - (\gamma + \Psi) = 180^\circ - (77^\circ 55' 41'' + 21^\circ 26' 17'') = 80^\circ 38' 02'' \\ \varphi_1 &= \alpha - \varphi = 120^\circ 56' 38'' - 80^\circ 38' 02'' = 40^\circ 18' 36'' \\ \Psi_1 &= \beta - \Psi = 87^\circ 31' 06'' - 21^\circ 26' 17'' = 66^\circ 04' 49''\end{aligned}$$

Verificação: ângulo APB (ϵ).

$$\epsilon = 180^\circ - (\varphi_1 + \Psi_1) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 73^\circ 36' 35''$$

4) Cálculo dos comprimentos de AP e BP .

$AP = AB \frac{\text{sen } \Psi_1}{\text{sen } \epsilon}$	$\log AB = 3,645440$ $\log \text{sen } \Psi_1 = 1,96100$ $\text{colog sen } \epsilon = 0,018017$	$\log AB = 3,645440$ $\log \text{sen } \varphi_1 = 1,81085$ $\text{colog sen } \epsilon = 0,018017$
$BP = AB \frac{\text{sen } \varphi_1}{\text{sen } \epsilon}$	$\log AP = 3,624457$ $AP = 4.211,67 \text{ m}$	$\log BP = 3,474307$ $BP = 2980,62 \text{ m}$

5) Orientação das retas AP e BP .

$$\begin{aligned}\theta_{AP} &= \theta_{AB} - \varphi_1 = 60^\circ 09' 09'' - 40^\circ 18' 36'' = 19^\circ 50' 33'' \\ \theta_{BP} &= \theta_{BA} + \Psi_1 = 240^\circ 09' 09'' + 66^\circ 04' 49'' = 306^\circ 13' 58''\end{aligned}$$

6) Cálculo das projeções de AP e BP .

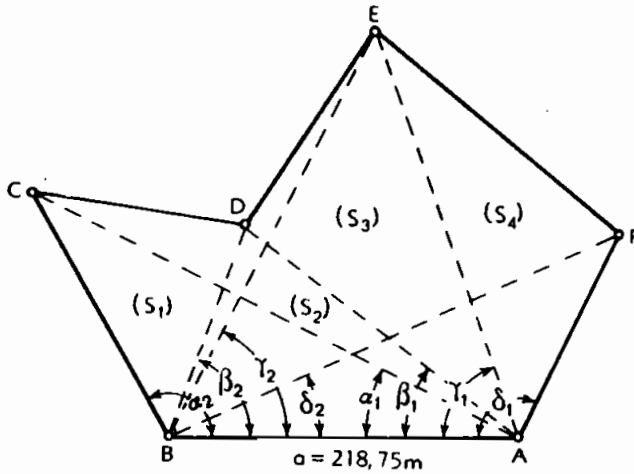
$x_1 = AP \cdot \text{sen } \theta_{AP}$	$\log AP = 3,624457$ $\log \text{sen } \theta_{AP} = 1,530758$ $\log x_1 = 3,155215$	$\log BP = 3,474307$ $\log \text{sen } \theta_{BP} = 1,906673$ $\log x_2 = 3,380980$
$y_1 = AP \cdot \text{cos } \theta_{AP}$	$\log AP = 3,624457$ $\log \text{cos } \theta_{AP} = 1,973318$ $\log y_1 = 3,597775$	$\log BP = 3,474307$ $\log \text{cos } \theta_{BP} = 1,771634$ $\log y_2 = 3,245941$
$x_2 = BP \text{ sen } \theta_{BP}$	$x_1 = 142960 \text{ m}$	$x_2 = 2,404,26 \text{ m}$
$y_2 = BP \text{ cos } \theta_{BP}$	$y_1 = 3,960,75 \text{ m}$	$y_2 = 1.761,72 \text{ m}$

7) Coordenadas do ponto P .

$X_A = -2418,16$	$X_B = 1415,70$
$x_1 = 1429,60$	$x_2 = -2404,26$
$XP = -988,56 \text{ m}$	$X_P = 988,56 \text{ m}$
$Y_A = -1871,12$	$Y_B = 328,78$
$y_1 = 3960,75$	$y_2 = 1761,72$
$Y_P = 2.089,63 \text{ m}$	$Y_P = 2.090,50 \text{ m}$

IX) Problemas sobre cálculo de áreas.

a) De dois vértices consecutivos A e B de uma poligonal, distantes entre si de 218,75 m, foram visados com um teodolito todos os outros vértices e as leituras dos ângulos foram as seguintes:



Vértice A

$$\alpha_1 = 26^{\circ}38'20''$$

$$\beta_1 = 38^{\circ}03'30''$$

$$\gamma_1 = 70^{\circ}50'40''$$

$$\delta_1 = 115^{\circ}05'00''$$

Vértice B

$$\alpha_2 = 118^{\circ}49'00''$$

$$\beta_2 = 69^{\circ}41'30''$$

$$\gamma_2 = 62^{\circ}47'50''$$

$$\delta_2 = 23^{\circ}43'30''$$

Base (a) = 218,75 m

FIG. 399

Calcular a área da poligonal.

1) Cálculo de ângulos auxiliares.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 145^{\circ}27'20''$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 107^{\circ}45'00''$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 133^{\circ}38'30''$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 138^{\circ}48'30''$$

$$\beta_1 - \alpha_1 = 11^{\circ}25'10''$$

$$\gamma_1 - \beta_1 = 32^{\circ}47'10''$$

$$\delta_1 - \gamma_1 = 44^{\circ}14'20''$$

2) Fórmulas que dão as áreas dos triângulos.

ABC (S_1), ACD (S_2), ADE (S_3) e AEF (S_4)

$$2S_1 = a^2 \frac{\text{sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (1)$$

$$2S_3 = a^2 \frac{\text{sen } \beta_2 \text{ sen } \gamma_2 \text{ sen } (\gamma_1 - \beta_1)}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2) \text{ sen } (\gamma_1 + \gamma_2)}$$

$$2S_2 = a^2 \frac{\text{sen } \alpha_2 \text{ sen } \beta_2 \text{ sen } (\beta_1 - \alpha_1)}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2) \text{ sen } (\beta_1 + \beta_2)}$$

$$2S_4 = a^2 \frac{\text{sen } \gamma_2 \text{ sen } \delta_2 \text{ sen } (\delta_1 - \gamma_1)}{\text{sen } (\gamma_1 + \gamma_2) \text{ sen } (\delta_1 + \delta_2)}$$

Nota (Fig. 400): *Detalhes sobre a fórmula (1).*

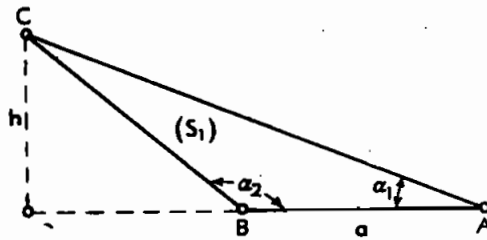


FIG. 400

$$\frac{a}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{BC}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{h}{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2}$$

$$h = BC \cdot \text{sen } \alpha_2 \quad \text{e} \quad BC = \frac{h}{\text{sen } \alpha_2}$$

$$a \cdot \text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2 = h \cdot \text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$h = \frac{a \cdot \text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Substituindo temos:

$$2S_1 = a \cdot h$$

e

$$2S_1 = a^2 \frac{\text{sen } \alpha_1 \cdot \text{sen } \alpha_2}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (316), \text{ etc.}$$

3) *Cálculo das áreas dos triângulos.*

ΔABC
$\log a^2 = 4,67990$
$\log \text{sen } \alpha_1 = \overline{1,65163^3}$
$\log \text{sen } \alpha_2 = \overline{1,94259}$
$\text{colog sen } (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,24638$
<hr/>
$\log 2S_1 = 4,52050^3$

$2S_1 = 33.151,77 \text{ m}^2$

ΔACD
$\log a^2 = 4,67990$
$\log \text{sen } \alpha_2 = \overline{1,94259}$
$\log \text{sen } \beta_2 = \overline{1,97212^5}$
$\log \text{sen } (\beta_1 - \alpha_1) = \overline{1,29664^3}$
$\text{colog sen } (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,24638$
$\text{colog sen } (\beta_1 + \beta_2) = 0,02118$
<hr/>
$\log 2S_2 = 4,15881^5$

$2S_2 = 14.415,10 \text{ m}^2$

$\triangle ADE$	
$\log a^2 =$	4,67990
$\log \text{sen } \beta_2 =$	1,97212
$\log \text{sen } \gamma_2 =$	1,94909 ⁸
$\log \text{sen } (\gamma_1 - \beta_1) =$	1,73360 ³
$\text{colog sen } (\beta_1 + \beta_2) =$	0,02118
$\text{colog sen } (\gamma_1 + \gamma_2) =$	0,14046

$\triangle AEF$	
$\log a^2 =$	4,67990
$\log \text{sen } \gamma^2 =$	1,94909 ⁸
$\log \text{sen } \delta_2 =$	1,60460
$\log \text{sen } (\delta_1 - \gamma_1) =$	1,84363
$\text{colog sen } (\gamma_1 + \gamma_2) =$	0,14046
$\text{colog sen } (\delta_1 + \delta_2) =$	0,18139

$\log 2S_3 = 4,49636^6$

$\log 2S_4 = 4,39907^1$

$2S_3 = 31.359,00 \text{ m}^2$

$2S_4 = 25.065,35 \text{ m}^2$

A dupla área total = $2S = 103.991,22 \text{ m}^2$

A área da poligonal $S = 51.995,61 \text{ m}^2$

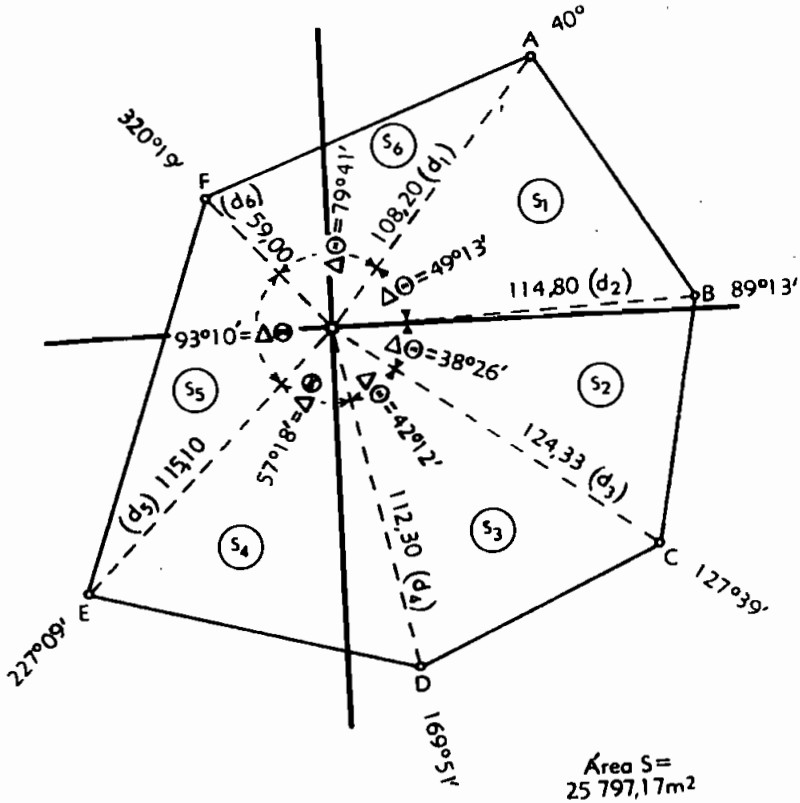


FIG. 401

Como verificação dos cálculos, se deverá repeti-los com relação aos novos triângulos, contados a partir do vértice B.

b) Uma poligonal fechada de forma regular é levantada por irradiação, a partir de um ponto interno, e as medidas são taqueométricas. Calcular a área abrangida pela poligonal (Fig. 401).

Dados de campo:

1) Orientação (θ)	2) Comprimentos (d)
$\theta_{OA} = 40^{\circ}00'$	$OA = 108,20$ m
$\theta_{OB} = 89^{\circ}13'$	$OB = 114,80$ m
$\theta_{OC} = 127^{\circ}39'$	$OC = 124,33$ m
$\theta_{OD} = 169^{\circ}51'$	$OD = 112,30$ m
$\theta_{OE} = 227^{\circ}09'$	$OE = 115,10$ m
$\theta_{OF} = 320^{\circ}19'$	$OF = 59,00$ m

Fórmula:

$$2S_n = d_n d_{n+1} \text{sen} (\theta_{n+1} - \theta_n)$$

Solução logarítmica

Vértices	$\Delta \theta$	log d	log dd	log sen $\Delta \theta$	log 2 S	2S
A		2,03423				
B	$49^{\circ}13'$	2,05994	4,09417	$\overline{1,87920}$	3,97337	9405,25 m ²
C	$38^{\circ}26'$	2,09457	4,15451	$\overline{1,79351}$	3,94802	8872,00 m ²
D	$42^{\circ}12'$	2,05038	4,14495	$\overline{1,82719}$	3,97214	9378,60 m ²
E	$57^{\circ}18'$	2,06108	4,11146	$\overline{1,92506}$	4,03652	10877,25 m ²
F	$93^{\circ}10'$	1,77085	3,83193	$\overline{1,99934}$	3,83127	6780,67 m ²
	$79^{\circ}41'$		3,80508	$\overline{1,99292}$	3,79800	6280,57 m ²
A		2,03423				
					2 S = 51594,34 m ²	
					S = 25797,17 m ²	

$$S = 25797,17 \text{ m}^2$$

Solução trigonométrica.

$2S_1 = 108,20 \times 114,80 \times 0,7572 = 9405,45 \text{ m}^2$	Dif.: + 0,20 m ²
$2S_2 = 114,80 \times 124,33 \times 0,6216 = 8872,15 \text{ m}^2$	Dif.: + 0,15 m ²
$2S_3 = 124,33 \times 112,30 \times 0,6717 = 9378,45 \text{ m}^2$	Dif.: - 0,15 m ²
$2S_4 = 112,30 \times 115,10 \times 0,8415 = 10877,00 \text{ m}^2$	Dif.: - 0,25 m ²
$2S_5 = 115,10 \times 59,00 \times 0,9985 = 6780,71 \text{ m}^2$	Dif.: + 0,04 m ²
$2S_6 = 59,00 \times 108,20 \times 0,9838 = 6280,38 \text{ m}^2$	Dif.: - 0,19 m ²
<hr/>	
2S	= 51594,14 m ²
	Dif.: - 0,20 m ²

$$S = 25797,07 \text{ m}^2$$

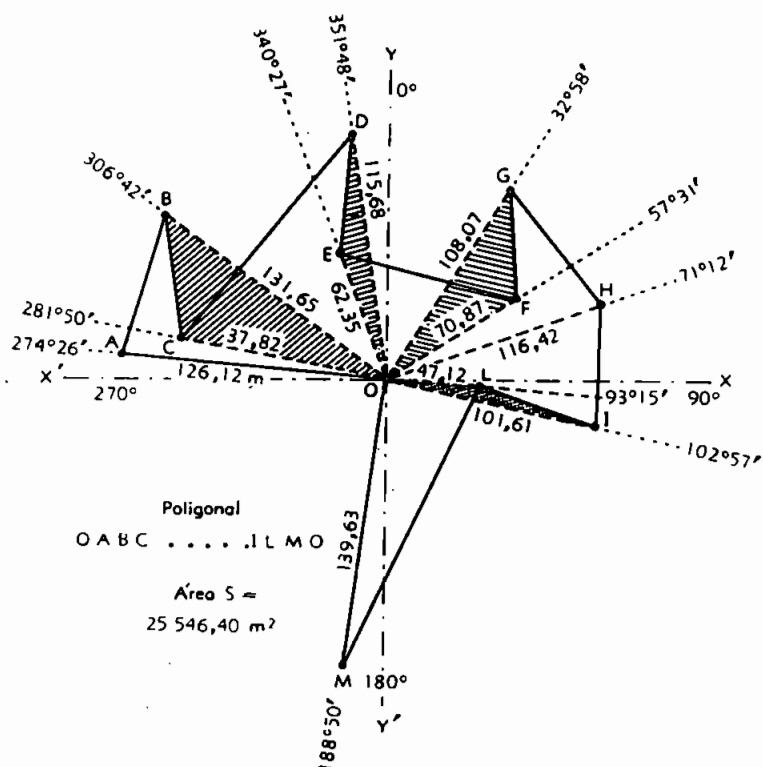


FIG. 402

c) Uma poligonal fechada, de forma muito irregular (Fig. 402) é levantada por irradiação a partir de um ponto *O* interior, com medidas tomadas com um taqueômetro; calcular a área abrangida pela poligonal.

Dados de campo.

1) Orientação (θ)

$$\theta_{OA} = 274^{\circ}26'$$

$$\theta_{OB} = 306^{\circ}42'$$

$$\theta_{OC} = 281^{\circ}50'$$

$$\theta_{OD} = 351^{\circ}48'$$

$$\theta_{OE} = 340^{\circ}27'$$

$$\theta_{OF} = 57^{\circ}31'$$

$$\theta_{OG} = 32^{\circ}58'$$

$$\theta_{OH} = 71^{\circ}12'$$

$$\theta_{OI} = 102^{\circ}57'$$

$$\theta_{OL} = 93^{\circ}15'$$

$$\theta_{OM} = 188^{\circ}56'$$

2) Comprimento (*d*)

$$OA = 126,12 \text{ m}$$

$$OB = 131,65 \text{ m}$$

$$OC = 97,82 \text{ m}$$

$$OD = 115,68 \text{ m}$$

$$OE = 62,35 \text{ m}$$

$$OF = 70,87 \text{ m}$$

$$OG = 108,07 \text{ m}$$

$$OH = 116,42 \text{ m}$$

$$OI = 101,61 \text{ m}$$

$$OL = 47,12 \text{ m}$$

$$OM = 139,63 \text{ m}$$

PLANTA

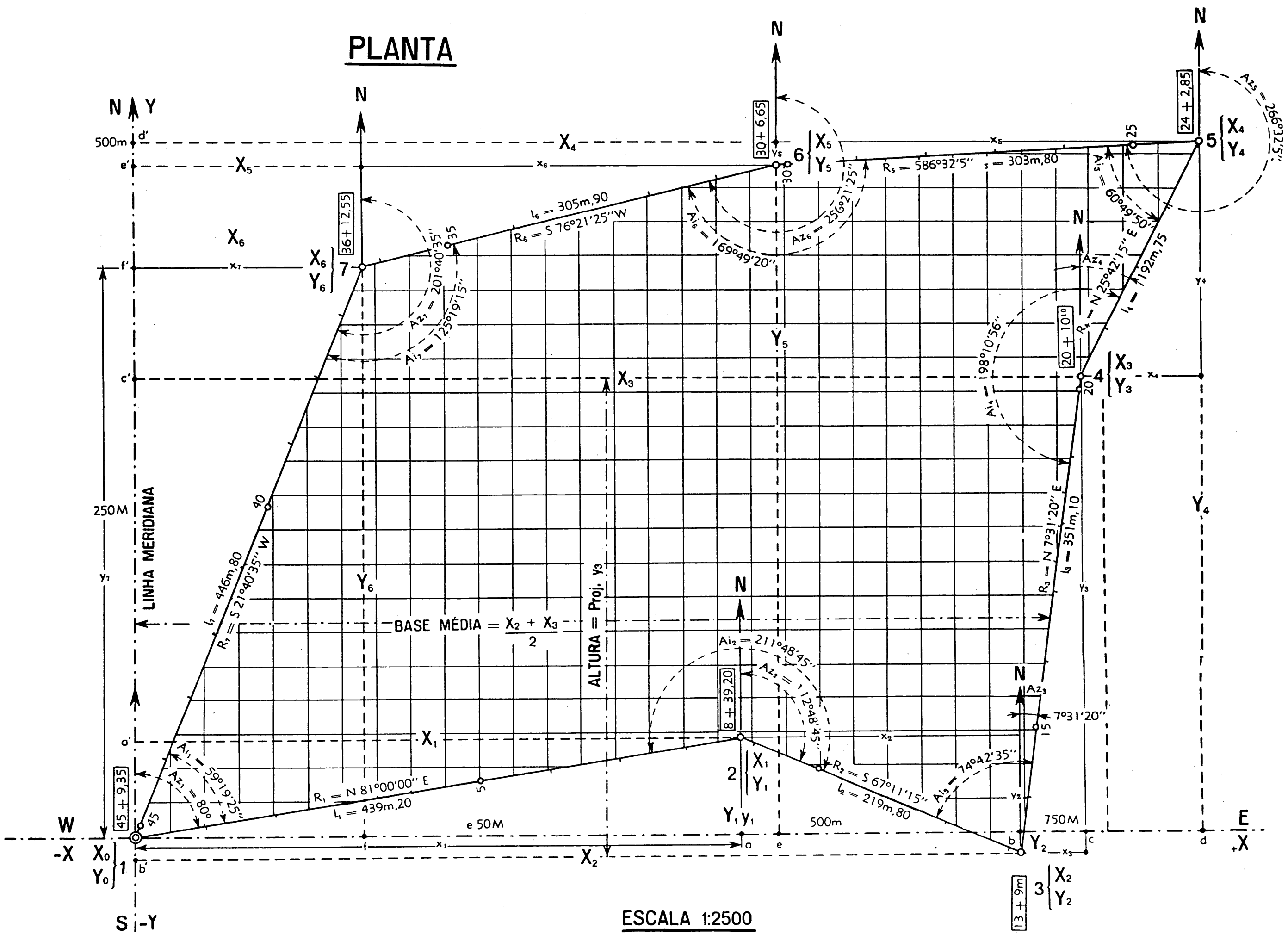


FIG. 405

Fórmula:

$$2S_n = d_n \cdot d_{n+1} \cdot \text{sen}(\theta_{n+1}\theta_n)$$

Vértices	$\Delta \theta$	log d	log dd	log sen $\Delta\theta$	log 2S	DUPLAS ÁREAS	
						A somar	A subtrair
A		2,10079					
B	32°16'	2,11042	4,22021	1,72743	3,94764	8864,20m ²	
C	— 24°52'	1,99043	4,10985	1,62377	3,73362		5415,25m ²
D	69°58'	2,06326	4,05369	1,07289	4,02658	10631,22m ²	
E	— 11°21'	1,79484	3,85810	1,29403	3,15213		1419,50m ²
F	77°04'	1,85046	3,64530	2,98884	3,63414	4306,70m ²	
G	— 24°33'	2,03371	3,88417	1,61856	3,50273		3182,20m ²
H	38°14'	2,06602	4,09973	1,79160	3,89133	7786,33m ²	
I	31°45'	2,00693	4,07205	1,72116	3,79411	6224,60m ²	
L	— 9°42'	1,67321	3,68014	1,22657	2,90671		806,70m ²
M	95°41'	2,14498	3,81819	1,99786	3,81606	6547,15m ²	
A	85°30'	2,14498	4,24577	1,99866	4,24443	17556,25m ²	
						61916,45m ²	10823,65m ²
						10823,65m ²	
						2S = 51,09280m ²	
						S = 25546,40m ²	

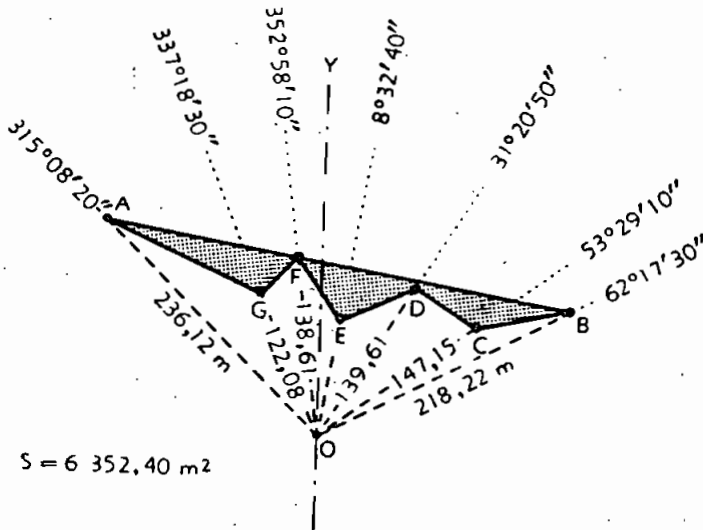


FIG. 403

d) De um ponto externo O (Fig. 403) são visados os vértices de um polígono e medidas as distâncias:

<i>Ângulos</i>	<i>Distâncias</i>
$\theta_{OA} = 315^{\circ}08'20'' \dots 236,12 \text{ m } (d_1)$	$\theta_{OE} = 8^{\circ}32'40'' \dots 92,16 \text{ m } (d_5)$
$\theta_{OB} = 62^{\circ}17'30'' \dots 218,22 \text{ m } (d_2)$	$\theta_{OF} = 352^{\circ}58'10'' \dots 138,61 \text{ m } (d_6)$
$\theta_{OC} = 53^{\circ}29'10'' \dots 147,15 \text{ m } (d_3)$	$\theta_{OG} = 337^{\circ}18'30'' \dots 122,08 \text{ m } (d_7)$
$\theta_{OD} = 31^{\circ}20'50'' \dots 139,61 \text{ m } (d_4)$	<i>Calcular a área do polígono.</i>

Fórmula.

$$2S_n = d_n \cdot d_{n+1} \cdot \text{sen}(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

Vértices	θ	log d	log dd	log sen θ	log 2S	DUPLAS ÁREAS	
						A somar	A subtrair
A	107°09'10"	2,37313	4,71202	1,98024	4,09226	49233,30	
B	— 8°48'20"	2,33889	4,50665	1,18492	3,69157		4915,55
C	— 22°08'20"	2,16776	4,31268	1,57617	3,88885		7742,00
D	— 22°48'10"	2,14492	4,10946	1,58834	3,69780		4986,55
E	— 15°34'30"	1,96454	4,10633	1,42894	3,53527		3429,20
F	— 15°39'40"	2,14179	4,22844	1,43128	3,65972		4567,90
G	— 22°10'10"	2,08665	4,45978	1,57674	4,03652		10877,30
A		2,37313				49233,30	36528,50
					2S =	12704,80	
					S =	6352,80m ²	
A área do polígono é 6.352,40 m ²							

X) Cálculo de áreas extrapolygonais

a) Uma das divisas de uma propriedade rural é limitada por um curso d'água (arroyo); nas proximidades foi implantada uma poligonal à qual a divisa foi ligada. Com os elementos medidos, calcular a área extrapolygonal.

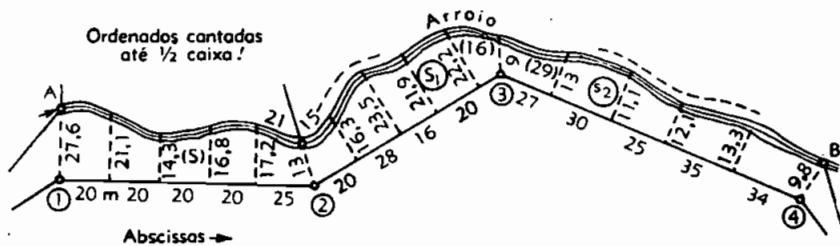


FIG. 404

Cálculo:

Área extrapoligonal $S = s(1 \cdot 2) + s_1(2 \cdot 3) + s_2(3 \cdot 4)$

1.º *Arroio-alinhamento 1-2 (s):*

$$\begin{aligned}
 s &= x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum y_i \right) + \frac{1}{4} (x + x') (y + y') = \\
 &= 20 \left[\frac{27,6 + 17,6}{2} + (21,1 + 14,3 + 16,8) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} (25 + 21) (17,2 + 13) = \\
 s &= 1839,30 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

2.º *Arroio-alinhamento 2-3 (s₁):* De modo idêntico (trapézios e quadriláteros)

$$s_1 = 1804,98$$

3.º *Arroio-alinhamento 3-4 (s₂):*

$$s_2 = 1796,70$$

Área total (extrapoligonal)

$$\begin{aligned}
 S &= s + s_1 + s_2 = 5440,98 \text{ m}^2 \\
 &= 0,5441 \text{ Ha}
 \end{aligned}$$

As áreas extrapoligonais, em geral, são a somar e a subtrair, conforme a margem escolhida para as medidas das abscissas e ordenadas. Quando não existe senão mato ralo, outros processos, como os taqueométricos, mais rápidos, podem ser empregados com vantagem.

XI) *Planilha e detalhes do cálculo analítico.*

a) *Achar as coordenadas dos vértices e a área de um polígono levantado na propriedade do Sr., a teodolito e trena, sita em Data*

1) Dados de campo e de escritório.

Vértices	Estacas (E)	ELEMENTOS ANGULARES					Distanças medidas	Funções angulares dos rumos		
		Ângulos internos		Aminutes calculados	Rumos (R)			(l)	Senos	Co-senos
		Lidos	Compensados		Q	Ângulos				
		A. i. l.	A. i. c.	(As)						
I	II	III	IV	V		VI	VII			
1	45+ 0,35	59°19'30"	59°19'25"	81°00'00"	NE	81°00'00"	439,20	0,98769	0,15643	
2	8+39,20	211°48'00"	211°48'55"	112°48'45"	SE	67°11'15"	219,80	0,92178	0,38772	
3	13+ 0,00	74°42'45"	74°42'35"	7°31'20"	NE	7°31'20"	351,10	0,13091	0,99140	
4	20+10,10	198°11'15"	198°10'55"	25°42'15"	NE	25°42'15"	192,75	0,43373	0,90105	
5	24+ 2,35	60°50'00"	60°49'50"	266°32'05"	SW	86°52'05"	303,80	0,99917	0,06046	
6	30+ 6,95	169°49'15"	169°49'20"	256°21'25"	SW	76°21'25"	305,90	0,97178	0,23587	
7	36+12,55	125°19'15"	125°19'15"	201°40'35"	SW	21°40'35"	446,80	0,38937	0,92929	
	Somas	900°01'15"	900°00'00"				2 259,35			
	Verificações	Erro angular total: $\epsilon t = + 1'15''$ Erro por ângulo: $\epsilon = \epsilon t/n = +75''/7 = + 10''7$					(el)			
	Distribuição (prática)	$\left\{ \begin{array}{l} > 400m - 2x 5''; > 200m - 1x 15'' \\ > 300m - 3x 10''; < 200m - 1x 20'' \end{array} \right\} 75''$					Erro linear: Total: $E = \sqrt{\epsilon x^2 + \epsilon y^2} = 0,640$ Por KM: $e = E/l = 0,283$			

2) Projeções naturais e compensadas.

PROJEÇÕES NATURAIS				Correções		PROJEÇÕES COMPENSADAS	
Sobre o eixo X		Sobre o eixo Y				Eixo X(x)	Eixo Y(y)
$(x' = l \cdot \text{sen } R)$		$(y' = l \cdot \text{cos } R)$					
E(+)	W(-)	N(+)	S(-)	Cx	Cy	E(+); W(-)	N(+); S(-)
X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
m	m	m	m	mm	mm	m	m
433,793		68,704		+ 81	- 94	+ 433,712	+ 68,798
202,608			85,221	+ 42	- 47	+ 202,566	- 85,174
46,963		348,081		+ 65	- 78	+ 46,898	+ 348,157
83,601		173,877		+ 36	- 40	+ 83,565	+ 173,717
	303,244		18,365	+ 56	- 65	- 303,300	- 18,300
	297,268		72,153	+ 57	- 66	- 297,325	- 72,087
	165,034		416,207	+ 82	- 96	- 165,116	- 416,111
765,965	765,546	590,462	590,946	+ 419	- 484	± 765,741	± 590,672
765,546			590,462	(Σx)	(Σy)	Σ(x)=0	Σ(y)=0
+ 0,419 (Σx)		(Σy) - 0,484					
$e' = x/\Sigma l = 0,00019; e'' = y/\Sigma l = 0,00021m$							

3.º) Coordenadas e área.

COORDENADAS		SOMA DAS:		DUPLAS ÁREAS	
		Abscissas	Ordenadas		
Abscissas	Ordenadas	ΣX	ΣY	$\Sigma X \cdot y$	$\Sigma Y \cdot x$
X	Y	$(X_n + X_{n+1})$	$(Y_n + Y_{n+1})$	A somar (+)	A subtrair (-)
XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII
n_1	m	m	m	m ²	m ²
+ 000,00	000,00	+ 433,712	+ 68,798	+ 29 838,518 176	+ 29 838,518 176
+ 433,712	+ 68,798	+ 1 069,990	+ 54,422	- 91 135,328 260	+ 10 618,914 852
+ 636,278	- 16,376	+ 1 318,454	+ 315,405	+ 459 028,989 278	+ 14 476,458 690
+ 682,176	+ 331,781	+ 1 447,917	+ 837,279	+ 251 827,797 459	+ 69 967,319 635
+ 765,741	+ 605,498	+ 1 228,182	+ 992,680	- 22 475,730 600	- 301 084,636 800
+ 462,441	+ 487,198	+ 627,557	+ 902,309	- 45 238,701 459	- 268 379,023 425
+ 167,116	+ 415,111	+ 165,116	+ 415,111	- 68 541,467 876	- 68 541,467 876
+ 3 145,464	+ 1 792,010	+ 6 200,928	+ 3 584,020	+ 740 395,304 943	+ 124 901,111 353
$\times 2$	$\times 2$			- 227 391,228 195	- 037 905,188 101
+ 6 290,928	+ 3 584,020			+ 513 004,076 748	- 513 004,076 748

$$\text{Área} = \frac{513\ 004,076748}{2} = 256\ 502,04$$


Levantamento de campo n.º.....
 Operador:..... CREA.....
 Calculador:.....

Repartição, Firma
 Engenheiro ou Agrimensor
 Bode.

b) Detalhes práticos para a organização da planilha acima, de um levantamento topográfico.

Dados de campo e de escritório. Itens de I a IX.

- I { Vértices ou estações do instrumento.
- II { O *estaqueamento* dos alinhamentos, sempre que houver levantamento altimétrico, será de 20, 25 ou de 50 em 50 m; em terrenos íngremes, usam-se estacas intermediárias; no exemplo, $d = 50$ m.
- III { 1) A soma dos ângulos internos é verificada por $\Sigma A_i = 180^\circ (n - 2)$, sendo n o número de ângulos;
 2) O erro angular total tolerável é dado por:
- c $\epsilon_t = \epsilon \sqrt{n}$, sendo ϵ o erro tolerável na medida de cada ângulo \cong à menor aproximação do teodolito;
- IV { 3) A distribuição do erro é feita por aproximação ou igualmente em cada ângulo lido; no exemplo, levamos em conta a extensão dos lados e compensamos de 5 em 5 segundos.

- V { O primeiro Az ou *fundamental* é determinado astronômicamente. Os outros são calculados por:
 $Az_n = Az_{n-1} \pm Ai_n \pm 180^\circ$.
 O termo $+ Ai_n$ corresponde a caminhamento à *direita*;
 O termo $- Ai_n$ corresponde a caminhamento à *esquerda*;
 Ao valor $Az_{n-1} \pm Ai_n < 180^\circ$, soma-se 180° ;
 Ao valor $Az_{n-1} \pm Ai_n > 180^\circ$, subtrai-se 180° .
- VI { Os azimutes são contados de 0° a 360° , no sentido direto, a partir do *norte*.
 Para achar os *rumos*, empregam-se as relações:
 1.º quadrante — o ângulo do $R = Az$ (NE)
 2.º quadrante — o ângulo do $R = 180^\circ - Az$ (SE)
 3.º quadrante — o ângulo do $R = Az - 180^\circ$ (SW)
 4.º quadrante — o ângulo do $R = 360^\circ - Az$ (NW)
- 
- VII { As *distâncias* ou *comprimentos* dos alinhamentos são medidos *horizontalmente*, de vértice a vértice, e com a aproximação dos meio-decímetros; podem ser também medidos *junto* ao terreno e reduzidos ao horizonte.
- VIII e IX { *Senos* e *Co-senos* naturais, tirados de uma tábua de linhas trigonométricas, com 5 casas decimais.
 Podem também ser empregados os *logaritmos* comuns ou usadas as *Tábuas de Boileau*, que dão diretamente os valores dos números um a dez, multiplicados pelos senos e co-senos, de minuto em minuto, e usadas para evitar as multiplicações. Não são muito empregadas, pois as *somas* são muitas.
- X e XI { *Projeções naturais. Itens de X a XI.*
 1) As *projeções diretas* ou *naturais* dos alinhamentos sobre os eixos dos X e dos Y são obtidas pelo produto dos senos e co-senos dos ângulos dos rumos pela extensão dos lados, ou sejam: $x' = l \cdot \text{sen } R$ e $y' = l \cdot \text{cos } R$;
 2) Convencionalmente, as *abscissas* (Projeções) à direita do eixo dos Y, isto é, quando os alinhamentos se orientam para leste (E) são positivas, e negativas para oeste (W); as *ordenadas* (Projeções) são positivas acima do eixo X ou quando os alinhamentos se orientam para o norte (N), e negativas para o sul (S);
 3) Se as medidas fôsses rigorosamente exatas, a *soma das projeções E*, seria igual à das *projeções W* e $\Sigma (\pm x) = 0$; e, também, $\Sigma (\pm y) = 0$.

Mas, na prática, $\Sigma x = \pm \Delta x$ e $\Sigma y = \pm \Delta y$ e o erro de fechamento do perímetro é dado por: $E = \sqrt{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}$; em levantamentos topográficos regulares, o erro tolerável (e) varia de 0,20 m a 1 m por km, conforme o terreno; o erro total tolerável é: $\Sigma = e \sqrt{\Sigma l}$.

Correções e Projeções compensadas. Itens de XIV a XVII.

XIV
a
XVII

A distribuição do erro obedece à seguinte regra: $Cx/l = \Sigma x/\Sigma l$ ou $Cx = l \cdot \Sigma x/\Sigma l$ e, também, $Cy = l \cdot \Sigma y/\Sigma l$, em que Cx e Cy são as correções a considerar nas projeções x' e y' ; l é o comprimento do lado, Σx e Σy as somas algébricas das projeções e Σl o perímetro.

As *projeções compensadas* são obtidas, subtraindo sempre das projeções naturais as respectivas correções, levando porém em conta na subtração aos sinais das projeções e das correções; assim

$$\begin{aligned}(\pm x) &= (\pm x') - (\pm Cx) \quad \text{e} \\ (\pm y) &= (\pm y') - (\pm Cy).\end{aligned}$$

Há, também, outros critérios para obter as projeções compensadas (impropriamente chamadas de projeções corrigidas), tais como o de aumentar proporcionalmente às *próprias projeções* (x', y') num sentido e diminuir no outro, ou vice-versa; levar em conta as dificuldades das medidas, etc.

Coordenadas. Itens XVIII e XIX.

XVIII
e
XIX

As *Abscissas* e as *Ordenadas* de cada vértice são obtidas pela soma algébrica sucessiva das projeções dos alinhamentos. Assim, as coordenadas do *primeiro vértice* coincidem, salvo caso de ligação com outro levantamento, com a origem dos eixos das coordenadas, isto é, $X_0 = 0$ e $Y_0 = 0$. As coordenadas do *segundo vértice* são iguais às projeções do primeiro alinhamento, isto é, $X_1 = x_1$ e $Y_1 = y_1$. As coordenadas do *terceiro, quarto, etc.* vértice são iguais às do vértice anterior, somadas algebricamente às projeções do segundo, terceiro, etc., lado. Assim $X_n = X_{n-1} + x_n$ e $Y_n = Y_{n-1} + y_n$.

As coordenadas do *último vértice* devem ser iguais e de sinais contrários às projeções do último lado, o que verifica a exatidão dos cálculos e das coordenadas iniciais ($X_0 = Y_0 = 0$).

ΣX e ΣY . Itens XX e XXI.

XX
e
XXI

A área circunscrita por uma poligonal pode ser decomposta em triângulos e trapézios, referidos ou ao eixo dos Y , ou ao dos X . A área dos mesmos é avaliada pelo produto das bases médias pelas alturas. Assim, no trapézio $b \cdot 3 \cdot 4 \cdot C'$ (*Planta*), obtém-se: a semi-soma das abscissas dos vértices 2 e 3 multiplicada pela projeção do alinhamento correspondente sobre o eixo Y dá o valor da área correspondente, isto é, $1/2 (X_2 + X_3) y_3$.

Nas colunas XX e XXI, as primeiras somas são iguais às segundas coordenadas (pois $X_0 = O$ e $Y_0 = O$); as segundas são iguais às somas das segundas e terceiras coordenadas e assim, a seguir.

As últimas somas são iguais às últimas coordenadas.

Duplas áreas. Itens XXII e XXIII.

XXII
e
XXIII

As fórmulas gerais das áreas a aplicar são:

$$S = 1/2 [(X_0 + X_1) y_1 + (X_1 + X_2) y_2 + (X_2 + X_3) y_3 + \dots + (X_n + X_0) y_n]$$

e

$$S = 1/2 [(Y_0 + Y_1) x_1 + (Y_1 + Y_2) x_2 + (Y_2 + Y_3) x_3 + \dots + (Y_n + Y_0) x_n]$$

Os valores entre parênteses são os dados pelas colunas XX e XXI e os multiplicadores os das colunas XVII e XVI.

Todas as multiplicações são algébricas e as somas das colunas XXII e XXIII devem ser iguais em valor absoluto porém de sinais contrários (*Planta-sinais das projeções*), o que constitui verificação dos cálculos.

A metade de uma das somas dá o valor da área do polígono e pode ser aproximada até os dm^2 .

Com verificação das somas algébricas das colunas XX e XXI, isto é, de ΣX e ΣY , deve-se encontrar valores duplos dos das coordenadas X e Y (XVIII e XIX).

As áreas calculadas são as limitadas pela poligonal, devendo-se ainda, na prática, considerar as áreas *extra-poligonais*, avaliadas por outros processos — aritmético, geométrico, gráfico ou mecânico. Nas áreas limitadas por contornos curvilíneos, empregam-se as fórmulas de *Simpson*, *Bezout* ou *Poncelet*.

XII) *Divisão de terras. Método analítico.*

a) *Exemplo completo sobre divisão. Diversas soluções.* Divisão de um terreno em forma poligonal (*ABCDE*) e área *A* em partes proporcionais *m*, *n* e *p*, ou 2, 3 e 5, passando as divisórias pelo vértice comum *C* (Fig. 406).

A poligonal é levantada internamente e os lados são traçados paralelamente aos alinhamentos, de modo que os dados abaixo são os do próprio terreno, evitando-se, assim, o cálculo das áreas extrapoligonais.

Dados:

VÉRTICES	ÂNGULOS INTERNOS		Azimutes (cale)	Rumos (cale)	Comprimentos dos alinhamentos
	Lidos	Compensados			
A.....	137°08'	137°07'	210°(lido)	S 30°00'W	306,10
B.....	64°24'	64°24'	85°36'	N 85°36'E	626,55
C.....	142°07'	142°06'	56°30'	N 56°30'E	337,20
D.....	80°03'	80°02'	316°32'	N 43°28'W	382,60
E.....	116°21'	116°21'	252°53'	S 72°53'W	512,45
	<u>540°03'</u>	<u>540°00'</u>			<u>2 164,90m</u>

Na distribuição dos quinhões são atendidas as pretensões dos condôminos, mesmo porque nas glebas que já ocupam existem casas e outras benfeitorias, faltando somente legalizar as linhas divisórias por partilha judicial.

a) *Solução gráfica.* Com o auxílio de uma *tábua de cordas* (Tabela V) e de uma escala de redução, desenha-se o polígono *ABCDE* pelos rumos e comprimentos dos alinhamentos; um pequeno erro de fechamento é distribuído graficamente.

Transforma-se a seguir, pelo processo gráfico de redução, a figura poligonal em um triângulo B_1CD_1 (Fig. 406) de base B_1D_1 e altura CC_1 .

Pelo ponto B_1 , traça-se uma reta B_1F , de inclinação qualquer e nela marcam-se os segmentos $B_1 - 1$, $1 - 2$ e $2 - 3$, proporcionais às áreas componentes; unindo-se 3 a D_1 e traçando-se por 2 e 1 linhas paralelas, determinamos os pontos de divisão *a* e *b*.

Pelos pontos *a* e *b* traçamos paralelas, respectivamente, a B_1B e D_1D e os pontos de encontro dessas paralelas com os lados *AB* e *DE*, isto é, *P* e *Q*, serão os pontos de divisão procurados.

Cálculo de áreas, graficamente, de uma planta desenhada na escala 1:2 000.

As áreas dos triângulos em que se decompõe o polígono são as seguintes:

$$\text{Do triângulo } ABC \dots\dots\dots 306,10 \times 565,0 = 172\,946,50 \text{ m}^2$$

$$\text{Do triângulo } ACE \dots\dots\dots 512,45 \times 438,4 = 224\,658,08 \text{ m}^2$$

$$\text{Do triângulo } CDE \dots\dots\dots 382,60 \times 332,0 = 127\,023,20 \text{ m}^2$$

$$\text{Area dupla total} \dots\dots\dots = 524\,627,78 \text{ m}^2$$

$$\text{Area poligonal} = 26\text{Ha}2313, \text{m}^289.$$

Áreas dos quinhões, proporcionalmente a m , n e p , ou 3, 5 e 2 partes:

$$A_1 = \frac{262313,89}{10} \times 3 = 78694,17 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{262313,89}{10} \times 5 = 131156,94 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{262313,89}{10} \times 2 = 52462,78 \text{ m}^2$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 262313,89 \text{ m}^2$$

Áreas dos quinhões, de acordo com a divisão gráfica:

$$A_1 = \frac{278,30 \times 565,0}{2} \dots\dots\dots = 78619,75 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{l} \frac{27,80 \times 565,00}{2} = 7853,50 \\ \frac{512,45 \times 438,40}{2} = 112329,04 \\ \frac{66,60 \times 332,00}{2} = 11055,60 \end{array} \right] = 131238,14 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{316,0 \times 332,0}{2} \dots\dots\dots = 52456,00 \text{ m}^2$$

$$\text{Area total} \dots\dots\dots = 262313,89 \text{ m}^2$$

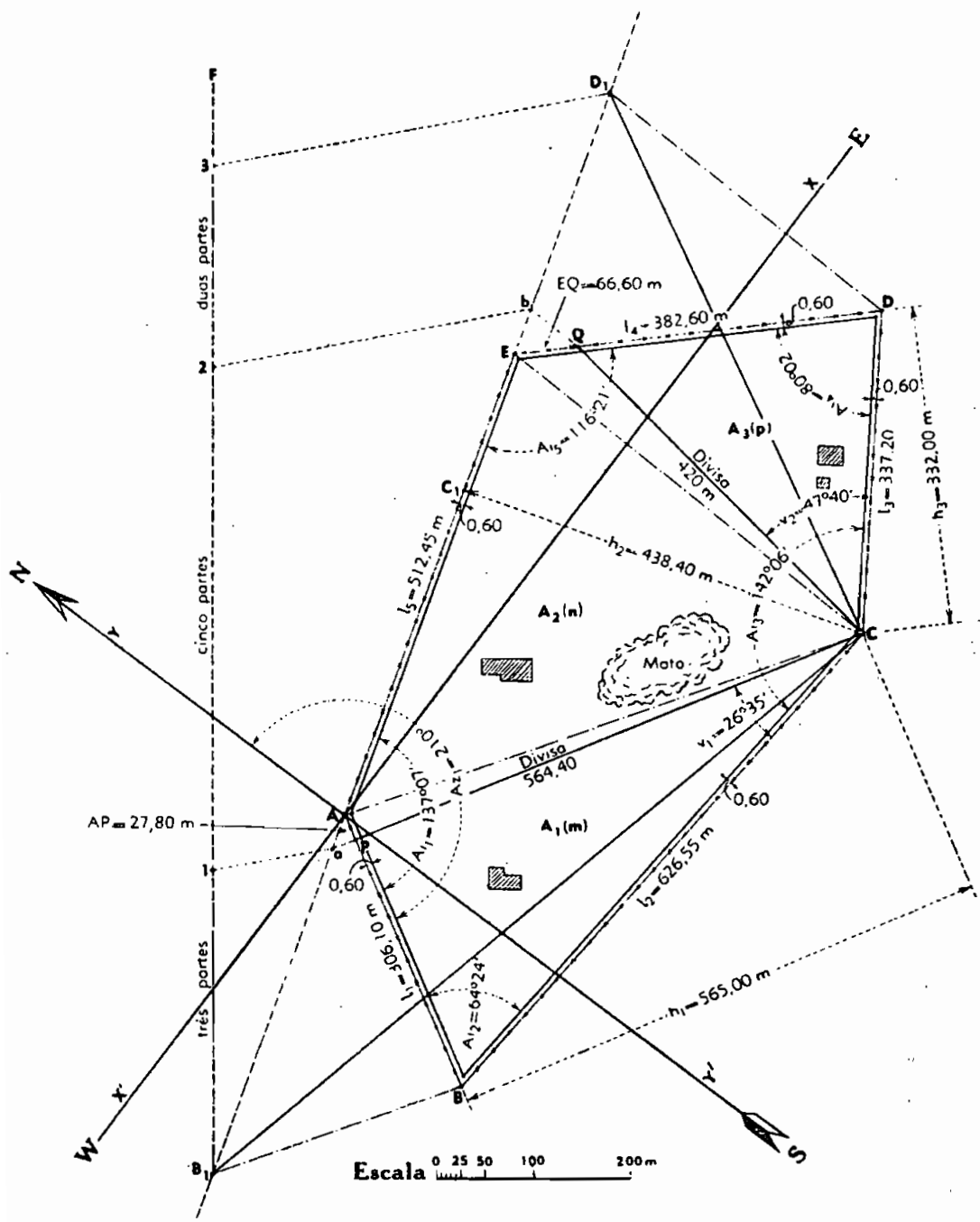


FIG. 406

Diferenças:

Quinhão A_1	78694,17 — 78619,74 = + 74,42 m ²
Quinhão A_2	131156,94 — 131238,14 = — 81,20 m ²
Quinhão A_3	52462,78 — 52456,00 = + 6,78 m ²

Essas diferenças são inevitáveis nos processos gráficos e justificadas dentro da tolerância.

b) *Solução trigonométrica.* Para o cálculo da área do polígono $ABCDE$, devemos, antes, calcular os ângulos α , β , γ e δ (Fig. 407), bem como o comprimento das diagonais AC e CE .

1) *Cálculo de AC e CE .*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$AC^2 = 306,10^2 + 626,55^2 - 2 \times 306,10 \times 626,55 \times 0,43219$$

$$AC = 566,11 \text{ m}$$

$$EC^2 = CD^2 + ED^2 - 2 \cdot CD \cdot ED \cdot \cos D$$

$$EC^2 = 337,20^2 + 382,60^2 - 2 \times 337,20 \times 382,60 \times 0,17307$$

$$EC = 464,14 \text{ m}$$

2) *Cálculo dos ângulos γ e δ .*

$$\gamma + \delta = 180 - B = 180^\circ - 80^\circ 02' = 99^\circ 58'$$

$$\operatorname{tg} 1/2(\gamma - \delta) = \frac{l_4 - l_3}{l_4 + l_3} \cdot \cotg B/2 = \frac{382,60 - 337,20}{382,60 + 337,20} \times$$

$$\times 1,19105 = 0,07512$$

donde

$$\gamma - \delta = 8^\circ 35' \quad \text{e} \quad \gamma + \delta = 99^\circ 58'$$

assim

$$\gamma = 54^\circ 17' \quad \text{e} \quad \delta = 45^\circ 41'$$

3) *Do mesmo modo, obteremos para os ângulos α e β os valores.*

$$\alpha = 86^\circ 25' \quad \text{e} \quad \beta = 29^\circ 11'$$

4) *O ângulo C_1 tem para valor*

$$C_1 = C - (\beta + \gamma) = 142^\circ 06' - (29^\circ 11' + 54^\circ 17') = 58^\circ 38'$$

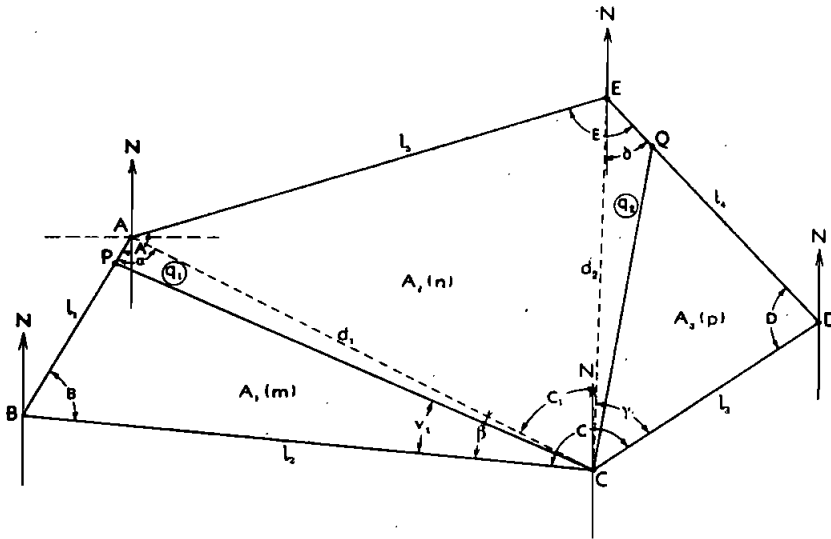


FIG. 407

Verificação dos ângulos calculados. No triângulo ACE , os ângulos respectivos são:

$$A - \alpha = 147^{\circ}07' - 86^{\circ}25' \dots\dots\dots = 50^{\circ}42'$$

$$C - (\beta + \gamma) = 142^{\circ}06' - (29^{\circ}11' + 54^{\circ}17') \dots\dots = 58^{\circ}38'$$

$$E - \delta = 116^{\circ}21' - 45^{\circ}41' \dots\dots\dots = 70^{\circ}40'$$

$$\text{Soma} \dots\dots\dots \underline{180^{\circ}00'}$$

5) *Áreas dos triângulos em que se decompõe o polígono.*

$$\text{Área do triângulo } ABC = 1/2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \text{sen } B$$

$$1/2 \times 306,10 \times 626,55 \times 0,90183 = 86479,6148 \text{ m}^2$$

$$\text{Área do triângulo } ACE = 1/2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen } C_1$$

$$1/2 \times 566,11 \times 464,14 \times 0,85385 = 112176,3778 \text{ m}^2$$

$$\text{Área do triângulo } CDE = 1/2 \cdot l_3 \cdot l_4 \cdot \text{sen } D$$

$$1/2 \times 337,20 \times 382,60 \times 0,98486 = 63529,7337 \text{ m}^2$$

6) *A área total do polígono ABCDE, será:*

$$A = 86479,6148 + 112.176,3778 + 6329,7337$$

$$A = 26\text{Ha}2185,7263 \text{ m}^2$$

7) *Área dos quinhões a separar:*

$$A_1 = A/10 \times 3 = 26218,572630 \times 3 = 78655,7179 \text{ m}^2$$

$$A_2 = A/10 \times 5 = 26218,572630 \times 5 = 131092,8631 \text{ m}^2$$

$$A_3 = A/10 \times 2 = 26218,572630 \times 2 = 52437,1453 \text{ m}^2$$

$$\underline{\hspace{10em}} = 262185,7263 \text{ m}^2$$

Verificação: $A = A_1 + A_2 + A_3$

Pela comparação das áreas encontradas para os triângulos e quinhões, deduzimos que os pontos P e Q das linhas divisórias cortarão os alinhamentos AB e ED , em pontos a determinar.

8) *Áreas dos triângulos de compensação APC (q_1) e CQE (q_2).*

$$q_1 = 86.479,6148 - 78655,7179 = 7.823,8969 \text{ m}^2$$

e $q_2 = 63.529,7337 - 52437,1453 = 11.092,5884 \text{ m}^2$

9) *Resolução dos triângulos de compensação, cujas áreas são conhecidas.*

Triângulo APC $\alpha = 86^\circ 25'$

$$AP = \frac{2 \cdot q_1}{d_1 \cdot \text{sen } \alpha} = \frac{2 \times 7823,8969}{566,11 \times 0,99804} = 27,695 \text{ m}$$

$$AP = 27,70 \text{ m}$$

Triângulo CPE $\delta = 45^\circ 41'$

$$EQ = \frac{2 \cdot q_2}{d_2 \cdot \text{sen } \delta} = \frac{2 \times 11092,5884}{464,14 \times 0,71549} = 66,805 \text{ m}$$

$$EQ = 66,80$$

Comprimento das divisórias CP e CQ

$$CP^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$CP^2 = 27,70^2 + 566,11^2 - 2 \times 27,70 \times 566,11 \times 0,06250$$

$$CP^2 = 319.287,6662 \quad \text{e} \quad CP = 565,05$$

Do mesmo modo,

$$CQ = 420,20$$

Ângulos adjacentes às divisórias V_1 e V_2 .

No triângulo PCB

$$\frac{\text{sen } V_1}{306,10 - 27,70} = \frac{\text{sen } 64^\circ 24'}{565,05} = \frac{0,90183}{565,05}$$

$$\text{sen } V_1 = 0,44355 \quad \text{e} \quad V_1 = \sim 26^\circ 20'$$

No triângulo QCD

$$\frac{\text{sen } V_2}{382,60 - 66,80} = \frac{\text{sen } 80^{\circ}02'}{420,20} = \frac{0,98491}{420,20}$$

$$\text{sen } V_2 = 0,74021 \quad \text{e} \quad V_2 = 47^{\circ}45'$$

c) *Solução analítica, por coordenadas.* Com os mesmos dados anteriores, foram calculadas, pelo *método analítico*, as coordenadas e a área total do polígono, bem como as parciais dos triângulos em que o mesmo se decompõe.

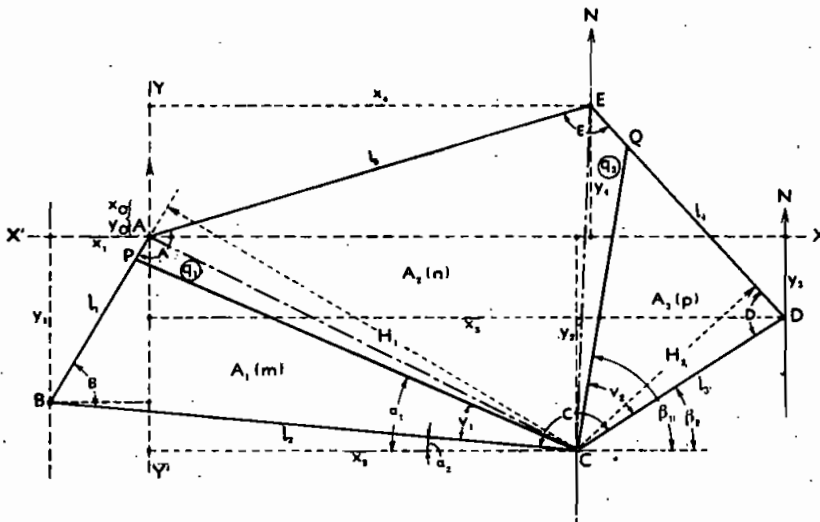


FIG. 408

1) *Coordenadas:*

VÉRTICES	Abcissas	Ordenadas
A.....	0,00	0,00
B.....	- 153,04	- 265,06
C.....	+ 471,69	- 313,07
D.....	+ 752,90	- 126,93
E.....	+ 489,72	+ 150,78

2) *Áreas (Planilha, adiante):*

Do polígono <i>ABCDE</i>	$A = 262.229,7985 \text{ m}^2$
Do triângulo <i>ABC</i>	$S_1 = 86.469,1921 \text{ m}^2$
Do triângulo <i>ACE</i>	$S_2 = 112.219,0293 \text{ m}^2$
Do triângulo <i>CDE</i>	$S_3 = 63.541,5771 \text{ m}^2$
Área total = $S_1 + S_2 + S_3 = A$	262.229,7985 m ²

3) *Áreas a separar de cada quinhão:*

$$A_1 = A/10 \times 3 = 78.668,9396 \text{ m}^2$$

$$A_2 = A/10 \times 5 = 131.114,8992 \text{ m}^2$$

$$A_3 = A/10 \times 2 = 52.445,9597 \text{ m}^2$$

$$\underline{\underline{A = 262.229,7985 \text{ m}^2}}$$

A) *Áreas dos triângulos de compensação.*

$$q_1 = S_1 - A_1 = 86469,1921 - 78668,9396 = 7800,2525 \text{ m}^2$$

$$e \quad q_2 = S_3 - A_3 = 63541,5771 - 52445,9597 = 11095,6174 \text{ m}^2$$

Como verificação:

$$A_2 = S_2 + q_1 + q_2 = 112.219,0293 + 7800,2525 + 11.095,6194$$

$$A_2 = 131.114,8992 \text{ m}^2$$

5) *Comprimento das diagonais AC (d_1) e CE (d_2)*

Empregando a fórmula $d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$, obtemos

$$d_1 = \sqrt{471,69^2 + 313,07^2} = 566,13$$

$$d_2 = \sqrt{(489,72 - 471,69)^2 + (150,78 + 313,07)^2} = 464,20$$

6) *Comprimento das perpendiculares H_1 e H_2 baixadas sobre as retas AB e DE.*

Antes devemos estabelecer as equações das retas AB e DE.

Equação de AB:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') ; \quad y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$y = \frac{-265,06}{-153,04} x = 1,732 x$$

Equação de DE:

$$y - y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} (x - x_3)$$

$$y + 126,93 = \frac{150,78 + 126,93}{489,72 - 752,90} (x - 752,90)$$

$$y = -1,0552 x + 667,53$$

Aplicando a fórmula: $h = \frac{\pm ax' + b + y'}{\sqrt{a^2 + 1}}$

onde x' e y' são as coordenadas do ponto C, teremos

$$H_1 = \frac{1,732 \times 471,69 + 313,07}{1,732^2 + 1} = 565,02 \text{ m}$$

$$H_2 = \frac{-1,0552 \times 471,69 + 667,53 + 313,07}{\sqrt{1,0552^2 + 1}} = 332,10 \text{ m}$$

7) *Determinação dos pontos P e Q das linhas divisórias.* Os comprimentos AP e EQ dos triângulos de compensação são obtidos dos produtos das bases pelas alturas e têm para valor

$$AP \times H_1 = 2 \cdot q_1 \quad \text{e} \quad AP = \frac{2 \cdot q_1}{H_1}$$

$$\text{e} \quad AP = \frac{2 \times 7800,2525}{565,02} = 27,61 \text{ m}$$

$$EQ \times H_2 = 2 \cdot q_2 \quad \text{e} \quad EQ = \frac{2 \cdot q_2}{H_2}$$

$$\text{e} \quad EQ = \frac{2 \times 11.095,6174}{332,10} = 66,81 \text{ m}$$

8) *Coordenadas dos pontos P e Q.*

$$P \begin{cases} x_p = \frac{mx_0 + m'x_1}{m + m'} = \frac{27,61 (-153,04)}{306,10} = -13,80 \\ y_p = \frac{my_0 + m'y_1}{m + m'} = \frac{27,61 (-265,06)}{306,10} = -23,91 \end{cases}$$

$$Q \begin{cases} x_q = \frac{mx_3 + m'x_4}{m + m'} = \frac{66,81 \times 752,90 + 315,78 \times 489,72}{382,60} = 535,68 \\ y_q = \frac{my_3 + m'y_4}{m + m'} = \frac{66,81 \times (-126,93) + 315,78 \times 150,78}{328,60} = 102,29 \end{cases}$$

9) Comprimento das divisórias CP e CQ calculadas por coordenadas.

$$CP = \sqrt{(471,69 + 13,80)^2 + (-313,03 + 23,91)^2}$$

$$CP = 565,08 \text{ m}$$

$$CQ = \sqrt{(535,68 - 471,69)^2 + (102,29 + 313,07)^2}$$

$$CQ = 420,26 \text{ m}$$

10) Orientação das divisórias com relação aos lados CB e CD. Determinação dos ângulos V_1 e V_2 .

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_2 - y_p}{x_2 - x_p} = \frac{-313,07 + 23,91}{471,69 + 13,80} = 0,59560$$

$$\text{donde } \alpha_1 = 30^\circ 46' 40''$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-313,07 + 265,06}{471,69 + 153,04} = 0,07685$$

$$\text{e } \alpha_2 = 4^\circ 23' 40''$$

e o ângulo de orientação V_1 :

$$V_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = 30^\circ 46' 40'' - 4^\circ 23' 40'' = 26^\circ 23'$$

Também

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y_2 - y_q}{x_2 - x_q} = \frac{-313,07 - 102,29}{471,69 - 535,68} = 6,49101$$

$$\text{donde } \beta_1 = 81^\circ 14' 30''$$

$$\text{e } \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-313,07 + 126,93}{471,69 - 752,90} = 0,66193$$

$$\text{e } \beta_2 = 33^\circ 30'$$

e o ângulo de orientação V_2 :

$$V_2 = \beta_1 - \beta_2 = 81^\circ 14' 30'' - 33^\circ 30' = 47^\circ 44' 30''$$

Daremos, a seguir, como verificação de todos os cálculos analíticos feitos, uma planilha contendo as áreas, dos quinhões, pelo método de Gauss.

Planilha de cálculos das áreas dos quinhões A_1 , A_2 e A_3 , da Medição e Divisão procedidas em terras de situadas em e requerida por
(ass.) Agr. Top. ou Eng.

COORDENADAS		ΣX (X_{n-1} X_{n+1})	ΣY (Y_{n-1} $-Y_{n+1}$)	DUPLAS ÁREAS ($Y \cdot \Sigma X$)		DUPLAS ÁREAS ($X \cdot \Sigma Y$)	
Abcissas (X)	Ordenadas (Y)			A somar	A subtrair	A somar	A subtrair
QUINHÃO A_1 (Condômino.....)							
P	- 18,80	- 23,91	624,73	- 48,01	14.037,2943	662,5380	
B	- 153,04	- 265,06	- 485,49	289,16	128.683,9794		44.253,0464
C	+ 471,69	- 313,07	- 139,24	- 241,15	43.691,8668		113.748,0435
			$X = 0$	$Y = 0$	172.275,8403	14.037,2943	662,5380
					14.937,2943		108.001,0829
					157.338,5519		662,5380
							187.338,5519
							Área = 78.669m ² ,2759
QUINHÃO A_2 (Condômino.....)							
P	- 18,80	- 23,91	- 471,69	+ 313,07	11.278,1019		4.320,3660
C	+ 471,69	- 313,07	- 849,48	- 126,20	172.025,7036		59.537,2780
Q	+ 535,68	+ 102,29	- 18,03	- 468,85		1.844,2827	248.475,1680
E	+ 489,72	+ 150,78	+ 535,68	+ 102,29	80.769,8304		50.093,4588
A	0,00	0,00	+ 803,52	+ 174,89			
			$X = 0$	$Y = 0$	264.073,6359	1.844,2827	50.093,4588
					1.844,2827		312.322,8120
					262.229,3532		50.093,4588
							262.229,3532
							Área = 181.114m ² ,6766
QUINHÃO A_3 (Condômino.....)							
Q	+ 535,68	+ 102,29	+ 281,21	+ 186,14	28.764,9709	99.711,4732	
C	+ 471,69	+ 313,07	- 217,22	+ 229,22	68.003,0634	108.120,7818	
D	+ 752,90	- 126,93	- 63,69	- 416,26	8.122,2507		312.724,5440
			$X = 0$	$Y = 0$	104.892,2870	207.832,2570	312.724,5440
						Área = 52.446m ² ,1435	207.832,2570
							104.892,2870
DIFERENÇAS (Inevitáveis, devido às aproximações nos cálculos)				DIFERENÇAS			
			Proporcional	Calculada	Para mais	Para menos	
	Quinhão A_1		78.668,9396 m ²	78.669,2759 m ²	0,3363 m ²		
	Quinhão A_2		181.114,8992 m ²	181.114,6766 m ²		0,2226 m ²	
	Quinhão A_3		52.445,9597 m ²	52.446,1435 m ²	0,1838		
	A		262.229,7985 m ²	262.230,0960 m ²	0,2975		0,2226
							+ 0,2975
	DIFERENÇA TOTAL = 262.230,0960 - 262.229,7985 = 0,2975m ²						

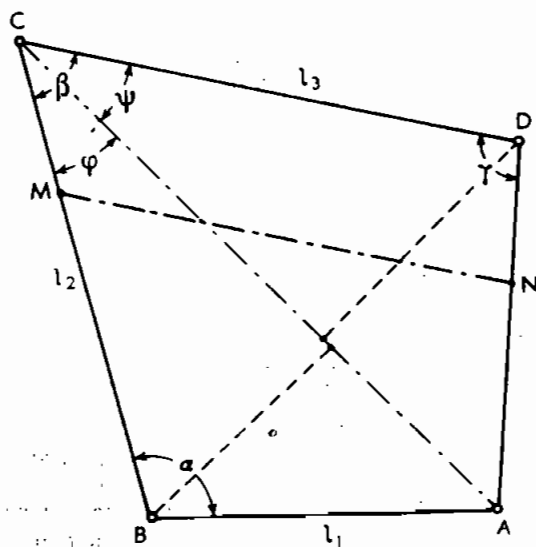
A seguir daremos o resumo dos valores que interessam à marcação, no terreno, da linha divisória, comparativamente.

Dados comparativos

PROCESSO	Gráfico	Trigonométrico	Analtico	
Distâncias calculadas..	AP.....	27,80	27,70	27,61
	EQ.....	66,60	66,80	66,81
	CD.....	564,60	565,05	565,08
	CQ.....	420,00	420,20	420,25
Ângulos de orientação..	V ₁	26°35'	26°20'	26°23'
	V ₂	47°40'	47°45'	47°44'30''
Áreas dos quinhões....	A ₁	78.619,75	78.655,7179	78.669,2759
	A ₂	131.238,14	131.092,8631	131.114,6766
	A ₃	52.456,00	52.437,1453	52.446,1435
Área total	A =	262.313,89	262.185,7263	262.230,0960

As divisões de terras de grandes extensões só podem ser feitas pelo processo analítico por ser o mais exato, empregando-se o trigonométrico e gráfico para terrenos ou chácaras de área reduzida e poucos alinhamentos como é o caso prático desenvolvido.

XIII) Divisão de terras. Soluções diversas. *Quadriláteros e trapézios.*
 a) Calcular trigonometricamente, a área do quadrilátero ABCD, com a medida de três lados e dois ângulos.



Dados

$$\begin{aligned} AB (l_1) &= 272,15 \text{ m} \\ BC (l_2) &= 395,40 \text{ m} \\ CD (l_3) &= 407,70 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\widehat{ABC} (\alpha) = 102^\circ 54'$$

$$\widehat{BCD} (\beta) = 62^\circ 33'$$

Dupla área

$$(2S) = l_1 l_2 \operatorname{sen} \alpha + l_2 l_3 \operatorname{sen} \beta - l_1 l_3 \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

FIG. 409

$$\begin{aligned}
 2S &= 272,15 \times 395,40 \cdot \text{sen } 77^{\circ}06' = 107608,11 \times 0,9748 \\
 &+ 395,40 \times 407,70 \cdot \text{sen } 62^{\circ}33' = 161204,58 \times 0,8874 \\
 &- 272,15 \times 407,70 \cdot \text{sen } 14^{\circ}33' = 110955,55 \times 0,2512
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2S &= 104896,3856 \\
 &+ 143052,9443
 \end{aligned}$$

$$\hline 247949,3299$$

$$- 27872,0342$$

$$\hline 2S = 220077,2957$$

$$\begin{aligned}
 \text{Area } S &= 11.0038,6479 \text{ m}^2 \\
 &= 11,0038 \text{ Ha}
 \end{aligned}$$

b) *Problema sobre divisão de terras (2.ª Parte).* No quadrilátero supra, se deve separar um quinhão igual a $\frac{3}{8}$ da área total, por uma divisória paralela ao lado CD e a esse adjacente.

$$\text{Area total } S = 11.0038,6479 \text{ m}^2$$

$$\text{Area do quinhão } (s_1) = \frac{3}{8} S = 41.364,4929 \text{ m}^2$$

1) Cálculo dos ângulos φ e γ e diagonal AC (d) do triângulo ABC .

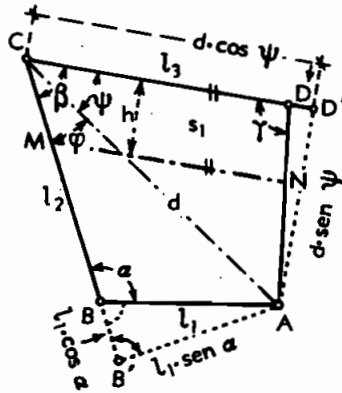


FIG. 410

$$\text{tg } \varphi = \frac{l_1 \cdot \text{sen } \alpha}{l_2 - l_1 \cdot \text{cos } \alpha} \quad (1) \quad d = l_1 \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \varphi} \quad (2)$$

$$\psi = \beta - \varphi \quad (3)$$

Do triângulo ACD .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{d \cdot \operatorname{sen} \Psi}{l_3 - d \cos \Psi} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{272,15 - \operatorname{sen} 77^{\circ}06' (0,9748)}{395,40 + 272,15 \cos 77^{\circ}06' (0,22325)} = \frac{265,2918}{456,1575} = 0,58158$$

$$\varphi = 30^{\circ}10'54'' \quad (1)$$

$$d = \frac{272,15 \cdot \operatorname{sen} 77^{\circ}06'}{\operatorname{sen} 30^{\circ}10'54'' (0,5027)} = \frac{265,2918}{0,5027} = 527,73 \text{ m} \quad (2)$$

$$\Psi = 62^{\circ}33' - 30^{\circ}10'54'' = 32^{\circ}22'06'' \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{527,73 \cdot \operatorname{sen} 32^{\circ}22'06'' (0,53536)}{407,70 - 527,73 \cos 32^{\circ}22'06'' (0,84462)} = \frac{282,5255}{38,0313} = 7,4287$$

$$\gamma = -82^{\circ}20' = 97^{\circ}40' \quad (4)$$

2) Cálculo da divisória MN . Dupla área do quadrilátero $CDNM$ (s_1)

$$2s_1 = CM \cdot l_3 \operatorname{sen} \beta + l_3 \cdot DN \operatorname{sen} \gamma - CM \cdot DN \cdot \operatorname{sen} (\beta + \gamma)$$

$$CM = \frac{h}{\operatorname{sen} \beta}; \quad DN = \frac{h}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$$2s_1 = l_3 \cdot h + l_3 h - \frac{h^2 \cdot \operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma}$$

$$-\frac{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma} h^2 + 2l_3 \cdot h - 2s_1 = 0$$

$$a = -\frac{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma} = -\frac{\operatorname{sen} 19^{\circ}47'}{\operatorname{sen} 0,88741 \times 0,99106} = -\frac{0,33846}{0,87947} = -0,3848$$

$$b = 2 \cdot l_3 = 2 \times 407,70 = 815,40$$

$$c = -2s_1 = -2 \times 41.264,4929 = -82.528,9858$$

$$-0,3848 h^2 + 815,40 h - 82.528,9858 = 0$$

$$h = \frac{-815,40 \pm \sqrt{664877,16 - 4 \times 0,3848 \times 82.528,9858}}{2 \times (-0,3848)} =$$

$$= \frac{-815,40 \pm \sqrt{537848,5452}}{-0,7696} = \frac{-815,40 + 733,38}{-0,7696} = 106,57 \text{ m}$$

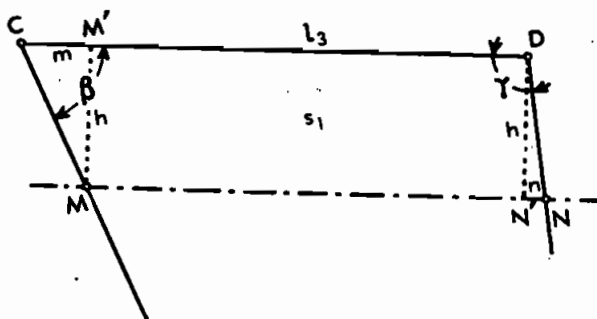


FIG. 411

$$CM = \frac{h}{\text{sen } \beta} = \frac{106,57}{0,88741} = 120,09 \text{ m}$$

$$DN = \frac{h}{\text{sen } \gamma} = \frac{106,57}{0,99106} = 107,53 \text{ m}$$

$$CM' = m = CM \cdot \cos \beta = 55,37 \text{ m}$$

$$NN' = n = DN \cdot \cos \gamma = 14,34 \text{ m}$$

$$MN \text{ (divisória)} = l_3 - m + n$$

$$MN = 407,70 - 55,37 + 14,34 = 366,67 \text{ m}$$

$$\text{Área } s_1 = \frac{l_3 + MN}{2} \cdot h = 41.262,3054 \text{ m}^2$$

$$\epsilon = 2,19 \text{ m}^2$$

A resolução completa do problema, ainda incluiria o cálculo da área restante (5/8 de S) e verificação do comprimento da divisória e sua posição.

c) Cálculo de áreas e linha divisória pelo processo das coordenadas (Gauss).

1) Avaliar a área limitada pelo polígono $ABCDE$.

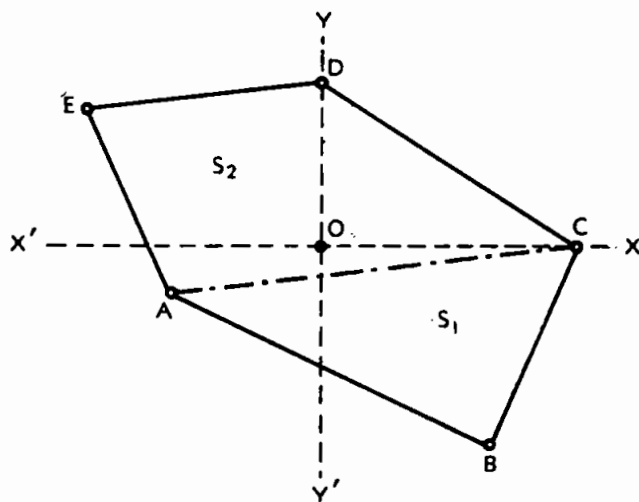
Dados (coordenadas):

$$A \begin{cases} X_1 = -80 \text{ m} \\ Y_1 = -20 \text{ m} \end{cases} \quad B \begin{cases} X_2 = 90 \text{ m} \\ Y_2 = -100 \text{ m} \end{cases} \quad C \begin{cases} X_3 = 140 \text{ m} \\ Y_3 = 0 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} X_4 = \text{zero} \\ Y_4 = 90 \text{ m} \end{cases} \quad E \begin{cases} X_5 = -120 \text{ m} \\ Y_5 = 80 \text{ m} \end{cases}$$

2) Calcular o comprimento e inclinação da diagonal AC do polígono dado.

3) Determinar, *pelo mesmo processo*, as áreas que a referida diagonal separa no polígono referido (Fig. 412).



$$\underline{S = \text{Área total}}$$

FIG. 412

Resolução

$$S = \text{área total}$$

1.º *Área (Gauss). Fórmulas:*

$$2S = X_1(Y_n - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + \dots + X_n(Y_{n-1} - Y_1)$$

e a verificação:

$$2S = Y_1(X_n - X_2) + Y_2(X_1 - X_3) + \dots + Y_n(X_{n-1} - X_1)$$

Planilha de S:

VÉRTICES	COORDENADAS		DIFERENÇAS:		DUPLAS ÁREAS			
	X	Y	$(X_{n-1} - X_{n+1})$	$(Y_{n-1} - Y_{n+1})$	$Y(X_{n-1} - X_{n+1})$		$X(Y_{n-1} - Y_{n+1})$	
					+	-	+	-
	m	m	m	m	m ²		m ²	
A.....	- 80	- 20	+ 210	- 180	4 200	14 400		
B.....	+ 90	- 100	+ 220	+ 20	22 000	1 800		
C.....	+ 140	0	- 90	+ 190	-	26 600		
D.....	0	+ 90	- 260	+ 80	23 400	-		
E.....	- 120	+ 80	- 80	- 110	6400	13 200		-
ÁREA = 56 000/2 = 28 000 m ²					56 000		56 000	

Planilha parcial, de S₁:

V	X	Y	$\frac{n \pm 1}{n-1} \sum X$	$\frac{n \pm 1}{n-1} \sum Y$	X.Y	Y.X
A.....	- 80	- 20	+ 50	+ 100	- 1 000	- 8 000
B.....	+ 90	- 100	- 220	- 20	+ 22 000	- 1 800
C.....	+ 140	0	+ 170	- 80	-	- 11 200
Área = 10 500 m ²			± 220	± 100	+ 21 000	- 21 000

Planilha parcial, de S₂:

V	X	Y	X	Y	$\sum X.Y$	$\sum Y.X$
A.....	- 80	- 20	- 260	+ 80	+ 5 200	- 0 400
C.....	+ 140	0	- 80	- 110	-	- 15 400
D.....	0	+ 90	+ 260	- 80	+ 23 400	-
E.....	- 120	+ 80	+ 80	+ 110	+ 6 400	- 13 200
Área = 17 500 m ²			± 340	± 190	+ 35 000	- 35 000

$$S = S_1 + S_2 = 10 500 + 17 500 = 28 000 \text{ m}^2$$

2.º) Comprimento da diagonal AC:

$$AC = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = \sqrt{(140 + 80)^2 + (20)^2} = \sqrt{48800} = 220,907 \text{ m}$$

3.º) Inclinação da reta AC (côm eixo Y):

$$\text{tg } \alpha = \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} = \frac{140 - (-80)}{-(-20)} = \frac{220}{20} = 11$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } 84^{\circ}48' \dots\dots\dots 10,9882 \\ \text{tg } 84^{\circ}49' \dots\dots\dots 11,0237 \end{array} \right\} \alpha = 84^{\circ}48'20''$$

d) *Exercício sobre áreas (trapézio).* Calcular a base menor (b) e a altura (a) de um trapézio, conhecendo a superfície (S) e a base maior (B) e os ângulos adjacentes (α e β).

Fórmula:

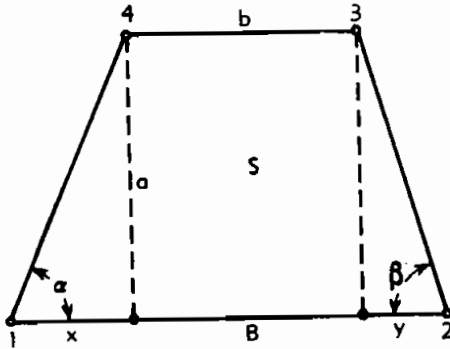


Fig. 413

$$2S = (B + b) a$$

$$a = \frac{2S}{B + b} \quad (1)$$

$$a = x \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = y \operatorname{tg} \beta$$

$$x = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{tg} \beta} \quad (3)$$

$$B - b = x + y = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{a}{\operatorname{tg} \beta}$$

e

$$B - b = \frac{a (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (4)$$

substituindo a por seu valor (1):

$$B - b = \frac{2S (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{(B + b) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

c

$$B^2 - b^2 = \frac{2S (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (5) \text{ Fórmula que resolve o problema.}$$

Resolução

1.º Dados:

$$\text{Superfície } (S) = 1275 \text{ m}^2$$

$$\text{Base maior } (B) = 57 \text{ m}$$

$$\text{Ângulos lidos } \begin{cases} \beta = 66^\circ 30' \\ \alpha = 63^\circ 30' \end{cases}$$

Base menor (b) = ?
 $\text{tg } 63^{\circ}30' = 2,006$

Altura (a) = ?
 $\text{tg } 66^{\circ}30' = 2,300$

2.º Aplicando a fórmula (5):

$$b^2 = B^2 - \frac{2S (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}{\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

Substituindo:

$$b^2 = 57^2 - \frac{2 \times 1275 (2,006 + 2,300)}{2,006 \times 2,300} = 3249 - \frac{10980,30}{4,6138}$$

$$b^2 = 3249 - 2379,88 = 869,12$$

Donde $b = 29,48$ m

3.º Da fórmula (1), obtemos (a):

$$a = \frac{2550}{57 + 29,48} = \frac{2550}{86,48} = 29,49 \text{ m}$$

$$\text{Verificação: } \frac{B + b}{2} \cdot a = 43,24 \times 29,49 = 1275,15 \text{ m}$$

Pequena diferença, devida às aproximações ac cm.

e) Dividir a área do quadrilátero ABCD, pelo processo analítico, em 2 quinhões equivalentes, tendo no lado AB (estrada) comprimentos iguais.

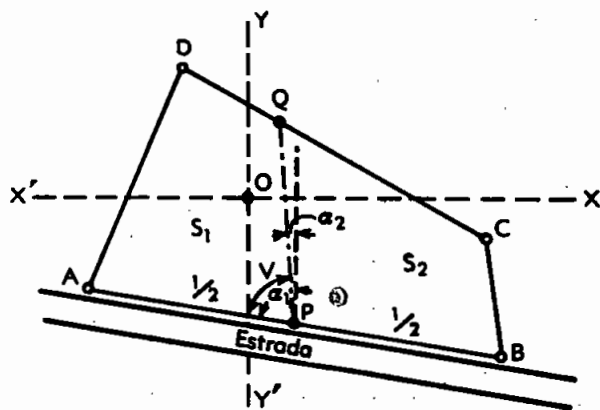


FIG. 414

Dados

$$A \begin{cases} X_1 = -66 \text{ m} \\ Y_1 = -34 \text{ m} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} X_2 = 97 \text{ m} \\ Y_2 = -63 \text{ m} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} X_3 = 96 \text{ m} \\ Y_3 = -18 \text{ m} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} X_4 = -26 \text{ m} \\ Y_4 = -52 \text{ m} \end{cases}$$

Resultados

- 1) Área S do quadrilátero: $S = 10299 \text{ m}^2$
- 2) Área dos quinhões: $S_1 = S_2 = 5149,50 \text{ m}^2$
- 3) Coordenadas de P : $X_p = 15,5 \text{ m}$ e $Y_p = -48,5 \text{ m}$
- 4) Coordenadas de Q : αCE
 β) equação da área S_2 (processo Távora)

Resolvendo o sistema (α) e (β), se obtém:

$$X_q = 9,27 \text{ m} \text{ e } Y_q = 31,70 \text{ m}$$

- 5) Comprimento da linha divisória: $PQ = 80,44 \text{ m}$
- 6) Comprimento de A a P : $AP = 82,78 \text{ m}$
- 7) Comprimento de D a Q : $DQ = 40,69 \text{ m}$
- 8) Comprimento de C a Q : $CQ = 99,96 \text{ m}$
- 9) Comprimento do lado $AB = 165,55 \text{ m}$
 Verificação: $AB/2 = AP = 82,775 \text{ m}$
- 10) Orientação de PQ : $V = 75^\circ 28'$

f) Verificação dos lados paralelos de um trapézio, em função das coordenadas dos vértices.

$$\text{tg } \alpha = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

$$\text{lado } BC \dots\dots \frac{100 - 50}{40 - 60} = \frac{50}{20} = 5/2$$

$$\text{lado } DA \dots\dots \frac{100 - 50}{0 - (-80)} = \frac{50}{80} = 5/8$$

Estes lados são paralelos e portanto, as bases do trapézio.

$$\text{lado } CD \dots\dots \frac{0 - 100}{-80 - 40} = \frac{100}{120} = 5/6$$

$$\text{lado } AB \dots\dots \frac{50 - 0}{60 - 0} = \frac{50}{60} = 5/6$$

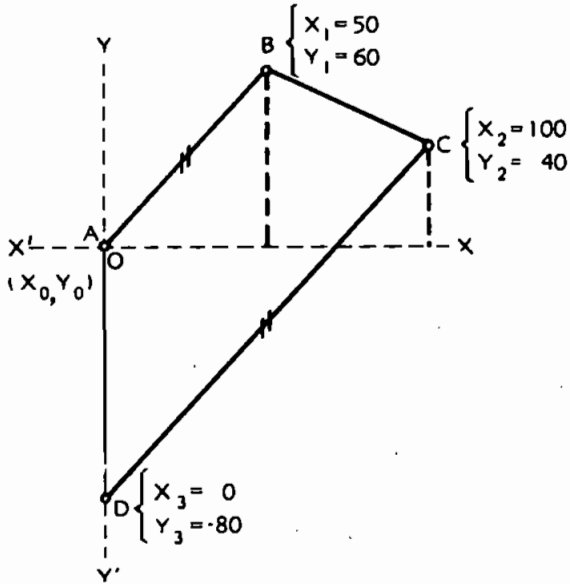


FIG. 415

Problema sobre divisão de terras.

g) Dividir a área de um trapézio, em dois outros trapézios proporcionais aos números m (3 partes) e n (2 partes) por uma linha divisória paralela às bases, trigonometricamente. Seja o trapézio $ABCD$ (Fig. 416) a dividir por uma divisória MN em duas partes S_1 (m) e S_2 (n), com os seguintes dados:

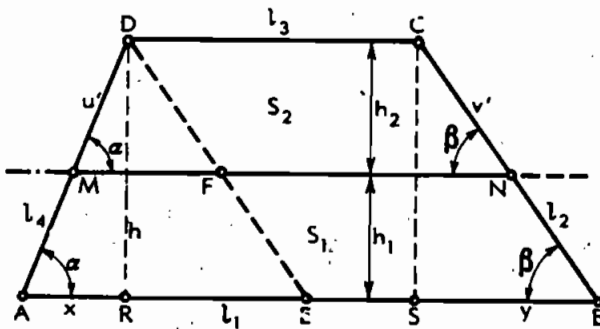


FIG. 416

Dados:

$$l_1 = 124,50 \text{ m}$$

$$l_2 = 53 \text{ m}$$

$$l_3 = 83,70 \text{ m}$$

$$l_4 = 46 \text{ m}$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\beta = 57^\circ$$

Resolução

1) *Cálculo da altura h (DR e CS):*

$$h = CS = l_2 \cdot \text{sen } 57^\circ = 53 \times 0,8387 = 44,45 \text{ m}$$

e

$$h = DR = l_4 \cdot \text{sen } 75^\circ = 46 \times 0,9659 = 44,43 \text{ m}$$

donde

$$h \text{ (valor médio)} = 44,44 \text{ m}$$

2) *Cálculo de AR e SB (x e y):*

$$x = AR = l_4 \cos \alpha = 46 \times 0,2588 = 11,91 \text{ m}$$

$$y = SB = l_2 \cos \beta = 53 \times 0,5446 = 28,87 \text{ m}$$

Verificação:

$$l_1 = x + l_3 + y = 11,91 + 83,70 + 28,87 + 124,48 \text{ m}$$

Pequena diferença devida às aproximações ao centímetro e linhas trigonométricas.

3) *Cálculo da área S:*

$$S = \frac{l_1 + l_3}{2} \cdot h = \frac{124,50 + 83,70}{2} \cdot 44,44 = 4626,20 \text{ m}^2$$

4) *Cálculo das áreas parciais S₁ e S₂:*

$$S_1 = \frac{S}{m+n} \cdot n \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{S}{m+n} \cdot m$$

$$S/m + n = 4626,20/5 = 925,24 \text{ m}^2$$

e

$$S_2 = 925,24 \times 3 = 2775,72 \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad S_1 = 1850,48 \text{ m}^2$$

donde

$$S_1 + S_2 = 4626,20 \text{ m}^2 \text{ (S)}$$

5) *Comprimento MN (z) da linha divisória (Fórmula da pág. 626).*

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{l_3^2 \cdot n + l_1^2 m}{m+n}} = \sqrt{\frac{83,70^2 \times 2 + 124,50^2 \times 3}{2+3}} = \\ &= \sqrt{\frac{60512,13}{5}} = \sqrt{12102,4260} = 110,01 \text{ m} \end{aligned}$$

6) Cálculo das alturas h_1 e h_2 dos trapézios de áreas S_1 e S_2 . Dos triângulos semelhantes AED e MFD , obtemos:

$$\frac{l_1 - l_3}{h} = \frac{z - l_3}{h_2} ; \quad \frac{124,50 - 83,70}{44,44} = \frac{110,01 - 83,70}{h_2}$$

e

$$\frac{40,80}{44,44} = \frac{26,31}{h_2} \quad \text{donde } h_2 = 28,66 \text{ m}$$

Também

$$h_1 = h - h_2 = 44,44 - 28,66 = 15,78 \text{ m}$$

7) Verificação das áreas S_1 e S_2 , diretamente:

$$S_1 = \frac{l_1 + z}{2} h_1 = \frac{110,01 + 124,50}{2} 15,78$$

$$S_1 = 1850,2839 \text{ m}^2 \text{ (1850,38)}$$

$$S_2 = \frac{z + l_3}{2} h_2 = \frac{110,01 + 83,70}{2} 28,66$$

$$S_2 = 2775,8643 \text{ m}^2 \text{ (2775,75)}$$

8) Determinação dos pontos de passagem M e N nos lados AD e BC :

$$h_1 = u \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad u = \frac{h_1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{15,78}{0,9659} = 16,33 \text{ m}$$

$$h_1 = v \operatorname{sen} \beta \quad \text{e} \quad v = \frac{h_1}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{15,78}{0,8387} = 18,82 \text{ m}$$

$$h_2 = u' \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad u' = \frac{h_2}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{28,66}{0,9659} = 29,67 \text{ m}$$

$$h_2 = v' \operatorname{sen} \beta \quad \text{e} \quad v' = \frac{h_2}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{28,66}{0,8387} = 34,18 \text{ m}$$

Verificação:

$$u + u' = 16,33 + 29,67 = 46,00 \text{ m } (= l_4)$$

$$v + v' = 18,82 + 34,18 = 53,00 \text{ m } (= l_2)$$

9) *Conclusão.* Com o goniômetro instalado em M , à distância u' de D ou u de A , e o ângulo α no limbo, traça-se o alinhamento MN , que deverá cortar o lado BC do trapézio, à distância v' do vértice C ou v do vértice B .

A tolerância admitida na marcação da divisória é, nos casos comuns, de 1/1 000, e deverá ser ajustada, com deslocamento da linha.

XIV) *Nivelamento geométrico. Cotas compensadas.*

a) Cálculo das cotas compensadas num nivelamento longitudinal composto. Verificação de cada página de caderneta, como a que segue:

COM O NÍVEL.....				CÁLCULO		
Pontos nivelados	Leituras			Alturas do nível (x)	Cotas	
	Ré	Interm.	Vante		Calculadas	Compensadas
RN.....	0,093 ²			50,093 ²	50,000 (H)	50,000
1.....		2,784				49,908
2.....			3,911	47,089 ⁷	46,782	46,781
3.....	0,307	1,318				45,769
4.....		2,091				44,996
Ra.....			3,633		43,456	43,454
Rn.....	0,481 ⁰			43,937 ⁴		
5.....			1,823		42,114	42,111
6.....	3,230 ²⁹	2,068		45,344 ⁰		
7.....			0,331		45,013	45,332
8.....	79	1,324		47,993 ⁸⁸		
9.....	2,980		0,293		47,700	46,864
9.....				51,492 ⁸⁶		47,686
RN.....	3,792 ¹		1,486		50,006(H')	50,000

$\Sigma r(11,483)$ $\Sigma v = 11,477$
(x) acima do plano zero (Datum)

$\Sigma r - \Sigma v = 11,483 - 11,477 = 0,006$
 $H' - H = 50,006 - 50,000 = 0,006$

1) Cálculo das alturas do instrumento (AI)

cota da referência de nível (RN) = 50,000
mais visada a ré na RN = + 0,693

1.^a alt. instr. = 50,693
menos visada vante na est. 2 = - 3,911

cota est. 2 = 46,782
mais visada a ré na est. 2 = + 0,307

2.^a alt. instr. = 47,089

e, assim por diante.

2) *Verificação dos cálculos de cada página de caderneta.* Aplicação da fórmula do nivelamento longitudinal composto:

$$\Sigma r - \Sigma v = H' - H$$

onde

$$\Sigma r = \text{soma das visadas de ré}$$

$$\Sigma v = \text{soma das visadas de vante}$$

$$H' = \text{cota calculada do último ponto da página}$$

$$H = \text{cota idem, idem, do primeiro ponto.}$$

No exemplo (*poligonal fechada*)

$$\Sigma r - \Sigma v = 11,483 - 11,477 = + 0,006$$

$$H' - H = 50,006 - 50,000 = + 0,006$$

3) *Distribuição do erro.*

$$\text{Por estação (visada ré)} = \varepsilon = \frac{+ 0,006}{6} = 0,001$$

XV) *Nivelamento trigonométrico.* a) Achar a distância e cota de um ponto P, nivelado trigonometricamente dos vértices C, D e E de uma poligonal topográfica, com os seguintes dados de campo:

ESTAÇÕES (C)	Pontos visados	ÂNGULOS		Croquis e Observações
		Horizontais	Verticais	
C 1.537 (i) 70.090 (c)	P	0°		
	D	97°28'40" (α)	+ 5° 6'00" (V1)	
D 1.494 (i) 77.397 (c)	C	0°		
	P	77°47'40" (β)	+ 4°47'30" (V2)	
E 74.659 (c)	E	164°22'30" (γ)		
	D	0°		
	P	91°43'55" (δ)	+ 4°52'30" (V3)	

Fig. 417

= Solução por logaritmos =

$$\varphi = 179^{\circ}59'60'' - (97^{\circ}28'40'' + 77^{\circ}47'40'') = 4^{\circ}43'40''$$

1) *Cálculo de D₂:*

$$\frac{l_1}{\text{sen } 4^{\circ}43'40''} = \frac{D_2}{\text{sen } 97^{\circ}28'40''}$$

$$\log 140,35 - \log \operatorname{sen} 4^{\circ}43'40'' = \log D_2 - \log \cos 7^{\circ}28'40''$$

$$2,14721 - \overline{2},91604 = \log D_2 - \overline{1},99629$$

Tornando as características positivas, isto é, tornando os logaritmos negativos:

$$2,14721 + 1,08396 = \log D_2 + 0,00371$$

$$3,2311\overline{7} - 0,00371 = \log D_2$$

$$\log D_2 = 3,22746$$

Donde

$$D_2 = 1688,35 \text{ m}$$

2) *Cálculo de N_2 (diferença de nível entre D e P).*

$$N'_2 = D_2 \cdot \operatorname{tg} v_2 \quad v_2 = 4^{\circ}47'30''$$

$$\log N'_2 = \log D_2 + \log \operatorname{tg} v_2$$

$$\log N'_2 = 3,22746 + \overline{2},92338$$

$$\log N'_2 = 3,22746 - 1,07662 = 2,15084$$

$$\text{donde } N'_2 = 141,53 \text{ m}$$

Correção devida à refração e curvatura (C_{rc})

$$l_{rc} = 0,000000068 D_2^2 = 0,194 \cong 0,19 \text{ m}$$

$$\text{e } N_2 = N'_2 + l_{rc} = 141,53 + 0,19 = 141,72 \text{ m}$$

3) *Cota do ponto P.* A cota do ponto visado P (junto ao solo) é igual a da estação D, mais a diferença de nível (N_2).

$$\text{cota da estação D: } 77,397 + 1,494 \cong 78,89 \text{ m}$$

$$\text{e a do ponto P: } 78,89 + 141,72 = 220,61 \text{ m}$$

$$= \text{Verificação} =$$

4) *Cálculo de D_1 :*

$$\frac{l_1}{\operatorname{sen} 4^{\circ}43'40''} = \frac{D_1}{\operatorname{sen} 77^{\circ}47'40''}$$

$$\lg D_1 = \lg \operatorname{sen} 77^{\circ}47'40'' + \lg 140,35 - \lg \operatorname{sen} 4^{\circ}43'40''$$

$$\lg D_1 = 2,14721 + \overline{1},99007 - 2,91604$$

$$\lg D_1 = 2,14721 - 1,00993 + 2,08396 = 3,22124$$

$$\text{donde } D_1 = 1664,33 \text{ m}$$

5) *Cálculo de N_1 (diferença de nível entre C e P).*

$$N'_1 = D_1 \cdot \operatorname{tg} v_1 \quad v_1 = 5^{\circ}06'00''$$

$$\lg N'_1 = \lg D_1 + \lg \operatorname{tg} v_1$$

$$\lg N'_1 = 3,22124 + \overline{2},95060$$

$$\lg N'_1 = 3,22124 - 1,04940 = 2,17184$$

$$\text{donde } N'_1 = 148,54 \text{ m}$$

Correção da curvatura e refração:

$$l_{cr} = 0,068 D^2_1 \text{ (km)} = 0,068 \times 1,664^2 = 0,188 \cong 0,19 \text{ m}$$

$$N_1 = 148,54 + 0,19 = 148,73 \text{ m}$$

6) Cota do ponto P:

$$\begin{aligned} \text{Cota da estação C} &= 70,09 + 1,540 = 71,63 \text{ m} \\ \text{e a do ponto P} &= 71,163 + 148,73 = 220,36 \text{ m} \end{aligned}$$

7) Valor médio:

$$\frac{220,61 + 220,36}{2} = 220,485 \text{ m}$$

b) Erros no nivelamento trigonométrico.

Fórmula teórica: geral — $N = D \cdot \text{tg } \alpha$

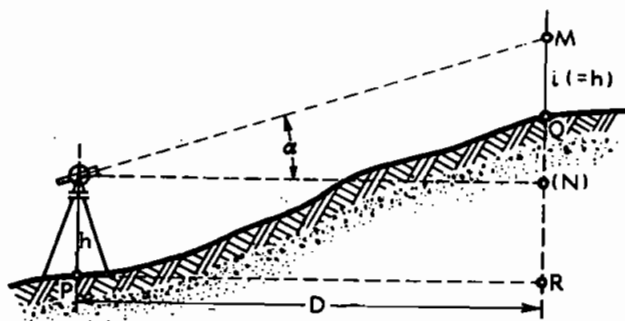


FIG. 418

Erros:

1) No valor do ângulo α :

$$N = D \cdot \text{tg } (\alpha \pm d \alpha) = D \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } d \alpha}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } d \alpha}$$

sendo $\text{tg } d \alpha$ muito pequeno:

$$N = D \text{ tg } \alpha \pm D \text{ tg } d \alpha$$

2) No valor da distância D:

$$N = (D \pm dD) \text{ tg } \alpha = D \text{ tg } \alpha \pm dD \text{ tg } \alpha$$

3) Nos dois valores acima (é o caso da prática):

$$N = (D \pm dD) \cdot \operatorname{tg} (\alpha \pm d \alpha)$$

ou
$$N = D \operatorname{tg} \alpha + \underset{(1.^\circ)}{D \operatorname{tg} d \alpha} \pm \underset{(2.^\circ)}{dD \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$
 (desprezando o último termo)

Exercício prático:

Dados: $D = 200 \text{ m}$
 $dD = + 0,48 \text{ m}$
 $\alpha = 7^\circ 27' 30''$
 $d \alpha = + 0',4 \text{ (24")}$

$$D \cdot \operatorname{tg} \alpha = 26,182 \text{ m}$$

Erros:

$$(1.^\circ) - 200 \cdot \operatorname{tg} d \alpha = - 0,023 \text{ m}$$

$$(2.^\circ) - 0,48 \operatorname{tg} \alpha = - 0,063 \text{ m}$$

$$- 0,086 \text{ m}$$

<i>Valor correto:</i>	26,096 m
-----------------------	----------

XVI) Nivelamento barométrico.

a) *Nivelamento barométrico* de diversos pontos ao longo da *Estrada dos Alpes*, no Morro de Teresópolis (Porto Alegre), com aneróides compensados "Paulin", executado por alunos da Turma A (civil) em 20 de maio de 1957 (2.º ano).

Ponto de partida: RN da P. Municipal — cota = 94,31 m

Ponto de chegada: Marco cadastral do Morro Teresópolis — cota = 260,74 m

(Do relatório do aluno (hoje Eng.º Civil) *Henrique Orlandi Jr.*)

Esquema.

- 1) Descrição do trabalho de campo e do aneróide usado (dado teoria).
- 2) *Descrição da planilha calculada:*

Em primeiro lugar efetuamos (Grupo A_1 — 5 alunos) a organização dos dados do *aneróide de base* que ficou junto à referência de nível RN. Vemos que de 15 em 15 minutos houve uma variação de pressão e temperatura. Traçamos assim os gráficos Temperatura-Hora e Pressão-Hora. Na planilha por sua vez, temos as colunas:

- o *Pontos nivelados:* temos os de 1 até 8 (*RN* até *MC*) na ida, de 8 até 13 (*MC* até *RN*) na volta.
- o *Local* Na coluna dos locais colocamos os dados que possam indicar a localização certa ou provável da estação de leitura. Vemos assim que, ao voltarmos deixamos de lado duas estações. E.A. s/n e E.A. 227.
- o *Hora* as horas correspondentes aos pontos de leitura.
- o *Leitura barom.* as pressões lidas no aneróide.
- o *Temp. do ar* As temperaturas correspondentes a essas pressões.
- o *Reduções pelas oscilações* Devemos agora efetuar as correções de pressão e temperatura. Tomamos para linha de base de ida, a leitura do aneróide base às 14,40 h. Das 14,40 h às 15 h a pressão variou de 0,1 mm, isto é: em 15'
- | | | | |
|-----|-------|-----|------------|
| 15' | | 0,1 | |
| 10' | | x | $x = 0,05$ |
- Como a pressão baixou na base, a correção será —, pois $P \text{ calc.} = P_{\text{ida}} - (\pm \text{correção})$
Assim para os demais pontos.
Para a temperatura: 15' 0,3
- | | | | |
|-----|-------|---|--------------|
| 10' | | y | $y = + 0,20$ |
|-----|-------|---|--------------|
- Como a temperatura subiu, + pois temos por idêntica razão |: $T_{\text{calc.}} = T_{\text{ida}} - (\pm \text{corr.})$; procede-se igualmente para as temperaturas dos demais pontos.
- o *Leituras reduzidas* As colunas seguintes nos dão as temperaturas já reduzidas, isto é, já corrigidas, em relação ao aneróide de base.
- o (H_m)
o (T_m) Vamos a seguir calcular as *pressões médias* e as *temperaturas médias*. Toma-se sempre as pressões e as temperaturas já reduzidas.
- o ($h_{1H} - h_2$) Após esse cálculo, vamos passar a coluna *H*. Toma-se por exemplo: $h_1 = 754,15$ (*RN*) e $h_2 = 752,38$ (E.A. 227)
 $H = + 1,77$ para diferença de pressão entre 1 e 2. Para o ponto 2 e 3 |: $h_1 = 752,38$ e $h_2 = 749,03$ e virá $H = + 3,35$ e assim vamos procedendo para os demais.

DADOS DE CAMPO PARA O CÁLCULO DE UMA PLANILHA SOBRE NIVELAMENTO BAROMÉTRICO FEITO COM ANERÓIDES

Aneróide de marcha } nome: Paulin
 } n.º: 3432

PONTOS NIVELADOS		HORA		Pressão atmosférica	Temperatura do ar
N.º	Local	h	m		
1	RN	14	50	754.1	29.9
2	E.A 227	15	05	752.25	29.8
3	E.A 531	15	17	748.8	28.8
4	E.A s/n	15	31	746.3	27.5
5	E.A 1310	15	41	741.3	28.2
6	E.A Tambo	16	00	741.2	27.2
7	E.A s/n	16	11	741.0	27.0
8	M.C.	16	25	759.5	26.4
9	E.A s/n	16	43	740.8	26.0
10	E.A. Tambo	16	53	740.9	25.0
11	E.A 1310	17	05	741.0	25.5
12	E.A 531	17	22	748.0	23.0
13	R.N.	17	37	753.5	26.0

Nota E. A 227. Estrada dos Alpes, em frente ao prédio n.º 227.
 M.C. Marco Cadastral.

Aneróide de estação } nome: Paulin
 } n.º: 3426

HORA		Pressão atmosférica mm	Temperatura do ar 0º	OSCILAÇÕES	
h	m			Pressão mm	Temperatura 0º
14	40	750.4	29.7		
15	00	750.3	30.1		
15	15	750.2	30.2		
15	30	750	29.8		
15	45	749.9	29.6		
16	00	749.9	29.4		
16	15	749.7	29.1		
16	30	749.6	29.0		
16	45	749.5	28.5		
17	00	749.5	28.0		
17	15	749.4	27.0		
17	30	749.4	26.7		
17	45	749.4	26.7		
18	00	749.4	26.5		

Gráfico das oscilações do Aneróide de Estação

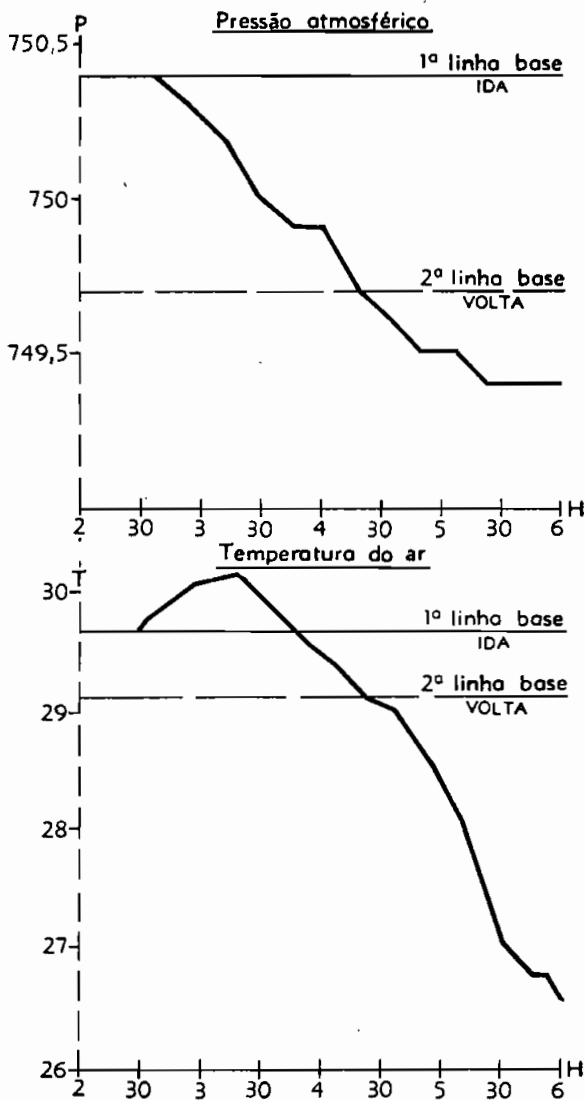


FIG. 419

PLANILHA DO NIVELAMENTO BAROMETRICO FEITO COM ANEROIDE

PONTOS NIVELADOS	HORA		Leitura aneróide mm	Temperatura do ar °c	REDUÇÕES PARA AS OSCILAÇÕES		LEITURA RED.		$h_1 + h_2$ 2(Hm)	$t_1 + t_2$ 2(Tm)	$h_1 - h_2 =$ (H)	Grau bar. (u)	Dif. niv. bar. (HXm)	Altura calculada A ₀	Corr. ΔA	Altura comp. Am
	N.º	Local			h	m	Pressão	Temperatura								
1	RN		754,1	29,9	-0,05	+0,20	754,15	29,70	753,26	29,53	+1,77	11,80	20,89	94,31	0,00	94,31
2	E.A. 227		752,25	29,8	-0,13	+0,43	752,38	29,37	750,70	28,86	+3,35	11,81	39,56	115,20	-0,32	115,52
3	E.A. 531		748,8	28,8	-0,23	+0,45	749,03	28,35	747,67	27,98	+2,32	11,82	27,42	154,76	-0,59	155,35
4	E.A. s/n		746,3	27,5	-0,41	+0,09	746,71	27,41	744,25	27,85	+4,91	11,87	66,28	182,18	-0,89	183,07
5	E.A. 1310		741,3	29,2	-0,5	-0,10	741,8	28,30	741,75	27,90	+0,10	11,92	1,19	240,46	-1,20	241,66
6	E.A. tambó		741,2	27,2	-0,5	-0,30	741,70	27,80	741,67	27,61	+0,05	11,90	0,59	241,65	-1,53	243,18
7	E.A. s/n		741,0	27,0	-0,65	-0,52	741,65	27,52	740,96	27,29	+1,38	11,90	16,42	242,24	-1,76	244,00
8	C.		739,5	26,4	-0,77	-0,67	740,27	27,07	740,50	26,76	-0,65	11,89	-7,73	258,04	-2,05	260,74
9	E.A. s/n		740,8	26,0	-0,12	-0,46	740,92	26,46	740,07	26,12	-0,11	11,85	-1,30	258,01	+1,98	251,03
10	E.A. tambó		740,9	25,0	-0,13	-0,79	741,03	26,79	741,00	26,32	-0,13	11,96	-1,54	251,71	+3,08	248,63
11	E.A. 1310		741,0	25,5	-0,16	-1,36	741,16	26,86	744,69	26,01	-7,07	11,90	-83,43	250,17	+1,40	248,77
12	E.A. 531		748,0	23,0	-0,23	-2,17	748,23	25,17	750,98	26,67	-5,80	11,72	-64,46	166,74	+6,27	160,47
13	RN		753,5	26,0	-0,23	-2,17	753,73	28,17	—	—	—	—	—	102,28	+7,97	94,31

- o *Grau Bar.* Devemos calcular agora o *grau barométrico*. Tomamos por interpolação, mas podíamos calculá-lo pela fórmula de Jordan o que seria mais moroso. Calcularemos o 1.º grau barométrico por serem de procedimento idêntico o cálculo dos demais.
- Tomamos $H_m = 753,26$ $T_m = 29^{\circ}53$
 Na tabela vemos: $750 \dots 29^{\circ} \dots 11,83$
 $750 \dots 30^{\circ} \dots 11,87$
 e $755 \dots 29^{\circ} \dots 11,75$
 $755 \dots 30^{\circ} \dots 11,79$
- se para 1º.... varia.....0,04 g. bar.
 para 0º,53. varia.....x x = 0,0212
 e ficamos com: $750 \dots 29,53 \dots 11,85$
 $755 \dots 29,53 \dots 11,77$
- se para 5 mm varia.....0,08
 para 3,26 varia.....y y = 0,052
 donde o grau barométrico será: $11,85 - 0,052 = 11,80$
- o (*Dif. niv. barom.*) A diferença de nível barométrico será o grau barométrico multiplicado pela diferença de nível. Para RN e E.A. 227 teremos: $11,80 \times 1,77 = 20,89$ m.
- o (*Altitude calcul.*) Para termos a altitude, devemos somar à primeira diferença de nível a altitude do ponto 1.
 $94,31 + 20,89 = 115,20$
 A do ponto E.A. 531 será $115,20 + 39,56 = 154,76$ m. Assim vamos procedendo para os pontos sucessivos encontramos para o Marco Cadastral do Morro Teresópolis o valor de 258,66 m em vez de 260,74 m do nivelamento geométrico (P.M.). Temos portanto uma diferença.
- o (*Correções*) Vamos compensar em relação ao tempo. Fizemos o percurso em 95 minutos (das 14,50 até 16,25 h) e encontramos um erro de 2,08 metros. Para termos o erro na unidade de tempo, basta dividirmos 2,08 m por 95 minutos obtendo para tanto 0,021 metros por minuto.
 Ora, entre as estações 1 e 2, levamos 15' (minutos), portanto, $15 \times 0,021$ nos dará o que deveremos somar ao valor obtido ou seja: 0,59 m/min.
 Entre 1 e 3 virá: $22 \times 0,021 = 0,59$; etc.
- o (*Altitude comp.*) Logo para as *altitudes compensadas* devemos ter: Aplicar-se-á a fórmula:
 $Alt_{comp.} = Alt_{lida} - (+ - correção)$
 No caso de 1 para 2, teremos substituindo na fórmula:
 $Alt_{com.} = 115,20 - (-0,32) = 115,52$ m

Deve-se observar que no ponto 8 (MC) devemos obter para valor compensado a altitude 260,74.

Para o cálculo de volta (8 para 13) procedemos como segue, tomamos para linha de base a leitura às 16,25 horas. Efetuamos o cálculo de correção da linha de base: (0,07) para as 6,15 horas ou seja 0,03 para as 16,30 e fizemos todas as operações identicamente como procedemos na ida. O erro obtido foi bem maior que o da ida, dada as condições já explanadas no relatório acima descrito.

- o *Fórmula de Laplace* Para determinar a altitude do marco Cadastral do morro Teresópolis vamos empregar agora a fórmula de Laplace. Além de grande e notável astrônomo notabilizou-se Laplace como matemático. Através de uma série de desenvolvimentos matemáticos, chegou esse francês à uma fórmula, que nos dá a diferença de nível entre dois pontos quaisquer, desde que se conheçam as pressões e as temperaturas.

A fórmula de Laplace é a seguinte:

$$N = 18.336 \log \frac{H}{h} + 2 \cdot \frac{(t' + t'')}{1.000} x_1 + x_2 \cdot 0,00265 \cos 2\varphi_m + \frac{x_3}{R} (x_3 + 15.926)$$

onde por sua vez:

$$x_1 = 18.336 \log \frac{H}{h}$$

$$x_2 = 18.336 \log \frac{H}{h} + 2 \frac{t' + t''}{1.000} x_1$$

$$x_3 = x_2 + x_2 \cdot 0,00265 \cdot \cos 2\varphi_m$$

Calculamos pela fórmula de Laplace e obtivemos um valor de 173,46 metros para a diferença de nível entre 1 e 8.

$$\text{Para RN: } H = 754.1 \quad \text{Para MC: } h = 739.5 \\ t' = 29.9 \quad t'' = 26.4$$

$$x_1 = 18336 \log \frac{754.1}{739.5} = 155,67 \text{ metros}$$

$$x_2 = x_1 \left(1 + \frac{112,6}{1.000} \right) = 173,19 \text{ metros} \quad \boxed{\varphi_m = 30^{\circ}05'9''}$$

$$x_3 = x_2 (1 + 0,00265 \cos (-60^{\circ}10')) = 173,42 \text{ metros.}$$

$$N = x_3 + \frac{x_3}{R} (x_3 + 2.18336 M) \text{ mas } M = 0,43430 \text{ para}$$

nós, e resulta.

$N = 173,42 + 0,04 = 173,46$ metros para diferença de nível, o que nos dá um erro sensível de 6,99 metros.

Isso é fácil de verificarmos pois $260,74 - 94,23 = 166,47$ donde o erro verificado foi: $173,46 - 166,47 = 6,99$ metros de diferença.

Pensamos que tal erro se justifica porque a fórmula de Laplace se aplica a *valores médios*, mais exatos, e não a valores isolados.

XVII) Cálculo de distâncias e cotas com taqueômetro estadimétrico.

Fórmulas:

$$D = CS \cos^2 \alpha \text{ (distância horizontal)}$$

C — constante estadimétrica (geralmente igual a 100);

S — número gerador (leitura dos fios extremos);

α — ângulo vertical (com o horizonte).

$$N = D \operatorname{tg} \alpha \text{ ou } 50S \operatorname{sen} 2\alpha \text{ (diferença de nível)}$$

$$H = H_{\odot} + i \pm N - Fm \text{ (cota de um ponto)}$$

H_{\odot} — cota da estação do taqueômetro;

i — altura do taqueômetro instalado;

Fm — leitura do fio médio.

Dados da caderneta.

Pontos	Leituras	Ang. vert.	
1	0,600 (Fm) 1,457	+ 6°49'	Estação P: (H _⊙) cota = 50m i = 1,54m
2	0,700 (Fm) 1,143	- 7°17'	
3	0,500 (Fm) 0,941 1,382	0°	Constante instrumental = zero i = (f + e)

Resolução:

1) *Cálculo das distâncias (D):*

PONTO	S. (x)	α	100 $\cos^2 \alpha$	100 $\cos^2 \cdot S(D)$
			Tabela (III)	
1.....	0,857	+ 6°49'	98,59	84,492
2.....	0,886	- 7°17'	98,395	87,178
3.....	0,882	0°	100,00	88,200

x) $1 = 1,457 - 0,600 = 0,857$; $2 = (1,143 - 0,700) \cdot 2 = 0,886$;
 $3 = 0,882$.

2) *Cálculo das diferenças de nível (N):*

PONTO	α	S	Tabela (III) 50 $\cdot \sin 2\alpha$	50 $\sin 2\alpha \cdot S(N)$
1.....	+ 6°49'	0,857	11,785	10,100
2.....	- 7°17'	0,886	- 12,575	- 11,141
3.....	0°	0,882	0	0

3) *Cálculo das cotas (H):*

PONTO	Fm	$H \odot + i$	$H \odot + i - Fm$	$H = H \odot + i - Fm \pm N$
1.....	1,029	51,540	50,511	60,611
2.....	1,143	51,540	50,397	39,256
3.....	0,941	51,540	50,599	50,599

XVIII) *Cálculo de distâncias e cotas com um taqueômetro auto-re-dutor (tipo Kern).*

Fórmulas:

$$D = \frac{100 \cdot h_1}{1} = \frac{100 \cdot h_2}{1,8} = \frac{100 \cdot h_3}{2,2} = \frac{100 (h_1 + h_2 + h_3)}{1 + 1,8 + 2,2} =$$

$$D = 20 (h_1 + h_2 + h_3) .$$

Dados da caderneta.

PONTOS	Leituras	Tangentes	
1.....	0,400 0,710 0,952 1,078	95,65	Estação A Cota (H ₀) = 45m i = 1,39 m
2.....	0,800 <hr/> 1,631	107,43	
3.....	1,000 1,665 2,467	100,00	

Nota: No taqueômetro Kern a leitura, na escala das tangentes é feita, a partir de 100 (horizontal) para cima e para baixo, no mesmo sentido.

Também os valores vêm multiplicados por 100. Assim, o valor da tangente natural, correspondente ao ponto 1 será:

Ponto 3:

$$\frac{95,65 - 100}{100} = -0,0435$$

TAQUEÔMETRO AUTO-REDUTOR

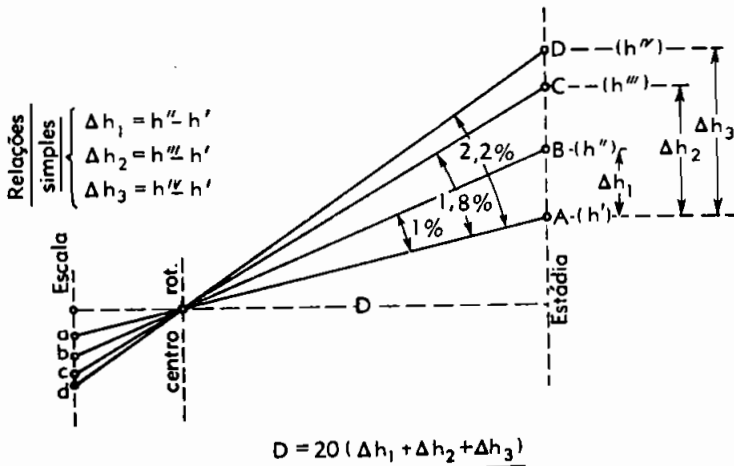


FIG. 420

e ao ponto 2:

$$\frac{107,43 - 100}{100} = + 0,0743$$

1) Distância (D):

Fórmulas:

$$D = \frac{100 \cdot \Delta h_1}{1} = \frac{100 \cdot \Delta h_2}{1,8} = \frac{100 \cdot \Delta h_3}{2,2} \text{ ou}$$

$$D = \frac{100 (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3)}{5} = 20 (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3)$$

Ponto 1:

$$\Delta h_1 = 0,310; \quad \Delta h_2 = 0,552; \quad \Delta h_3 = 0,678$$

$$\Sigma \Delta h = 1,54 \dots \dots \dots D_1 = 20 \times 1,54 = 30,80 \text{ m}$$

Ponto 2:

$$h^{iv} - h'' = 0,831$$

$$D_2 = \frac{100 \times 0,831}{1,2} = \frac{83,1}{1,2} = 69,25 \text{ m}$$

Ponto 3:

$$D' = \frac{100 \times 0,665}{1} = 66,50 \text{ m}$$

$$D'' = \frac{100 \times 1,467}{2,2} = 66,68 \text{ m}$$

$$D''' = \frac{100 \times 0,742}{1,2} = 66,83 \text{ m}$$

$$D_3 = \frac{D' + D'' + D'''}{3} = 66,67 \text{ m}$$

2) Diferenças de nível (N):

$$N = \pm D \cdot \text{tg } \alpha$$

PONTOS	TANGENTES		D	Diferença de nível
	Lidas	Naturais (α)		
1.....	95,65	- 0,0435	30,80 m	- 1,340 m
2.....	107,43	+ 0,0743	69,25 m	+ 5,145 m
3.....	100,00	0	66,67 m	0

3) Cotas (H) $H = H_{\odot} + i \pm N - L$

PONTOS	$H_{\odot} + i$	L	$H_{\odot} + i - L$	$H_{\odot} + i \pm N - L$ (II)
1.....	46,390	0,400	45,990	44,650 m
2.....	46,390	1,631	44,759	49,904 m
3.....	46,390	1,665	44,725	44,725 m

$H_{\odot} + i$ = cota de centro do taqueômetro

L = leitura na mira, correspondente a da tangente

4) *Novos dados, com problemas resolvidos:*

Estação	Pontos	Leituras	Tangentes	Distâncias calculadas	Cotas calculadas	Croqui e observações
12 \odot $H = 50$ m $i = 1,37$ m	a	1,000	112,20	53,14 m	56,853 m	
		1,530				
		2,169				
	b	0,900	94,15	27,07 m	49,151 m	
		1,958				
		0,932				
		3				
	c	2,000	100,00	63,93 m	48,730 m	
		2,840				
		3,150				
	d	3,550	99,22	147,90 m	46,085 m	
		4,138				
	e	0,860	105,25	83,42 m	54,10 m	
		1,234				
		1,742				
1,985						

FIG. 421

XIX) *Determinação do azimute verdadeiro.*

Após o levantamento planimétrico parcial do Parque Farroupilha, em Porto Alegre, foi feita na manhã de 8 de junho de 1959, com alunos de Topografia da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Rio Grande do Sul, determinação do azimute verdadeiro por observação solar. Cada aluno, instalado ao longo de um alinhamento, de 5 em 5 metros, na Avenida das Nações, junto ao lago, com um teodolito K & E, fez um par de observações; uma com o círculo a esquerda (PD) e outra com o círculo a direita (PE) o par tomado para este cálculo é o seguinte:

(aluno com teodolito em P):

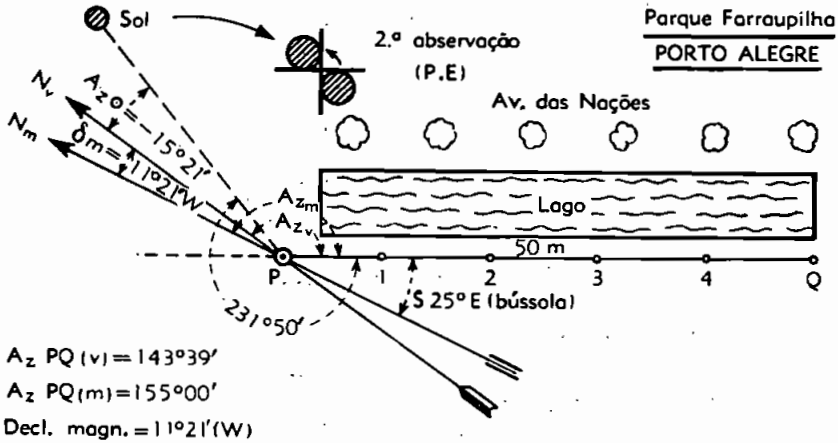


FIG. 422

Rumo (magnético) do alinhamento PQ : $25^\circ SE$

1ª observação (com teodolito Keuffel & Esser)

PD	{	ângulo horizontal:	$231^\circ 40'$	(h)
		vertical:	$35^\circ 7'$	(v)
		hora da observação:	$11^h 34^m$	
		temperatura:	$15^\circ 4$	
		pressão barom:	766.4 mm	

2ª Observação (PE)	{	$H = 11^h 35^m$
		$h = 232^\circ 00'$
		$v = 36^\circ 2'$
		$T = 15^\circ 4$
		$P = 766,4 \text{ mm}$

valores médios: $H = 11^h 34^m 5$; $h = 231^\circ 50'$; $v = 35^\circ 34' 30''$
 $P = 766,4$; $T = 15^\circ 4$

Dados:

- 1) latitude do Parque ($\varphi = -30^\circ 2'$)
- 2) do Anuário do Observatório Nacional (1959)

Declinação δ

(Oh — tempo universal): $+22^\circ 45' 16'' \cdot 5$

(variação horária): $\Delta\delta = +14'' \cdot 48$

Paralaxe horizontal: $8'' 7 (\pi)$

Resolução:

1) *Paralaxe*

$$P = \pi \cdot \operatorname{sen} z' = 8'' \cdot 7 \times \operatorname{sen} 54^{\circ}25'30'' \quad (z' = 90^{\circ} - v) \\ = 8 \cdot 7 \times 0,8134 = 7'' \cdot 08$$

2) *Refracção*

$$R = 60''15 \times \operatorname{tg} z' \times \frac{P}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0,00366 \cdot T} = \\ = 60 \cdot 15 \times 1,3981 \times \frac{766,1}{760 (1 + 0,00366 \times 15 \cdot 4)} = \\ R = 80'' \cdot 27 = 1'20'' \cdot 27$$

3) *Ângulo vertical compensado*

$$v = v' - R + p = 35^{\circ}34'30'' - 1'20'' \cdot 3 + 7'' \cdot 1$$

$$v = 35^{\circ}33'16'' \cdot 8$$

$$\operatorname{c} \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} 35^{\circ}33'16'' \cdot 8 = 0,71473$$

também

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (-30^{\circ}2') = -0,57813$$

4) *Declinação do sol (δ_{\odot})*

Longitude do eixo do fuso: $3^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}$

Hora legal (relógio): $11^{\text{h}}34^{\text{m}}30^{\text{s}}$

Hora civil GRW: $14^{\text{h}}34^{\text{m}}30^{\text{s}} = 14^{\text{h}},575$

Declinação do sol em 8/6/59,

à $O^{\text{h}}_{\text{GRW}}$: $\delta_{\odot} = +22^{\circ}45'16'' \cdot 50$

variação horária: $\Delta\delta = +14'',48$

" total: $14'' \cdot 48 \times 14,575 = 3'31'' \cdot 05$

c $\delta_{\odot} = +22^{\circ}45'16'' \cdot 50 + 3'31'' \cdot 05 = +22^{\circ}48'47'' \cdot 55$

sen $\delta = \operatorname{sen} 22^{\circ}48'47'' \cdot 55 = 0,38773$

cos $\varphi = \operatorname{cos} (-30^{\circ}02') = 0,86573$

cos $v = \operatorname{cos} 35^{\circ}33'16'' \cdot 8 = 81356$

O azimute (A_{\odot}) do Sol, contado a partir da direcção norte, é dado por

$$\operatorname{cos} A_{\odot} = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} v} - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} v$$

Substituindo os valores de δ , φ e v

$$\cos A_{\odot} = \frac{0,38773}{0,86573 \times 0,81356} + 0,57813 \times 0,71473$$

$$\cos A_{\odot} = 0,963707$$

Para este co-seno temos os ângulos $+\alpha$ e $-\alpha$. Como a determinação foi feita pela manhã, o Sol estava à direita do *Norte*, portanto, o valor que satisfaz é o de $-\alpha$, então $A_{\odot} = -15^{\circ}29'$. O azimute do alinhamento PQ é dado por

$$Az_{PQ} = 360^{\circ} - (\text{Ang. horizontal} + A_{\odot})$$

$$Az_{PQ} = 360^{\circ} - [231^{\circ}50' + (-15^{\circ}29')]$$

$$Az_{PQ} = 143^{\circ}39'$$

o $Az_{\text{mag.}}$ de $PQ = 180 - 25^{\circ} = 155^{\circ}$

Declinação magnética = $11^{\circ}21' W$

O valor é um pouco exagerado devido à atrações locais, pouca prática do aluno e erros residuais de retificação, além da pouca aproximação

DADOS:

PORTO ALEGRE

$\varphi_1 = 30^{\circ}2'16'' S$

$\lambda_1 = 51^{\circ}13'18'' W$

RIO DE JANEIRO

$\varphi_2 = 22^{\circ}53'42'' S$

$\lambda_2 = 43^{\circ}13'24'' W$

Valor médio
do segundo
do meridiano
(1'') = 30,75 m

RESULTADO:

(linha reta)

$$\alpha = 36\ 386,2 \times 30,75 \text{ m} =$$

$$= 1\ 118,875 \text{ km}$$

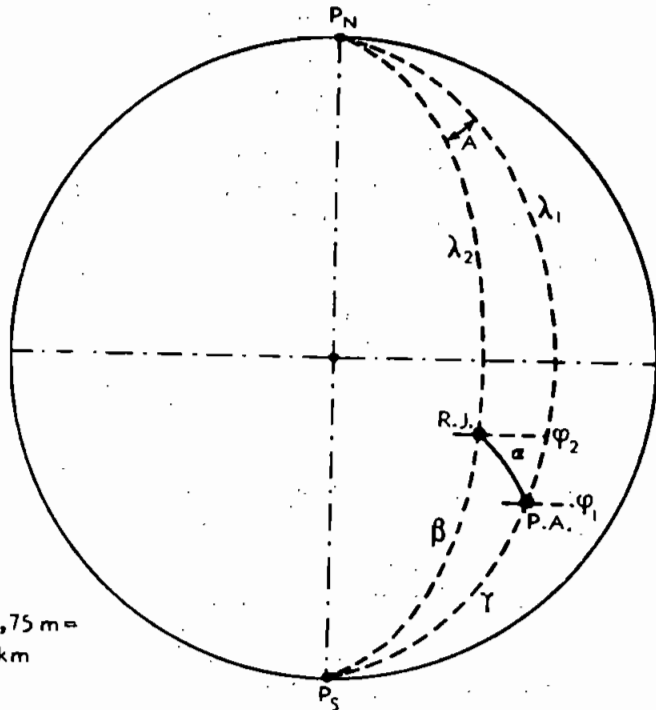


FIG. 423

mação das horas de observação e outros fatores. No entretanto, a marcha do cálculo é a indicada acima.

XX) *DIVERSOS. Cálculo da distância entre dois pontos da superfície (esférica) da Terra, em função de suas coordenadas astronômicas.*

Distância (segundo uma geodésica) entre *Porto Alegre* e *Rio de Janeiro* (*Observ. Astron.*).

Dados:

- | | | | |
|--|---|-----------|-----------------------------------|
| 1) <i>Porto Alegre</i> (<i>Observatório</i>) | } | latitude | $\varphi_1 = 30^{\circ}02'16''$ S |
| <i>Praça Argentina</i> | } | longitude | $\lambda_1 = 51^{\circ}13'18''$ W |
| 2) <i>Rio de Janeiro</i> (<i>Observatório</i>) | } | latitude | $\varphi_2 = 22^{\circ}53'42''$ S |
| <i>Morro da Conceição</i> | } | longitude | $\lambda_2 = 43^{\circ}13'24''$ W |
- 3) Valor médio do segundo do meridiano ($1''$) = 30,75 m

Fórmula (trig. esférica)

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\gamma = 90^{\circ} - \varphi_1$$

$$\beta = 90^{\circ} - \varphi_2$$

$$A = \lambda_1 - \lambda_2$$

Resolução (por logaritmos)

$$\gamma = 90^{\circ} - \varphi_1 = 90^{\circ} - 30^{\circ}02'16'' = 59^{\circ}57'44''$$

$$\beta = 90^{\circ} - \varphi_2 = 90^{\circ} - 22^{\circ}53'42'' = 67^{\circ}06'18''$$

$$A = \lambda_1 - \lambda_2 = 51^{\circ}13'18'' - 43^{\circ}13'24'' = 7^{\circ}59'54''$$

1) *Cálculo de* $\cos \beta \cdot \cos \gamma$:

$$\log \cos \beta = \overline{1,5899983}$$

$$\log \cos \gamma = \overline{1,6994656}$$

$$\log \cos \beta \cos \gamma = \overline{1,2894639}$$

$$\cos \beta \cos \gamma = 0,1947435 \text{ (antilogaritmo)}$$

2) *Cálculo de* $\sin \beta \cdot \sin \gamma \cos A$:

$$\log \sin \beta = \overline{1,9643630}$$

$$\log \sin \gamma = \overline{1,9373652}$$

$$\log \cos A = \overline{1,9957545}$$

$$\log \sin \beta \sin \gamma \cos A = \overline{1,8974827}$$

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = 0,7897375$$

Logo:

$$\cos \alpha = 0,1947435 + 0,7897375 = 0,9844810$$

e

$$\log \cos \alpha = \log 0,984481 = 1,9932073$$

donde

$$\alpha = 10^{\circ}6'26''2$$

ou, ainda

$$\alpha'' = 36386''2$$

Cada segundo de arco corresponde a 30,75 m *valor geodésico médio* e, assim, a distância, em linha reta, entre os Observatórios do *Rio de Janeiro* e *Porto Alegre* será:

$$= 36386''2 \times 30,75 \text{ m} = 1118875,65 \text{ m}$$

ou 1118,875 Km

